Sitzungsberi... der mathematisc... classe der k.b. akademie ...

Digitized by Google

LIBRARY
UNIV TY OF
C A
SANTA CRUZ

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

39

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

S 185

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.
Verlag der k. Akademie.
1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Digitized by Google

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Digitized by Google

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXVII Jahrgang 1897.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 138. Stiftungstages am 27. März 1897.

Seite

v. Pettenkofer: Ansprache 383

v. Voit: Nekrologe 390

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinz-Regenten am 15. November 1897.

M. v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 477

Wahlen 477

Sitzung vom 2. Januar 1897.

*R. Hartig: Ueber die durch den Blitz hervorgerufenen Gewebsveränderungen im Innern der Bäume 1

J. Ranke: Ueber früh-mittelalterliche Schädel und Gebeine aus Lindau 1

Sitzung vom 6. Februar 1897.

A. Föppl: Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitations-Gesetzes 93

Alfred Pringsheim: Zur Theorie der Doppelreihen . . . 101

Digitized by Google

Sitzung vom 6. März 1897.

Seite

K. v. Orff: Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendelbestimmungen . . 155

Arthur Korn: a) Ueber Molekular-Funktionen 181

b) Ein Modell zur hydrodynamischen Theorie der Gravitation 197

Franz Werner: Ueber einige neue oder seltene Reptilien und Frösche der zoologischen Sammlung des Staates in München 203

*Ferd. Lindemann: Danksagung des Mathematikers Charles Hermite in Paris für die übersandten gesammelten Werk Otto Hesse's 153

Sitzung vom 1. Mai 1897.

L. Graetz: Ein elektrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln 223

A. Voss: Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche 229

Alfred Pringsheim: Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingungen für unendliche Reihen 303

Sitzung vom 2. Juni 1897.

*W. Königs: Ueber Oxydations-Produkte der China-Alkaloide . 335

*W. Dyck: Ueber Rechenmaschinen, insbesondere über eine neue, von den Herren O. Steiger und H. Egli in Zürich construirte Maschine 335

Sitzung vom 3. Juli 1897.

L. Sohncke: Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur 337

*E. v. Lommel: Theorie der Dämmerungsfarben . . . 336

Alfred Pringsheim: Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend 343

Gustav Bauer: Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind 359

S. Kantor: Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^{λ}-Schaaren bilinearer Formen 367

Digitized by Google

Sitzung vom 6. November 1897. Seite

*P. Groth: Ueber die Erfolge der geologischen Exkursion in den Ural, welche von Mitgliedern des Petersburger internationalen geologischen Congresses gemacht wurde 475

*K. A. v. Zittel: Ueber den Verlauf des geologischen Congresses zu St. Petersburg sowie über die grosse Exkursion durch den Kaukasus 475

*E. Weinschenk: Zur Kenntniss der Graphitlagerstätten . . 475

*K. v. Orff: Ueber die von Seiten der k. bayer. Commission für die internationale Erdmessung im Laufe des Jahres ausgeführten Schweremessungen 475

*F. Lindemann: Ueber den Erfolg seiner Reise in Italien zum Studium der antiken Dodekaeder, der Gewichte und der Zahlzeichen 475

Sitzung vom 4. Dezember 1897.

C. Linde: Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase 485

E. Selenka: Schenkung seiner Sammlung von Schädeln anthropoider Affen aus Borneo 484

S. v. Merz: Schenkung von Instrumenten und Manuscripten Fraunhofer's 484

Einsendungen von Druckschriften 455, 491

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. Januar 1897.

1. Herr Robert Hartig giebt einen Ueberblick: „Ueber die durch den Blitz hervorgerufenen Gewebsveränderungen im Innern der Bäume". Die Beobachtungen sollen anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Johannes Ranke macht eine Mittheilung: „Ueber früh-mittelalterliche Schädel und Gebeine aus Lindau".

Frühmittelalterliche Schädel und Gebeine aus Lindau.

Ein Beitrag zur Geschichte der Schädeltypen in Bayern.

Von **Johannes Ranke.**

(*Eingelaufen 14. Februar.*)

Aus der Neuzeit, aus diesem und dem 18. Jahrhundert, ist, oder war vielmehr, bei Beginn meiner Untersuchungen über die Craniologie der bayerischen Bevölkerung in grossen Ossuarien, Beinhäusern, welche Hunderte, eines von ihnen, Aufkirchen am Starnberger See, mehrere Tausende von Schädeln enthielten, noch reichliches Studienmaterial so ziemlich aus allen Landestheilen Bayerns vorhanden. Dasselbe habe ich in dem Buche: Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern Bd. I. 1883 bearbeitet. Leider sind inzwischen diese, damals untersuchten grossen Ossuarien fast sämmtlich von der Erdoberfläche ver-

Digitized by Google

schwunden und damit unersetzlich wichtige Dokumente zur Geschichte unseres Volkes.

Damals konnte auch schon auf eine relativ grosse Anzahl von Schädeln und anderen Skelettresten, welche aus der vorhistorischen Periode Süd-Bayerns, und zwar aus der Völkerwanderungsperiode, stammen, zum Vergleich mit den heutigen Verhältnissen hingewiesen werden. Die jüngsten, unserer Zeit nächsten, der vorhistorischen Gräberfelder, die sogenannten Reihengräber der Völkerwanderungs-Periode, aus welchen die letztgenannten menschlichen Gebeine erhoben worden sind, gehen bis zum 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung; sie erstrecken sich im Ganzen vom 2. oder 3. bis zum 5. Jahrhundert, also über einen Zeitraum von etwa 3—4 hundert Jahren. Erst mit der durchgeführten Christianisirung des Volks verschwinden sie.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese zum Theil, wie z. B. die Reihengräber von Allach und das berühmte Gräberfeld von Nordendorf bei Augsburg, sehr ausgedehnten Nekropolen, die Gebeine der Bajuwaren und Schwaben-Allemannen enthalten, welche die von den Römischen Legionen verlassenen Gebiete Süd-Bayerns besetzten und dauernd besiedelten. Die in diesen Reihengräbern Bestatteten erscheinen als die Ahnen unseres heutigen Altbayern und Schwaben. Hier zeigte sich nun ein sehr auffallendes Verhältniss.

Aus der Vergleichung der Formbildung der aus der Völkerwanderung stammenden Schädel mit den Schädeln der modernen Bevölkerung Bayerns ergab sich, dass sich seit dieser Zeit, also im Verlaufe der letzten 15-hundert Jahre, ein fast vollkommener Wechsel der typischen Schädelform der beiden genannten süddeutschen Stämme vollzogen zu haben scheint. Auch das Gesichtsskelett erscheint in starkem Grade verändert, aber am deutlichsten und auf den ersten Blick unverkennbar prägt sich diese Veränderung der Schädelform im verschiedenen Bau, namentlich des männlichen Hirnschädels aus.

Während die weit überwiegende Mehrzahl der Schädel aus der Völkerwanderungsperiode langgestreckt ist, schmal, dolicho-

Digitized by Google

cephal, niedrig mit fliehender Stirn, mit verstrichenen Stirnhöckern und Scheitelbeinhöckern, dagegen mit stark ausgebildeten Augenbrauenbogen und im Ganzen energisch vorgewölbter Unterstirn sowie nach hinten pyramidal-ausgezogenem Hinterhaupte, sind die Schädel der modernen Bevölkerung Südbayerns, in Altbayern wie in Schwaben, jetzt kaum weniger ausschliesslich rund und breit, brachycephal, hoch, mit mehr gerade ansteigender Stirn, schwachen oder ganz unentwickelten Augenbrauenbogen, deutlichen Stirnhöckern und Scheitelbeinhöckern, mit oft fast flacher, kaum vorgebuchteter Unterstirn und breitem, breitabgerundetem Hinterhaupt.

Wie und wann sich diese Veränderung der Schädelform ausgebildet hat, darüber ergaben die bis dahin möglichen Untersuchungen kaum einige Andeutungen.

Seit der Veröffentlichung des I. Bandes der „Beiträge zur somatischen Anthropologie der Bayern" hat sich das von mir gesammelte craniologische Studien-Material und das Material an sonstigen Skelettresten aus der Völkerwanderungsperiode aus Südbayern und Schwaben beträchtlich vermehrt. Es ist aber auch gelungen, eine Anzahl von Schädeln und Skelett-Resten aus noch weit älteren prähistorischen Epochen Bayerns zu bergen, welche es nun ermöglichen, die somatische Vergleichung der Bewohner Süd-Bayerns von sonst und jetzt noch weiter zu vertiefen.

Im Juli des verflossenen Jahres (1896) wurde in Lindau ein Fund menschlicher Gebeine und Schädel gemacht, welche für die historische Ethnologie unseres Vaterlandes, für die Geschichte der Ausbildung der körperlichen Eigenschaften des bayerischen Volkes von besonderer Bedeutung ist, da er sich in die bisher unausgefüllte Lücke zwischen Völkerwanderungsperiode und Neuzeit hereinstellt. Die in Lindau gefundenen Gebeine stammen aus dem Mittelalter, aus welchem historisch datirte Skelettreste für Bayern bisher so gut wie vollkommen fehlten. Mir selbst waren aus dieser Zeit nur zwei zeitlich bestimmte Schädel bekannt. Es sind das die im Dom zu Bamberg bewahrten Reliquien von Heinrich II., dem Heiligen (973—1024)

Digitized by Google

und seiner Gemahlin Kunigunde. Ich habe dem Anblick nach, ohne Messung, beide Schädel als dolichocephal bestimmt, namentlich zeigt der Schädel des Kaisers diese Form in ihrer typischen Ausbildung.

Zur Geschichte des Lindauer Fundes ist Folgendes zu bemerken.

Bei Legung von Heizröhren in der protestantischen Stadtpfarrkirche zu St. Stefan in Lindau im Juli des letzten Jahres (1896) kamen unter dem Boden der Sakristei der Kirche in grosser Anzahl menschliche Gebeine zu Tage.

Im Auftrage I. K. H. Prinzessin Therese von Bayern, Ehrenmitglied der kgl. B. Akademie der Wissenschaften, machte mir Frau Gräfin Oberndorff, Schlüsseldame Ihrer K. Hoheit, unter dem 14. Juli von diesem Funde Mittheilung. Unter dem 15. bat ich telegraphisch um Zusendung aller zu Tage gekommener Menschenschädel und möglichst zahlreicher langer Knochen. Unter dem 18. theilte Frau Gräfin Oberndorff mit, dass an dem gleichen Tage auf Veranlassung und im Auftrag I. K. H. Prinzessin Therese in vier grossen Kisten zahlreiche Gebeine durch Herrn Pfarrer Pachebel an die prähistorische Sammlung des Staates abgesendet worden seien. Leider seien nicht viele Schädel dabei. „Die meisten waren wohl in Folge des hohen Alters mehr oder weniger zerfallen". Diesem Briefe war ein ausführliches Schreiben des Herrn Pfarrers und Senior Reinwald in Lindau, d. d. Lindau den 17. Juli 1896, beigelegt mit der Bemerkung: „Als Archäolog und Stadt-Bibliothekar etc. von Lindau ist Herr Pfarrer Reinwald hier Autorität und wohl die vor allem sachverständige Persönlichkeit".

Herr Pfarrer Reinwald schreibt:

„Die heutige prot. Stadtpfarrkirche zu St. Stephan wurde 1180 auf dem zum ehemaligen Damenstifte gehörigen Platze errichtet, der zum Kirchhof der kath. Marienkirche gehörte. Der Platz, auf welchem die vielen Gebeine sich fanden, die jetzige Sakristei, wurde später erst zum Kirchenbau gezogen und diente früher zweifellos als Beinhaus. Später war

Digitized by Google

ein solches (Beinhaus) zwischen den beiden Kirchen. Zwischen den Jahren 1510—1525 wurden sämmtliche Kirchhöfe aus der Stadt aufs Land in den jetzigen Gottesacker verlegt, auf der Insel nur noch ein Nothfriedhof beibehalten, welcher 1796/97 für die hier sterbenden Franzosen nochmals benutzt wurde. Im Chor der Kirche zu St. Stephan wurde hier und da noch eine hervorragende Persönlichkeit, z. B. eine Gräfin Waldburg geb. Hohenlohe, zur Ruhe bestattet".

„Darf man aus diesen Angaben einen Schluss ziehen, so gehen die jetzigen Funde über das Jahr 1180 zurück, da die Marienkirche und ihr Friedhof schon seit dem 10. Jahrhundert bestehen und erstrecken sich bis zum Jahre 1400. Von da ab wurden bis 1510 immer noch Leichen, besonders die der Geistlichen an den Wänden beigesetzt, aber das ehemalige Beinhaus war schon zur Kirche gezogen. Der älteste Kirchhof war bei St. Peter, welche Kirche mit 1180 der damals für die Stadt erbauten, ca. 1410 erweiterten, 1550, 1608 und 1785 und 96 restaurirten St. Stephanskirche weichen musste".

„Wie weit über 1180 bez. des 10. Jahrhunderts die Benutzung des Platzes als Ruhestätte der Todten zurückreicht und wo der älteste Begräbnissplatz neben oder am St. Peter zu finden ist für die seit Römertagen und wohl vorher noch bewohnte Insel, entzieht sich meiner Kenntniss".

Aus diesen sachkundigen Mittheilungen des Herrn Pfarrers Reinwald entnehmen wir, dass die St. Stefanskirche in Lindau 1180 an Stelle von St. Peter auf dem zur Marienkirche gehörigen Kirchhofe der Stadt-Insel von Lindau erbaut worden ist. Die bei den Grundgrabungen für diesen Kirchenbau gehobenen Skelettreste wurden, wie das früher überall und vielfach bis in unsere Zeit herein üblich war, in einem Beinhaus (Ossuarium) untergebracht. Die jetzige Sakristei von St. Stefan erscheint nach den Mittheilungen des Herrn Pfarrers Reinwald als dieses alte Ossuarium, auf dessen Gebeine man nun wieder gestossen ist.

Danach ist die Annahme begründet, dass die wieder an's Licht gekommenen Knochen zum Theil über das Jahr 1180

zurück zu datiren sind. Möglicher Weise können die ältesten Skelettreste, da „die Benützung des Platzes als Ruhestätte der Todten bis über das 10. Jahrhundert zurückreicht", noch aus dieser frühen Periode stammen.

Durch diese Erwägungen kommen wir als Altersgrenze für die bei St. Stefan ausgegrabenen Gebeine auf die Zeit vom 10. bis Ende des 12. Jahrhunderts. Nach den Studien des Herrn Pfarrers Reinwald hat sich die Benützung der Begräbnissstätte überhaupt nicht weiter als etwa bis zum Jahre ca. 1400 erstreckt.

Wir haben es sonach sicher mit Resten aus dem „Mittelalter" aber wohl zweifellos mit solchen aus dem frühen Mittelalter (10. bis 12. Jahrhundert) zu thun.

Es wird sich ergeben, dass die craniologischen Bestimmungen zu dem gleichen Resultate führen.

Beschreibung der bei St. Stefan in Lindau gefundenen Schädel und Schädelknochen.

A. Einige Haupt-Messungs-Ergebnisse.

Vor allen weiteren Betrachtungen und Schlussfolgerungen muss zuerst das in Lindau gefundene craniologische Material vorgelegt werden.

Von den eingesendeten Schädeln und Schädelbruchstücken waren 25 soweit erhalten, dass an ihnen Länge und Breite zum Theil auch Höhe, Umfang und Capacität bestimmt werden konnte, um die Haupt-Indices der Schädeltypen zu berechnen.

Nach dem Längen-Breiten-Index geordnet ergeben diese Messungen folgende Reihen.

Digitized by Google

Tabelle 1.

25 Schädel aus Lindau-St. Stefan.

Hirnschädel.

Laufende Nummer	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizontal-Umfang mm	Capacität ccm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index
			I. 8 Dolichocephale:						
1	6	528	—	194	136	—	70,10	—	—
2	17	540	—	195	143	—	72,22	—	—
3	12	504	1220	182	132	125	72,52	68,68	94,69
4	14	528	1380	190	139	127	73,15	66,84	91,36
5	7	523	1430	189	139	135	73,54	71,43	97,12
6	8	510	1320	184	136	127	73,91	69,02	93,38
7	20	505	—	182	135	—	74,17	—	—
8	23	c. 520	—	181	136	—	74,31	—	—
Mittlere Capacität: **1350**									
			II. 9 Mesocephale:						
9	5	535	—	190	145	—	75,91	—	—
10	4	536	1450	188	145	128	77,12	68,08	88,27
11	21	540	—	193	149	—	77,20	—	—
12	18	524	—	185	143	—	77,29	—	—
13	3	515	—	180	140	—	77,77	—	—
14	1	535	1470	188	147	136	78,19	72,34	92,51
15	19	513	1310	179	140	—	78,21	—	—
16	2	514	—	181	142	—	78,45	—	—
17	15	501	1280	173	138	125	79,77	72,25	90,58
Mittlere Capacität: **1378**									
			III. 8 Brachycephale:						
18	13	542	1570	190	152	148	80,00	77,89	97,37
19	24	—	—	171	138	—	80,70	—	—
20	10	522	1450	182	149	130	81,86	71,47	87,24
21	11	500	—	171	141	—	82,15	—	—
22	16	520	—	180	150	125	83,37	69,44	83,33
23	9	522	—	177	149	—	84,18	—	—
24	33	—	—	170	148	—	87,06	—	—
25	32	523	—	176	156	—	88,63	—	—
Mittlere Capacität: **1510**									

Digitized by Google

Tabelle II.

Schädel und Schädelbruchstücke aus Lindau-St. Stefan.

Gesichtsschädel.

Laufende Nummer	Nummer der Orig.-Tabelle	Mittelgesicht in mm			Augenhöhlen in mm			Nase in mm			Gaumen in mm		
		Joch-Breite	Höhe	Index	Breite	Höhe	Index	Höhe	Breite	Index	Länge	Breite	Index
A. Ganz erhaltene Schädel, ohne Unterkiefer.													
2 Dolichocephale:													
3	12	117	59	**50,4**	40	34	**85,00**	48	22	**45,83**	47	33	**74,74**
4	14	130	73	**56,1**	43	34	**79,05**	51	23	**45,10**	52	39	**74,92**
1 Mesocephaler:													
17	15	128	68	**53,1**	39	34	**87,20**	53	24	**45,28**	—	—	—
1 Brachycephaler:													
18	13	143	68	**53,8**	48	33	**68,75**	54	26	**48,15**	47	37	**78,72**
B. Gesichtsmasken d. h. Vorderschädel ohne Jochbogen.													
26	24	—	—	—	36	33	**91,70**	43	21	**48,83**	—	—	—
27	25	—	—	—	36	33	**91,70**	51	23	**45,09**	45	35	**79,9**
28	26	—	—	—	43	33	**76,72**	52	25	**48,07**	52	37	**71,15**
29	27	—	—	—	—	—	—	47	20	**42,55**	51	33	**64,70**
30	28	—	—	—	35	32	**91,42**	44	22	**50,00**	42	31	**73,81**
31	29	—	—	—	43	34	**79,05**	—	—	—	—	—	—
32	30	—	—	—	37	29	**78,39**	47	23	**48,93**	48	32	**66,60**
33	31	—	—	—	42	30	**71,43**	48	23	**47,91**	46	34	**73,91**
24	32	—	—	—	39	34	**87,71**	45	25	**55,55**	43	39	**90,7**
25	33	—	—	—	38	30	**78,93**	45	23	**51,11**	43	34	**79,05**
34	34	—	—	—	36	29	**80,56**	45	21	**46,66**	47	36	**76,59**
35	35	—	—	—	42	34	**80,95**	56	25	**44,64**	46	38	**82,6**
36	36	—	—	—	39	32	**82,05**	49	21	**42,85**	47	35	**74,46**

Allgemeine Analyse der Formen der Schädel 3, 4, 17, 18.

I. Dolichocephale:

	Hirnschädel:	Gesichtsschädel:
Schädel 3 (12)	dolichocephal, chamaecephal;	leptoprosop, mesoconch, leptorrhin, leptostaphylin.
„ 4 (14)	„ „	leptoprosop, chamäconch, leptorrhin, leptostaphylin.

II. Mesocephale:

Schädel 17 (15)	mesocephal, chamaecephal;	leptoprosop, chamäconch, mesorrhin, leptostaphylin.

III. Brachycephale:

Schädel 13 (18)	brachycephal, hypsicephal;	leptoprosop, hypsiconch, leptorrhin, leptostaphylin

Digitized by Google

B. Einzelbeschreibung der Schädel und Schädeldächer.

I. 8 Dolichocephale Schädel.

Nr. 1 (6). Längenbreiten-Index 70,10.

Männliches Schädeldach. Mittleres Lebens-Alter. Die Kranznaht in den beiden Temporalenden verstrichen. Sonst die Nähte offen. Stirn nach hinten gewendet, Stirnhöcker schwach. Stirnnasenwulst kräftig vortretend. Hinterhaupt pyramidal ausgezogen. Torus occipitalis ohne äusseren Hinterhauptshöcker. Sagittalnaht beginnt zu verwachsen. Der Schädel ist elegant symmetrisch gewölbt; ohne Worm'sche Knochen und sonstige Schaltknochen. Schläfenfläche mässig gross. Der Anfang der Schläfenlinien auf dem Stirnbein rel. schwach markirt. Augenhöhlenfortsatz des Stirnbeines kurz. Die Stirnnasenfortsätze der Oberkiefer steil nach vorn aufgerichtet. Bruchstücke der Nasenbeine zeigen auf grosse Nasenbeine mit konvexer Wölbung. Nase tief eingesetzt. Zitzenfortsatz mässig. Kleinste Stirnbreite 94; grösste 118; Stirnbogen 126 mm. Querer Scheitelbogen 336; Abstand der beiden oberen Schläfenlinien von einander 130. Länge der Pfeilnaht 135; der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins 82.

No. 2 (17). Längenbreiten-Index 72,22.

Grosses schweres männliches Schädeldach. Hochgewölbt. Stirn stark fliehend mit einer Mittelkrista. Augenbrauenbogen sehr stark entwickelt, von einem mächtig vorgebuchteten Stirnnasenwulst beginnend. Nase sehr tief eingesetzt. Die Nasenbeine, nach den Bruchflächen zu schliessen, gross. Am Bregma ein langer und schmaler Interparietalknochen (Fontanellknochen der grossen Fontanelle), seine Länge 21, Breite etwas unregelmässig zwischen 4 und 2 mm schwankend. Hinterhaupt stark pyramidal ausgezogen, kolossal entwickelter Torus occipitalis. Ein Worm'scher Knochen in der Gegend der kl. Fontanelle (Fontanellknochen der kleinen Fontanelle). Stirnhöcker verstrichen, ebenso die Scheitelbeinhöcker; Schläfenflächen gross. Beginn der Schläfenlinien am Stirnbein kräftig entwickelt. Kleinste Stirnbreite 95, grösste 122, Stirnbogen

Digitized by Google

125 mm. Querer Scheitelbogen 310, Abstand der beiden oberen Schläfenlinien von einander 120. Länge der Pfeilnaht (bis an die untere Grenze des Fontanellknochens) 140; die Länge der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins misst nur 70 mm.

Der Schädel zeigt ungefähr in der Mitte der Schläfenschuppe ein unregelmässig rundliches Loch, Höhe 4, Breite 3 Millimeter. Die Fläche im Schläfenschuppen ist im Umkreis der Oeffnung etwas eingesunken, so dass das Loch in einer rundlichen grubigen Vertiefung von etwas mehr als 10 Millimeter Durchmesser, liegt; auf der Aussenseite sind die Lochränder abgerundet, auf der Innenseite des Knochens zeigt sich oben und hinten an der Lochöffnung ein ziemlich scharfer etwa 1 mm hoher Knochenwall, dessen Ränder aber auch abgerundet erscheinen. Das Loch in der Schläfe sieht so aus, als wäre es durch einen annähernd runden spitzen Gegenstand, etwa durch einen Nagel, während des Lebens eingetrieben worden, der Mensch ist aber nicht an dieser Verletzung gestorben, da die Wundränder eine vollständige Heilung zeigen, der Prozess war schon lange vor dem aus anderer Ursache erfolgenden Tod abgelaufen. Die Art der Verletzung erinnert an jene Heldenthat des Abigail, welche den Feldhauptmann Sissera durch einen ihm während des Schlafs in die Schläfen eingeschlagenen Nagel tödtete, (Altes Testament) und ähnliche Tödungen namentlich von Kindern, wie solche auch in der Geschichte erzählt werden.

No. 3 (12) Längenbreitenindex 72,52.

Wohlgebildeter männlicher Schädel von mittlerer Grösse ohne Unterkiefer. Der Oberkiefer ist senil atrophirt, die Alveolen aller Molaren und dreier Prämolaren sind ganz verwachsen, rechts ist nur noch die Alveole des Eckzahns, links jene der drei Vorderzähne und der zweiten Prämolaren offen. Dagegen sind noch alle Schädelnähte offen sogar die seitlichen Anfangsabschnitte der Kranznaht; die Sphenobasilarfuge ist längst, fast ohne Spuren zu hinterlassen, verknöchert. In den Nähten fehlen Worm'sche Knochen, sie sind vollkommen normal.

Digitized by Google

Die Form des Hirnschädels ist typisch dolichocephal; das Hinterhaupt zu einer Pyramide ausgezogen, die Stirn etwas nach rückwärts geneigt, Stirnhöcker verstrichen, die Augenbrauenwülste stark hervortretend, namentlich in der Mitte der Unterstirn, an der Glabella gut abgegrenzt, an den Seiten sich verflachend. Scheitelbeinhöcker ebenfalls abgeflacht. Muskelrelief am Hinterhaupt stark entwickelt, Torus occipitalis, dagegen fehlt ein Hinterhauptshöcker; Zitzenfortsätze mässig gross, Temporalflächen mässig, Entfernung der unteren halbzirkelförmigen Linien, über dem Scheitel im Bogen gemessen, 140, der oberen 115 mm, der Anfang der halbzirkelförmigen Linien am Stirnbein schwach, kaum erhaben, vortretend, Augenhöhlenfortsatz des Stirnbeins kurz.

Der Gesichtsschädel ist trotz der Niedrigkeit des Alveolarfortsatzes rel. schmal, die Wangenbeine sind im Ganzen und mit dem Hinterrand ihrer Augenhöhlenfortsätze scharf nach hinten gewendet, Jochbogen angelegt, Schädel kryptozyg. Die Stirnnasenfortsätze des Oberkiefer sind steil auf die Gesichtsfläche aufgerichtet, einander stark genähert. Das tief eingesetzte Nasendach wird dadurch selbst steil aufgerichtet und rel. schmal, trotzdem die Nasenbeine gross sind; die Form des Nasenrückens ist stark convex gebogen, aquilin. Nasenöffnung schmal, ulmenblattförmig; Nasenstachel stark und spitz, der Unterrand der Nasenöffnung ist aber nicht scharfrandig, sondern schwach abgerundet (infantile Form). Augenhöhlen mässig hoch und tief, offen.

Nach den Messungen ist der Schädel dolichocephal (Index 72,52), chamaecephal, mit leptoprosopem Obergesicht (rep. mesoprosop), mesoconch, leptorrhin, leptostaphylin. Der Gaumen zeigt einen sehr entwickelten breit abgerundeten, auf die Gaumenbeine in einer nach hinten sich zuspitzenden Fortsetzung übergehenden, Gaumenwulst, torus palatinus; die Gaumenquernaht verläuft ausgesprochen geradlinig und senkrecht auf die Längsnaht des Gaumens, beide Linien bilden ein regelmässiges Kreuz. Die Flügelfortsätze des Keilbeines zeigen Waldeyer's Form B, d. h. die inneren Lamellen sind klein und wenig hoch, dagegen

Digitized by Google

die äusseren Lamellen breit und gross, an ihrem unteren Ende in eine stumpfe Spitze ausgezogen. Das grosse Hinterhauptsloch ist in geringem Grade schief, nach links etwas ausgebuchtet. Kleinste Stirnbreite 90, grösste 113, Stirnbogen 118 mm. Ganzer Sagittalbogen 365; Hinterhauptsbogen 113, davon Oberschuppe 70; Mittelhauptsbogen-Pfeinaht 134.

Nr. 4 (14). Längenbreiten-Index 73,15.

Wohlgebildeter, männlicher Schädel von mehr als mittlerer Grösse, Unterkiefer fehlt, einer der mitgesendeten Unterkiefer passt aber ziemlich gut zu diesem Schädel (14 a).

Der Schädel ist ohne senile Atrophie, doch hat schon Zahnverlust stattgefunden, rechts fehlt der zweite, links der zweite und der dritte Molar, die betreffenden Alveolen sind verwachsen, der Alveolarrand an diesen Stellen verkümmert; die Zähne sind zum Theil tief abgekaut. Die Schädelnähte sind normal ohne alle Worm'schen oder sonstigen Zwickelknochen, alle offen bis auf die Schläfenflächenenden der Kranznaht, welche zu verwachsen beginnen. Die Sphenobasilarfuge ist längst verwachsen.

Die Form des Hirnschädels ist gestreckt, typisch dolichocephal, das Hinterhaupt breit ausgelegt rsp. ausgezogen, die Stirn nach rückwärts geneigt. Stirnhöcker unkenntlich, die Augenbrauenwülste mächtig hervortretend, nur nach aussen verstreichend, der Stirnnasenwulst stark vorgetrieben, die Scheitelbeinhöcker fast verstrichen. Das Muskelrelief am Hinterhaupt sehr stark ausgebildet, ohne torus occipitalis, dagegen mit ziemlich grossem, gut abgegrenztem Hinterhauptshöcker, beiderseits Spuren der fötalen queren Hinterhauptsnaht l. 16, r. 31 mm lang; die Zitzenfortsätze sind breit und gross. Temporalflächen mittelgross: ganzer Scheitelbogen 300, Abstand der unteren Schläfenlinien über den Scheitel gemessen 120 mm, der Abstand der unteren und oberen Schläfenlinien beträgt c. 10 bis 11 mm, so dass der Abstand der oberen Schläfenlinien nur 100 mm beträgt. Der Anfang der halbkreisförmigen Linien am Stirnbein tritt gut markirt hervor, der Augenhöhlen-

Digitized by Google

fortsatz des Stirnbeins ist aber doch ziemlich kurz, die Temporalfläche dringt nur wenig hinter die Augenhöhle ein.

Der Obergesichtsschädel ist schmal, stark profilirt, Jochbein im Ganzen und sein Augenhöhlenfortsatz stark nach hinten gewendet, Jochbogen angelegt, Schädel kryptozyg. Die Stirnnasenfortsätze des Oberkiefers ziemlich stark aufgerichtet, nicht flach liegend; die Nasenwurzel tief eingesetzt; Nasenform gewölbt, aquilin, Nasenbeine zerbrochen aber zweifellos im Ganzen gross, Nasenöffnung schmal, der Nasenstachel abgebrochen, mittelgross, Unterrand der Nasenöffnung etwas abgerundet, schwache Pränasalgruben. Der Gaumen schmal, Gaumenbeine zeigen einen breiten Processus intermaxillaris anterior. Die äusseren Lamellen der flügelförmigen Fortsätze des Keilbeins sehr breit, die inneren schmal, Waldeyer's Form B. Grosses Hinterhauptsloch weit und gross, nach links etwas stärker ausgebuchtet.

Der Schädel ist dolichocephal, chamaecephal, das Obergesicht leptoprosop, chamäconch, leptorrhin, leptostaphylin.

Der Unterkiefer 14 a, welcher zu diesem Schädel nicht gehört, stimmt aber, wie gesagt, mit seinen Dimensionen und sonstigen Bauverhältnissen ziemlich gut zu demselben, sodass durch seine Hinzufügung zum Schädel dieser in annähernd richtiger Weise ergänzt wird. Dem Kiefer fehlen die beiden linken Prämolaren, die Alveolen derselben sind atrophirt. Der Alveolenfortsatz ist hoch, der Kinnvorsprung sehr markirt und vortrefflich menschlich ausgebildet. Der aufsteigende Ast ist rechts abgebrochen, links ganz erhalten, es ist breit und steil, 70°, am Winkel starkes Muskelrelief, etwas ausgebogen.

Mit dem Unterkiefer 14 a wird die Gesammt-Gesichtslänge von Schädel 4 (14) zu 114 ergänzt, Jochbreite ist 130, diese Zahlen ergeben als Gesichts-Index 91,77 = schmalgesichtig, leptoprosop.

Kleinste Stirnbreite 93, grösste 117, Stirnbogen 121 mm. Ganzer Sagittalbogen 369; Hinterhauptsbogen 121, davon Oberschuppe 77; Mittelhauptsbogen-Pfeilnaht 127 mm.

Digitized by Google

No. 5 (7). Längenbreiten-Index 73,54.

Männlicher Hirnschädel, schwer, fest. Sphenobasilarfuge verwachsen, aber alle Nähte offen. Rechts schwache rinnenförmige Stenokrotaphie. Stirn ziemlich gerade ansteigend. Augenbrauenbogen von innen bis zur Mitte des Augenhöhlenrandes gut entwickelt. Stirnhöcker schwach. Scheitel hoch gewölbt. Hinterhaupt etwas ausgezogen, beiderseits Spuren d. Sutura transvers. occ. foet. l. 28, r. 29 mm lang. Unregelmässiger breiter Hinterhauptshöcker. Muskelrelief des Hinterhaupts gut ausgebildet. Zitzenfortsätze mittelgross. Hinterhauptsloch weit und gross. Der Scheitelbogen 324 mm. Entfernung der unteren Schläfenlinien 110 mm, der obern cc. 90. Die Schläfenfläche ist also gross. Anfang der Schläfenlinie auf dem Stirnbein nicht besonders stark markirt. Stirnnasenfortsätze des Oberkiefers steil nach vorn aufgerichtet. Nasendach hoch, aquilin, die Nase tief eingesetzt. Die kleinste Stirnbreite 92, die grösste 118, der Stirnbogen 120 mm. Der ganze Sagittalbogen 382; Hinterhauptsbogen 128, davon Oberschuppe 85; Mittelhauptbogen-Pfeilnaht 130 mm.

No. 6 (8). Längenbreiten-Index 73,91.

Männlicher (?) Hirnschädel. Sagittalnaht ganz verwachsen, der Schädel zeigt mittleres Lebensalter. Die beiden Enden der Kranznähte beginnen zu verwachsen, alle sonstigen Nähte offen; Sphenobasilarfuge verwachsen. Stirn wenig zurückgebogen, Stirnnasenwulst mit schwachen Augenbrauenwulsten. Stirnhöcker fast fehlend. Schädelwölbung niedrig. Hinterhaupt etwas ausgezogen mit kräftigem Muskelrelief aber ganz kleinem Hinterhauptshöcker. Processus mastoideus gross; Ohröffnungen sehr weit, gerundet. Worm'sche oder andere Schaltknochen nicht vorhanden. Der Anfang der Schläfenlinie auf den Stirnbeinen schwach. Augenhöhlen mittelweit. Der Jochbeinkörper und sein Augenhöhlenfortsatz sind scharf nach hinten gewendet, der Unterrand des Jochbeins steht etwas weiter vor als der Oberrand, hierin an von Hölder's „Turanischen Typus" erinnernd. Der Jochbogen konvex ausgewölbt; trotzdem ist der Schädel kryptozyg. Die Nase ist nicht tief eingesetzt, die

Digitized by Google

Nasenbeine waren ersichtlich gross. Schläfengegend, namentlich links gut entwickelt, ausgewölbt, der grosse Keilbeinflügel breit und hoch. Das Hinterhauptsloch ist weit und gross.

Kleinste Stirnbreite 94, grösste 115, Stirnbogen 119; ganzer Sagittalbogen 360; Hinterhauptsbogen 119, davon Oberschuppe 70; Mittelhauptsbogen - Pfeilnaht 122 mm. Ganzer querer Scheitelbogen 300; Entfernung der oberen halbzirkelförmigen Linien über den Scheitel 100 mm.

No. 7 (20). Längenbreiten-Index 74,17.

Die Stirn des schweren aber etwas kleinen (weiblichen?) Schädeldaches ziemlich gerade ansteigend. Stirnhöcker deutlich. Scheitelkurve gut gewölbt. Mittleres Lebensalter, die Kranznaht beginnt beiderseits in den Temporalflächen zu verwachsen. Der Stirnnasenwulst stark, die Augenbrauenbogen schwächer vortretend. Die Bruchstücke der Nasenbeine deuten auf eine grosse aquiline, tief eingesetzte Nase. Das Hinterhaupt ist ausgezogen; kleiner Hinterhauptshöcker; starker Torus occipitalis. In der Lambdanaht 5 kleine Worm'sche Knochen. Bregma etwas eingezogen. Zitzenfortsatz verhältnissmässig klein. Schläfenflächen mässig gross. Beginn der Schläfenlinien am Stirnbein kräftig. Augenhöhlenfortsatz des Stirnbeins ziemlich lang. Rechts und links Spuren der Sutura transversa occipitalis fötalis; r. 17, l. 20 mm lang. Kleinste Stirnbreite 91, grösste 120, Stirnbogen 126; Mittelhauptsbogen-Pfeilnaht 132; Oberschuppe des Hinterhauptsbeins 65; ganzer querer Scheitelbogen 322, Entfernung der oberen halbzirkelförmigen Linien von einander 154.

No. 8 (23). Längenbreiten-Index 74,31.

Schädeldach, weiblich. Stirn mässig zurück geneigt. Der Stirnnasenwulst kräftig. Augenbrauenwulste schwach, Stirnhöcker angedeutet. Hinterhaupt ausgezogen. Nähte ohne Worm'sche Knochen. Die Schläfenenden der Kranznaht, die hintere Hälfte der Sagittal, die Spitze der Lambdanaht beginnen zu verschmelzen. Schläfenfläche mässig gross. Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein rel. schwach. Entfernung der oberen Schläfenlinien quer über den Scheitelbogen 100 mm.

Digitized by Google

Kleinste Stirnbreite 94, grösste 116, Stirnbogen 127; Mittelhauptsbogen-Pfeilnaht 120; Oberschuppe des Hinterhauptsbeins 62 mm. Muskelrelief am Hinterhauptsbein rel. schwach, kleiner Hinterhauptshöcker, rechts und links Reste der fötalen Hinterhauptsquernaht, r. 16, l. 12 mm. Die Sagittalnaht ist in ihrem hinteren Drittel etwas eingesunken, auf dem Scheitel in einer Erstreckung von c. 40 mm breit wulstig erhoben.

III. 8 Brachycephale Schädel.

No. 18 (13). Längenbreiten-Index 80,00.

Wohlgebildeter, grosser und schwerer männlicher Schädel mit vollkommen offener Stirnnaht; Unterkiefer fehlt. Alveolarfortsatz des Oberkiefers sehr kurz und z. Thl. schon senil geschwunden, die Hälfte der Alveolen schon verwachsen und verstrichen. Die seitlichen Anfangstheile der Sagittalnaht jederseits verwachsen auf eine Strecke von 30 Millimeter, ebenso die hintere Hälfte der Sagittalnaht und die mittlere Strecke der Lambdanaht, die anderen Nähte offen; ein Theil der Schädelbasis mit der Sphenobasilarfuge fehlt. Die Nähte sonst normal, nur in der Schläfenfontanellgegend beiderseits ein grosser Fontanellknochen, welcher aber das Scheitelbein nicht vollkommen vom grossen Keilbeinflügel abschneidet, resp. das Stirnbein nicht erreicht.

Die Form des Hirnschädels ist brachycephal (80,0), obwohl das Hinterhaupt etwas ausgezogen ist, die Stirn geht steil in die Höhe, die Augenbrauenwülste fehlen beinahe, sie treten nur in den mittleren Abschnitten schwach hervor; die Stirnhöcker sind deutlich, weniger die Scheitelbeinhöcker. Muskelrelief am Hinterhaupt stark ausgebildet, Hinterhauptshöcker gut markirt, Zitzenfortsätze mässig, Temporalflächen ziemlich gross, die unteren Schläfenlinien nähern sich über den Scheitel auf etwa 100 Millimeter, ganzer querer Sagittalbogen 332, die oberen Schläfenlinien sind undeutlich. Der Anfang der Schläfenlinien auf dem Stirnbein ist stark ausgeprägt und die Oberränder der Augenhöhlen dadurch vom Hirnschädel etwas ab-

Digitized by Google

gedrückt und der Augenhöhlenfortsatz des Stirnbeins ziemlich lang, indem die Schläfenfläche hinter die Augenhöhle seitlich eindringt. Schläfengegend trotz der Schaltknochen ziemlich gut gewölbt.

Kleinste Stirnbreite 101, grösste 135, Stirnbogen 123; ganzer Sagittalbogen 384; Hinterhauptsbogen 123, davon Oberschuppe 70; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 128 mm. Breite des Schädeldaches 117. Die Gaumen-Quernaht wenig von der geraden Linie, durch zwei kleine beiderseits neben der Längsnaht gelegene kleine Vorbuchtungen, abweichend, die Gaumenplatten der Gaumenbeine schmal, hinterer Nasenstachel gut entwickelt. Die Lamellen der flügelförmigen Fortsätze des Keilbeins haben Waldeyer's Form B, doch sind die inneren Lamellen, wenn auch kleiner als die äusseren, gut entwickelt, Flügelgrube tief.

No. 19 (24). Längenbreiten-Index 80,70.

Zerbrochener jugendlicher, wahrscheinlich weiblicher Schädel. Die Stirn exquisit den Typus der weiblichen süddeutschen Brachycephalie zeigend, mit flachem Stirnnasenwulst, der Nasenrücken gar nicht unter die Stirn eingezogen, starke Stirnhöcker, flache breite Scheitelwölbung, das Hinterhaupt ist aber etwas ausgezogen, nicht so flach wie gewöhnlich. Die Nähte sind alle offen, ohne alle Zwickelknochen; die Zähne wenig abgekaut, die Weisheitszähne vorhanden, der erste Molar entschieden der grösste; der Alveolarfortsatz relativ lang. Kleinste Stirnbreite 95, grösste 123. Temporalfläche klein. Foramen magnum eng, klein, oval 29 : 24. Muskelrelief am Hinterhaupt schwach, trotzdem ein deutlicher Torus occipitalis als weit verbreiteter Hinterhauptshöcker.

Die Form der Flügelfortsätze steht zwischen Waldeyer's Form A und C, auch die äusseren Lamellen sind relativ klein, Grube ziemlich seicht. Der Gaumen ist sehr tief, die quere Gaumennaht zeigt einen breiten, rechtwinkelig abgestutzten Processus interpalatinus anterior.

Die Gesichtsform ist schmal; die Wangenbeine und ihre Augenhöhlenfortsätze sind scharf nach hinten gebogen, doch ist der Unterrand der Wangenbeine etwas nach auswärts ge-

Digitized by Google

wendet. Die Nasenöffnung und die Nase sind schmal, lang, die Augenhöhlen rund, weit. Augenhöhlenindex 82,05, Nasenindex 42,85, Gaumenindex 74,46.

No. 20 (10). Längenbreiten-Index 81,86.

Grosse senescirende etwas weniger dickwandige männliche Schädelkapsel mit breitem flachem Hinterhaupt und breiter Scheitelwölbung, sonst aber weniger typisch für die süddeutsche Brachycephalie. Die Stirn ist weniger steil als bei letzterem Typus aufgerichtet, immerhin nicht fliehend und die Stirnhöcker sind deutlich; der Stirnnasenwulst kräftig und breit vorgebuchtet, die Augenbrauenwulste sind auf ihnen energisch ausgeprägt und bilden einen gut abgegrenzten Glabellarunterrand, sie fehlen aber nach dem ersten (inneren) Drittel der Augenhöhlenoberränder fast und in der äusseren Hälfte wirklich vollkommen. Die Nase ist ziemlich tief eingesetzt und war, nach den Resten zu urtheilen, gross und vorragend. Das Stirnbein hat einen schwachen Mittelgrat, auch die vordere Hälfte der Pfeilnaht ist stärker gratartig erhoben, besonders hoch in der Mitte. Auch die oberen Abschnitte der Lambdanaht-Ränder des Hinterhauptsbeins erheben sich etwas. Die Nähte sind aber sonst ganz normal ohne alle Zwickelknochen, die Temporalenden der Kranznaht sind verwachsen und verstrichen, ebenso ist die Sagittalnaht ganz und Lambdanaht zum Theil (oben rechts) verwachsen. Muskelrelief an der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins sehr kräftig, der Hinterhauptshöcker ist breit, nicht scharf begrenzt. Die Zitzenfortsätze sind sehr gross und breit. Das Hinterhauptsloch ist weit, oval 39 : 30. Schläfenflächen gross, Scheitelbogen 328, Entfernung der unteren Schläfenlinien 132, der oberen 120 über den Scheitel. Die Scheitelbeinhöcker sind etwas abgeflacht. Die kleinste Stirnbreite 95, grösste 112. Breite der Schädelbasis 125, Länge bis zum Foramen magnum 105. Gelenkfläche am linken (d. rechte fehlt) Schädelkondylus deutlich doppelt, in einen hinteren und vorderen Abschnitt durch eine scharfe gratartige Knickung getrennt.

Digitized by Google

No. 21 (11). Längenbreiten-Index 82,45.

Schädelkapsel, an der Basis defekt, weiblich, jugendlich, die Nähte sind alle offen, ohne irgenwelche Schaltknochen. Die Form ist typisch für die süddeutsche weibliche Brachycephalie. Die Stirn steigt senkrecht an, der Nasenwulst ist ganz verflacht, kaum angedeutet, der Naseneinsatz daher ganz hoch, gar nicht eingezogen. Die Scheitelkurve ist flach, breit, fast unter rechtem Winkel an die Stirnkurve sich anschliessend. Die Stirnhöcker und die Scheitelbeinhöcker sind stark hervortretend; die Stirn rel. schmal, die Scheitelbeinhöcker-Gegend viel breiter. Mittlere Stirnbreite 95, Scheitelbeinhöckerentfernung (gerade) 135. Kleinste Stirnbreite 88, grösste 111. Hinterhaupt breit gerundet. Der Zitzenfortsatz ist klein, niedrig; der Jochfortsatz der Schläfenschuppe angelegt. Der Oberrand der Augenhöhle kurz, stark convex gerundet. Das Muskelrelief am Hinterhaupt schwach ausgeprägt, ein Hinterhauptshöcker tritt nicht hervor. Ganzer Sagittalbogen 363, Stirnbogen 127, Hinterhauptsbogen 111, davon Oberschuppe 66, Mittelhauptsbogen 125 mm. Breite der Schädelbasis 94, der Hirnschädel ist bombenförmig über die rel. schmale Basis gewölbt.

No. 22 (16). Längenbreiten-Index 83,37.

Mittelgrosse, männliche, etwas zerbrochene Schädelkapsel von mittlerem Lebensalter, die Temporalenden der Kranznaht sind verwachsen, die übrigen Nähte noch offen, in der Mitte der Pfeilnaht beginnt die Verwachsung. Schaltknochen in den Nähten und Fontanellen fehlen. Sphenobasilarfuge verwachsen. Die Schädelkapsel zeigt die typischen Bildungen der süddeutschen Brachycephalie; die Stirn fast senkrecht ansteigend, die Stirnhöcker vorgewölbt, die Augenbrauenwülste schwach und abgeflacht, auch der Stirnnasenwulst wenig entwickelt. Die Scheitelwölbung ist flach und breit, das Hinterhaupt steil abfallend, breit gewölbt. Die Oberschuppe des Hinterhauptsbeins wird von der Unterschuppe durch eine flache Querrinne abgegrenzt, wodurch eine Art von Torus occipitalis entsteht. Das

Digitized by Google

Muskelrelief auf der Unterschuppe ist stark ausgebildet, der Hinterhauptshöcker fehlt jedoch. Zitzenfortsätze gross. Foramen magnum weit, oval 39 : 31. Schädelbasis-Breite 125, Länge 101, Sagittalbogen 325, Entfernung der unteren Schläfenlinien 150, die oberen sind ziemlich undeutlich, ihre Entfernung 130, die Schläfenflächen sind sonach klein; der Anfang der Schläfenlinien auf dem Stirnbein ist stark markirt und die umgrenzte Fläche entschieden abgeflacht. Kleinste Stirnbreite 98, grösste 125, Stirnbogen 120; ganzer Sagittalbogen 354; Hinterhauptsbogen 120, davon Oberschuppe 80; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 114, Breite der Schädelbasis 112 mm.

No. 23 (9). Längenbreiten-Index 84,18.

Nicht ganz vollständige Schädelkapsel eines grossen schweren männlichen Schädels von mittlerem Lebensalter, die beiden Enden der Kranznaht in den Temporalflächen verwachsen, die hintere Hälfte der Sagittalnaht zeigt beginnende Verwachsung. Worm'sche und andere Zwischennaht-Knochen fehlen. Die Schädelform zeigt die typische Gestalt der süddeutschen Brachycephalie: die Stirn fast senkrecht ansteigend, die Stirnhöcker ausgeprägt, die Unterstirn wenig vorgebuchtet, Augenbrauenwülste zeigen sich nur in der Mitte der Stirn schwach entwickelt. Scheitelwölbung breit und flach, Hinterhaupt steil abfallend, breit und flach gewölbt; das Muskelrelief am Hinterhaupt energisch, Hinterhauptshöcker breit, flach, flacher Torus occipitalis, welcher namentlich nach oben entschieden durch eine Quer-Rinne abgegrenzt ist; die Zitzenfortsätze sind mittelgross, die Temporalflächen relativ klein; der Scheitelbogen misst 327, der Abstand der unteren halbzirkelförmigen Linien über den Scheitel gemessen 160, der der oberen 133 mm. Der Beginn der unteren halbzirkelförmigen Schläfenlinien auf dem Stirnbein ist schwach ausgeprägt, es erscheint auf dem Stirnbein ganz besonders deutlich auch der Anfang (was sich übrigens mehr oder weniger deutlich bei allen Schädeln zeigt), der oberen halbzirkelförmigen Linie als nicht sich erhebende Grenzlinie einer glatten Bogenfläche über der unteren halbzirkelförmigen

Digitized by Google

Linie. Grösste Stirnbreite 130, kleinste 97, Stirnbogen c. 120; Mittelhauptsbogen 120, Oberschuppen-Bogen des Hinterhauptsbeins 85; Breite der Schädelbasis 100 mm.

No. 24 (33). Längenbreiten-Index 87,06.

Weiblicher kleiner Schädel mittleren Lebensalters. Rechts schwache rinnenförmige Stenocrotaphie, bei sehr breiter Ala magna o. sph., die Näthe sind alle gut entwickelt, ohne Worm'sche oder andere Zwischenknochen. Das Schläfenende der Kranznath verwachsen, die 3. Molaren schon verloren, die Alveolen derselben atrophirt; die 2. Molaren fast vollkommen nekrotisch zerstört; der erste Molar rechts gross, abgekaut, er ist nach den Alveolen weitaus grösser als der 2. Molar. Starker und sehr breiter, seitlich jedoch weniger abgegrenzter Gaumenwulst. Der Gaumen ist relativ schmal, die Gaumenbeinplatten klein mit breitem nach vorne abgerundetem Processus interpalatinus anterior. Die Stirn steigt steil an, mit grossen und breiten Stirnhöckern, schwach vortretendem, flachem, nur über der Nasenwurzel sich etwas wölbendem Stirn-Nasenwulst; auf dem Stirnfortsatz des Stirnbeins zeigt sich ein schwacher Stirnnathrest. Die Scheitelwölbung ist ziemlich flach und breit, gegen das Hinterhaupt scharf abfallend, die Scheitelbeinhöcker gut hervortretend. Das Gesicht ist schmal, trotzdem die Jochbeine mit dem unteren Rand etwas ausgelegt sind. Die Jochbogen sind angelegt, der Schädel ist kryptozyg. Die Muskelleisten sind schwach, der Zizenfortsatz klein. Die Temporalfläche klein. Die Augenhöhlen viereckig, mittelhoch; die Nase kurz und breit, der Nasenrücken wenig erhoben. Der Alveolarfortsatz kurz. Breite der Schädelbasis 100 mm. Der Schädel ist chamäconch, platyrrhin- zu mesorrhin; leptostaphylin- zu mesostaphylin.

Jochbreite c. 120; Ober-Gesichtsbreite nach Virchow 93; nach v. Hölder 108. Ober-Gesichtshöhe 61. Das Gesicht gut modellirt. Stirnbogen 120; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 120. Kleinste Stirnbreite 91, grösste 110. Die Flügelfortsätze des Keilbeins Form B nach Waldeyer.

Digitized by Google

No. 25 (32). Längenbreiten-Index 88,63.

Grosser weiblicher zerbrochener Schädel. Die Stirn ist steil ansteigend, die Stirnhöcker sind gross und breit, die Unterstirn ist flach und zeigt nur einen ganz schwachen und wenig abgegrenzten Stirnnasenwulst; auf dem Nasenfortsatz des Stirnbeins ein schwacher Stirnnaht-Rest. Die Scheitelwölbung ist flach, breit, rasch vom Scheitel gegen das Hinterhaupt abfallend. Die Nähte sind alle normal, ohne Worm'sche und andere Zwischenknochen; die Sagittalnaht ist in ihrem zweiten Drittel verwachsen. Das Lebensalter war ein mittleres, die beiden 3. Molaren sind schon ausgefallen und ihre Alveolen atrophirt, ebenso die Alveole des 2. Molar rechts; alle Zähne sind tief abgekaut. Die Augenhöhleneingänge sind etwas viereckig, aber hoch und weit. Die Nase ist breit und rel. kurz, das Nasendach wenig vorstehend mit etwas flachliegenden Stirnnasenfortsätzen der Oberkiefer. Die Nasenbeine sind breit, die Nasenwurzel etwas eingedrückt. Der Nasenstachel ist klein, der Unterrand der Nasenöffnung erscheint schwach abgerundet. Der Jochbeinkörper ist nicht sehr scharf zurückgebogen, ebenso dessen Augenhöhlenfortsatz, trotzdem ist das Gesicht schmal. Der Alveolarfortsatz des Oberkiefers ist kurz, der Gaumen ziemlich breit, mit starkem Gaumenwulst, die Gaumenplatten der Gaumenbeine klein mit breitem rechtwinkeligen Proc. interpalatinus anterior. Die Schläfenflächen sind klein.

Der Schädel ist hypsiconch, platyrrhin, brachystaphylin. Seine kleinste Stirnbreite beträgt 97, grösste 121; Stirnbogen 130; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 130; Virchows Obergesichtsbreite 93; Obergesichtshöhe 61. Das Gesicht ist etwas flach, weniger modellirt.

II. 9 Mesocephale Schädel.

No. 9 (5). Längenbreiten-Index 75,91.

Schwerer grosser männlicher Schädel. Der Vorderkopf erscheint typisch süddeutsch männlich-brachycephal; der Hinterkopf ist vom Scheitel an verschmälert und das Hinterhaupt nach hinten stark pyramidal ausgezogen. Die Stirn steigt

Digitized by Google

gerade an, mit hervortretenden Stirnhöckern; die Unterstirn ist wenig vorgebuchtet, Augenbrauenbogen nur an der Glabella markirt, sonst fehlend. Die Nase ist wenig tief eingesetzt. Die Scheitelbeinhöcker sind flach und verstrichen, die oberen Schläfenlinien gehen über sie weg. Die unteren Schläfenlinien sind stark ausgeprägt. Die Scheitelcurve misst 325, die Entfernung der unteren Schläfenlinien 165, der oberen 140. Das Muskelrelief am Hinterhaupt ist sehr ausgebildet, doch fehlt der Hinterhauptshöcker. Die Zitzenfortsätze sind gross und breit. Die Breite der Schädelbasis beträgt 125, die Anfänge der Schläfenlinien am Stirnbein wenig scharf, die darunter liegende Fläche ziemlich gewölbt, wenig abgeflacht und wenig gegen die Augenhöhle vordringend. Die kleinste Stirnbreite 96, die grösste 125. Die Nähte sind ganz normal ohne Schaltknochen; die Schläfenenden der Kranznaht und die hintere Hälfte der Pfeilnaht beginnen zu verwachsen. Der Schädel ist kryptozyg. Der ganze Sagittalbogen misst 380, der Stirnbogen 130, der Hinterhauptsbogen c. 120, davon Oberschuppe 76, die Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 130 mm.

No. 10 (4). Längenbreiten-Index 77,12.

Mächtiger männlicher, sehr schwerer Hirnschädel mit vollkommener Stirnnaht.

Der Typus entspricht der süddeutschen männlichen Brachycephalie, nur ist der Hinterkopf verschmälert und pyramidal ausgezogen — auch dieser Schädel ist also vorne brachycephal, von dem Scheitel an dolichocephal. Die Nähte sonst, abgesehen von der Stirnnaht, normal: Kranznaht, Pfeilnaht, Lambdanaht, ohne Worm'sche oder sonstige Zwickelknochen. Dagegen zeigt die Schläfenschuppe eine mächtige Vergrösserung namentlich nach vorne, sodass sie in breiter Fläche das Stirnbein berührt, beiderseits 15 mm Berührungslinie, aber ohne Bildung eines eigentlichen Stirnfortsatzes des Schläfenbeins. Die Schläfenschuppe ist 75 mm lang, 47 hoch; dagegen ist der grosse Keilbeinflügel entsprechend klein und schmal, tief rinnenartig concav gewölbt (Stenocrotaphie) und gleichsam nach vorwärts geschoben. Das Alter wird bestimmt durch die

Digitized by Google

Verwachsung der Sphenobasilarfuge, sonst sind alle Nähte trotz der mächtigen Entwickelung des Schädels offen. Die Stirn ist breit, steil ansteigend, die Unterstirn kaum vorgebuchtet, in der Mitte tief rinnenartig (durch die Stirnnaht) eingezogen; schwache Augenbrauenbogen finden sich in der Nähe der Glabella, sonst fehlen sie. Die Stirnhöcker sind deutlich; die Scheitelwölbung ist flach und breit, vom Scheitel an gerundet abfallend; Scheitelbeinhöcker fehlen so gut wie ganz; auch hier gehen die oberen Schläfenlinien weit über ihnen weg und sind stark markirt. Der Scheitelbogen misst 307, die Entfernung der unteren Schläfenlinien 127, der oberen 117, die Entfernung der oberen von der unteren ist gering. Das Muskelrelief am Hinterhaupt ist schwach. Ein Hinterhauptshöcker fehlt, statt dessen ein Torus occipitalis. Zitzenfortsätze sind gross und breit. Die Breite der Schädelbasis ist 130, Länge 96. Das Hinterhauptsloch ist kolossal, 43 : 33. Die Schläfenflächen sind nach den obigen Massen gross; der Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein ist stark ausgeprägt, die Fläche darunter ist flach vertieft, stark gegen die Augenhöhle vordringend. Die Nasenwurzel erscheint wenig tief eingesetzt, die Nase war nach den Resten zu urtheilen, gross und breit, convex gewölbt. Die kleinste Stirnbreite ist 100, grösste 131. Der Schädel ist kryptozyg. Der ganze Sagittalbogen misst 379; der Stirnbogen 132, der Hinterhauptsbogen 122, davon die Oberschuppe 80, die Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 125 mm.

No. 11 (21). Längenbreiten-Index 77,20.

Mächtiges, schweres männliches Schädeldach. Mischform. Die Stirnbildung nähert sich der süddeutschen männlichen Brachycephalie, das Hinterhaupt ist dagegen vom Scheitel an stark verlängert; diese starke Verlängerung ist aber grossentheils verursacht durch die zahlreichen Worm'schen Knochen, welche die Lambdanaht in einer in der Mittelpartie 30 mm breiten Zone doppelt erscheinen lassen. Die Stirne ist gerade ansteigend, die Stirnhöcker ausgeprägt, dagegen die Scheitelbeinhöcker verstrichen, ganz unkenntlich, die oberen Schläfen-

Digitized by Google

linien gehen hoch über ihnen weg. Die unteren Schläfenlinien sind sehr stark ausgeprägt, indem unter ihnen die Temporalfläche sich etwas hervorbuchtet, die Entfernung der unteren und oberen Schläfenlinien ist sehr gross, etwa 30 mm, dadurch wird die Schläfenfläche sehr vergrössert: Scheitelbogen von einem Ohrloch zum anderen 320, Entfernung der unteren Schläfenlinien von einander über den Scheitel gemessen 150, der oberen nur 74 mm. Muskelrelief am Hinterhaupt stark, minimaler Hinterhauptshöcker aber Torus occipitalis durch starkes Absetzen der Unterschuppe von der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins verstärkt. Zitzenfortsatz klein, gegen die Spitze stark zapfenartig verschmälert. Nähte sonst normal, senescirende Verwachsung an den Temporalenden der Kranznaht und der hinteren Hälfte der Pfeilnaht. Beginn der Schläfenlinien auf dem Stirnbein stark ausgeprägt, die darunter liegende Fläche stark flach, gegen die Augenhöhlen eingebuchtet. Das Stirnbein hat eine schwache, flachgewölbte Mittelkrista. Schädel kryptozyg. Kleinste Stirnbreite 96, grösste 124. Der ganze Sagittalbogen misst 382; der Stirnbogen 134; der Hinterhauptsbogen 140, davon die Oberschuppe 85!; die Mittelhauptsbogen - Pfeilnaht misst nur 108! mm. Der sagittale Mittelhauptsbogen, die Pfeilnaht, ist durch die starke Ausbildung der Worm'schen Knochen, namentlich an der Spitze der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins bedeutend verkürzt, der Hinterhauptsbogen resp. der Oberschuppen-Abschnitt desselben, entsprechend vergrössert. Zwei direkt an den Enden der Sagittalnaht anliegende, gleichsam die Spitze der Oberschuppe bildende, „Worm'sche Knochen" sind besonders gross und annähernd unregelmässig dreieckig gestaltet, mit der Spitze nach oben, mit der Basis nach unten und hinten gewendet, es sind „unregelmässige Spitzenknochen" der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins.

No. 12 (18). Längenbreiten-Index 77,29.

Schweres männliches Schädeldach mit geradansteigender Stirn, stark vortretenden Stirnhöckern, ohne Augenbrauenbogen. Die kleinste Stirnbreite misst 94, die grösste 123, der Stirn-

Digitized by Google

bogen 122. Die Scheitelwölbung ist hoch, die Scheitelbeinhöcker etwas abgeflacht, die obere halbzirkelförmige Linie lauft über die Mitte der letzteren hin. Der ganze quere Scheitelbogen misst 334, der Abstand der oberen halbzirkelförmigen Schläfenlinien 188 mm. Das Hinterhaupt ist ziemlich stark ausgezogen, verlängert. Das Muskelrelief am Hinterhauptsbein ist stark, aber ein äusserer Hinterhauptshöcker fehlt, dafür ein breiter, gut hervortretender Torus occipitalis. Der Zitzenfortsatz gross, sehr tief gespalten. Die Schläfenflächen gross, ihr Anfang am Stirnbein und die obere halbzirkelförmige Linie energisch hervortretend. Die Nähte sind normal ausgebildet, ohne Zwickelknochen. Die Schläfenenden der Kranznaht und das hintere Drittel der Pfeilnaht sind verwachsen. Das betreffende Individuum stand sonach wohl schon im späteren Lebensalter. Der Vorder- bis Mittelkopf sind wieder typisch für die süddeutsche Brachycephalie, das Hinterhaupt ist dagegen dolichocephal verlängert. Die Oberränder der Augenhöhlen sind etwas gerundet, die Nasenbeine waren gross, der Nasenrücken sehr stark hervortretend, die Stirn-Nasenfortsätze des (l.) Oberkiefers steil nach vorne aufgerichtet, trotzdem ist der adlernasenartig gekrümmte Nasenrücken breit, die Nasenwurzel setzt sich frei unter der Stirn an. Der ganze Sagitallbogen misst 372, Stirnbogen 122; Hinterhauptsbogen 125, davon Oberschuppen 85; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 124; Breite der Schädelbasis 96 mm.

No. 13 (3). Längenbreiten-Index 77,77.

Weibliches (?) Schädeldach. Die Schädeldachbildung und Stirnbildung sind im Allgemeinen wie bei den weiblichen Dolichocephalen, die Stirn nur etwas senkrechter ansteigend, die Unterstirn ist vorgebuchtet, sowohl als Stirnnasenwulst wie als Augenbrauenbogen, welche von der Mitte der Ober-Augenhöhlenränder an nach aussen verlaufen und verschwinden; der Stirnnasenwulst zeigt keine mittlere Eintiefung. Die Nasenwurzel ist dem Gesagten entsprechend tief eingesetzt, von der Unterstirn weit überdacht. Die Stirnhöcker sind verstrichen, undeutlich. Die Scheitelwölbung flach, breit, nach hinten

Digitized by Google

zuerst rasch abfallend, dann wieder etwas ausgezogen. Das Muskelansatzrelief an der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins tritt markirt hervor mit einem gut abgegrenzten Torus occipitalis, darunter ein gering vortretender Hinterhauptshöcker. Die Scheitelbeinhöcker sind vortretend, die Schläfenflächen mittelgross; die oberen Schläfenlinien verlaufen unter den Scheitelbeinhöckern. Die Anfänge der unteren Schläfenlinien auf dem Stirnbein erscheinen wenig hervortretend, trotzdem ist die darunterliegende Fläche entschieden abgeflacht; gleichsam hinter die Augenhöhlen eingedrückt. Die kleinste Stirnbreite beträgt 90, die grösste 122 mm. Die Nähte sind meistens noch offen, nur die Temporalenden der Kranznaht sind verwachsen, ebenso auch die Naht zwischen Stirnbein und grossem Keilbeinflügel; der Schädel gehörte sonach einer Person mittleren Alters. In der linken Hälfte der stark gezackten Lambdanaht, in der Mitte, ein grösserer Worm'scher Knochen; zwischen Ober- und Unterschuppe des Hinterhauptsbeins persistirt ein langer (34 mm) Rest der queren fötalen Hinterhauptsnaht. Der sagittale Stirnbogen misst 125, die Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 126, der Bogen der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins 70 mm.

No. 14 (1). Längenbreiten-Index 78,19.

Grosser schwerer zerbrochener männlicher Schädel, es fehlt die rechte Gesichtshälfte und der Unterkiefer, auch sonst finden sich Defekte. Mittleres Lebensalter, Sphenobasilarfuge verwachsen, ebenso die Temporalenenden der Kranznaht, die übrigen Nähte sind offen und normal, keine Worm'schen oder sonstigen Zwickelknochen, die Zahnalveolen sind meist senil verwachsen. Bezüglich der allgemeinen Form des Schädels gilt fast wörtlich alles was über No. 15 (19) zu sagen ist. Der Schädel erscheint fast als genauer Typus der süddeutschen männlichen Brachycephalie, nur ist die Schädellänge vergrössert durch ein breit-pyramidales Ausziehen der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins, auch die Scheitelbeinhöcker sind schon etwas (ähnlich wie bei dolichocephalen Schädeln) verschliffen und unkenntlich. Die Stirn ist breit, schwach nach hinten geneigt,

Digitized by Google

Stirnhöcker deutlich, Augenbrauenbogen flach nur in ihren inneren Abschnitten sich etwas mehr erhebend, daher die Nasenwurzel wenig tief eingesetzt. Die Scheitelwölbung ist flach und breit, von der Scheitelerhebung an senkt sie sich rasch nach abwärts, wendet sich aber an der Lambdanaht wieder, dem ausgezogenen Hinterhaupt entsprechend, nach hinten. Das Muskelansatz-Relief an der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins ist mächtig ausgebildet, der Hinterhauptshöcker bildet einen langen (23 mm), schmalen (7 mm) nach unten spitz gerundet zugehenden, schwanzartigen Anhang, welcher 7 mm frei als „Knochenschwanz" hervorragt, eine überraschende und sehr seltene Bildung. Die Zitzenfortsätze sind extrem gross und breit. Die Breite der Schädelbasis misst 130, die Länge 107. Das Foramen magnum erscheint relativ eng und klein für den gewaltigen Hirnschädel (30 : 25). Die Schläfenflächen sind gross; der quere Scheitelbogen misst von einem Ohrloch zum anderen 310, die Entfernung der unteren Schläfenlinien, wie immer über den Scheitel gemessen, 160, die der oberen 125 mm. Der Anfang der Schläfenlinien auf dem Stirnbein tritt stark markirt hervor, die von diesem Stirnabschnitt der Schläfenlinien begrenzte Stirnbein-Schläfenfläche ist stark abgeflacht, hinter die Augenhöhlen eindringend. Die Nase ist gross, stark vorragend, ihr Rücken convex. Die Augenhöhlen sind mässig hoch, etwas viereckig. Der Oberkiefer ist gut modellirt; die Stirn-Augenhöhlenfortsätze sind stark nach vorwärts aufgerichtet, wodurch das Nasendach entsprechend steil und vorgeschoben wird. Der Alveolarfortsatz ist mässig lang, der einzige erhaltene Zahn, Prämolar 2 links, stark abgerieben, klein. Der erste Prämolar und die beiden hinteren Molaren waren schon während des Lebens verloren gegangen. Das Jochbein wendet den Unterrand etwas stärker nach aussen, auch der Augenhöhlenfortsatz desselben steht etwas weniger scharf nach hinten gewendet, also etwas schief nach aussen. Der Jochbogen ist aber trotzdem eng, der Schädel kryptozyg.

Mit der Abflachung der Scheitelbeinhöcker correspondirt

Digitized by Google

eine besondere Bildung der oberen Schläfenlinien. Sie erstrecken sich von der Scheitelhöhe des Schädels an als leistenartige Erhebungen, fast parallel gegen die Lambdanaht verlaufend, mit der Annäherung an diese immer stärker hervortretend, und endigen an der Lambdanaht einen nach unten convexen Endbogen bildend; sonach ist ihr Verlauf in dieser Strecke direkt entgegengesetzt wie der Verlauf der hinteren Enden der unteren Schläfenlinien, welche nach oben convex in die hintere, nach hinten convex aufsteigende Temporalleiste, die Fortsetzung des oberen Jochbogen-Randes auf das Schläfenbein (Grenzleiste zwischen Schläfenschuppe und Mastoideal-Theil des Schläfenbeins), verläuft. Die oberen Schläfenlinien laufen fast 20 mm über dem Scheitelbeinhöcker, so dass es aussieht, als wäre dieser unter der Einwirkung eines von aussen her wirkenden Druckes (Zug der M. Temporalis?) abgeflacht worden. Bei No. 15 (19) ist das Verhältniss ähnlich aber weniger stark ausgeprägt, auch bei No. 15 (19) erreicht die obere Schläfenlinie die Mitte der Scheitelbeinhöcker. Der ganze Sagittalbogen misst 382, der Stirnbogen 125; der Hinterhauptsbogen 124, davon die Oberschuppe 72; der Mittelhauptsbogen 133; die Jochbreite betrug c. 148, die Gesichtshöhe c. 72 mm.

No. 15 (19). Längenbreiten-Index 78,21.

Grosser, schwerer männlicher, etwas defekter Hirnschädel mit rechtem Jochbogen, senescirend, die Temporalenden der Kranznaht und die hintere Hälfte der Sagittalnaht sind verwachsen. Die Nähte sind normal, nur in der Lambdanaht sind wenige kleine Worm'sche Knochen. Die Gesammt-Schädelform entspricht der süddeutschen (männlichen) Brachycephalie, nur wird der Schädel durch eine spitz-pyramidal-ausgezogene Oberschuppe des Hinterhauptsbeins zur Mesocephalie verlängert. Die Stirn ist breit, steil ansteigend, mit starken Stirnhöckern, die Stirnkurve geht in die Scheitelkurve fast rechtwinkelig über. Die Unterstirn ist nur sehr schwach vorgewölbt, in der Mitte so gut wie gar nicht, die Augenbrauenwülste sind nur in ihrer inneren Hälfte angedeutet. Die Scheitelwölbung ist

Digitized by Google

flach, breit, am Hinterhaupt anfänglich rasch abfallend, dann sich wieder nach hinten ausbiegend. Das Muskelrelief aus der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins erscheint sehr kräftig, Ober- und Unterschuppe sind scharf durch eine breite Querrinne von einander abgesetzt, ein Hinterhauptshöcker fehlt. Der Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein ist wenig markirt, die Schläfenflächen sind mittelgross; Scheitelbogen 315, Entfernung der unteren Schläfenlinien 165, der oberen (ebenda) 145 (nach vorne rücken sie stets näher zusammen). Die Zitzenfortsätze sind gross und breit. Die Breite der Schädelbasis 126, Länge 100. Der Schädel ist kryptozyg, der Jochbogen angelegt, der Jochbein-Unterrand schwach nach aufwärts und nach aussen gebogen; das Jochbein ist nicht ganz scharf nach hinten gewendet. Die Augenhöhlen waren relativ niedrig, zur viereckigen Form neigend. Stirnbogen 124; Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 122, Oberschuppenbogen 70 mm.

No. 16 (2). Längenbreiten-Index 78,45.

Grosses, schweres sehr kräftiges männliches Schädeldach noch jüngeren Alters, da alle Schädeldachnähte noch offen sind. Der Schädel bietet im Vorderkopf die typischen Eigenschaften der süddeutschen männlichen Brachycephalie. Die Stirn fast senkrecht ansteigend, die Augenbrauenwülste nur angedeutet, die Unterstirn kaum bemerkbar vorgewölbt, die Nasenwurzel daher frei, kaum eingezogen. Die Scheitelwölbung ist flach, breit, am Scheitel rasch abbiegend, das Hinterhaupt selbst aber ist verschmälert und breit-pyramidal ausgezogen. Die Nähte sind vollkommen normal, nur rechts zeigt sich ein Rest, 15 mm, der queren fötalen Hinterhauptsnaht. Der Zitzenfortsatz ist gross und breit. Die Stirnhöcker sind deutlich, die Scheitelbeinhöcker abgerundet. Der Hinterkopf ist dem dolichocephalen Typus ähnlich geformt. Rechts zeigt sich schwache rinnenförmige Stenocrotaphie. Der quere Scheitelbogen vom Ohrloch beginnend misst 336, die Entfernung der oberen Schläfenlinien 134, die Schläfenfläche ist sonach mässig gross. Der Beginn der halbzirkelförmigen Schläfenlinien auf dem Stirnbein ist kaum angedeutet, ganz verschliffen zu einer rel. breiten Wöl-

Digitized by Google

bung. Die kleinste Stirnbreite misst 97, die grösste 124, der Stirnbogen 126, die Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 135, der Oberschuppenbogen des Hinterhauptsbeins 70. An der Hinterhauptsschuppe zeigt sich nur ein minimaler äusserer Hinterhauptshöcker dagegen ein breiter aber schlecht begrenzter Torus occipitalis, das Muskelrelief ist hier überhaupt ziemlich schwach.

No. 17 (15). Längenbreiten-Index 79,77.

Jugendlicher, ziemlich kleiner, aber doch wohl männlicher Schädel, die Weisheitszähne sind schon durchgebrochen und fertig entwickelt; die Sphenobasilarfuge ist verwachsen, die Nähte aber alle noch offen und vollkommen normal, keine Worm'schen oder sonstige Zwischenknochen oder fötale Nahtreste; die Schläfen sind gut ausgewölbt, kein Zahn hat im Leben im Oberkiefer gefehlt.

Der Hirnschädel zeigt in seinen vorderen Abschnitten aber namentlich an der Stirn die Bildung der Dolichocephalen des Lindauer Beinhauses. Die Stirn ist nach hinten geneigt, die Stirnhöcker sind undeutlich, das Stirnbein hat in seiner oberen Hälfte eine schwach gewölbte Crista, die Augenbrauenwülste sind in ihrer inneren Hälfte gut entwickelt; über der Nase wölbt sich die Unterstirn nicht unbeträchtlich aus, sodass die Nasenwurzel ziemlich tief eingesetzt erscheint. Die Scheitelcurve ist bis zur Verbindungslinie der deutlich hervortretenden Scheitelbeinhöcker flach, von hier geht sie rasch und steil nach abwärts; das Hinterhaupt ist breit gerundet. Der Vorderkopf dieses Schädels erscheint sonach typisch dolichocephal, der Hinterkopf dagegen typisch brachycephal. Das Muskelrelief aus der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins ist unbedeutend, der Hinterhauptshöcker fehlt so gut wie ganz; die Muskelfläche an der unteren Grenze der Unterschuppe ist scharf, kantenartig gegen die Oberschuppe abgesetzt. Die Zitzenfortsätze sind mittelgross, ebenso die Temporalflächen; der Scheitelbogen misst 300, der Abstand der unteren Schläfenlinien 125, der oberen 105, der Abstand der unteren und oberen Linien sonach 20 mm breit. Der Anfang der halbzirkelförmigen Linien am Schläfenbein — wie bei den Dolichocephalen — schwach markirt,

Digitized by Google

die kleinste Stirnbreite beträgt 92, die grösste 119. Die Breite der Schädelbasis 123, Länge 100 mm. Der ganze Sagittalbogen misst 347, der Stirnbogen 117, der Hinterhauptsbogen 110, die Mittelhauptsbogen = Pfeilnaht 120 mm.

Der Gesichtsschädel (Obergesicht) schmal, sehr stark profilirt, die Stirnnasenfortsätze der Oberkiefer steil nach vorwärts gerichtet, dadurch ist das mächtige Nasendach stark hervorgetrieben, die Nasenbeine sind gross, der Nasenrücken hoch aber doch kräftig, die Nasenbeine sind auch oben noch breit, der Nasenrücken ist stark convex, aquilin gebogen, die Nase war offenbar im Leben gross und sehr gut gebaut. Die Nasenöffnung ist ziemlich schmal, Ulmenblatt-förmig, der Nasenstachel stark und breit; der Unterrand der Nasenöffnung erscheint beiderseits scharf gerandet, anthropin. Die Augenhöhlen sind rund, weit und tief. Die Jochbeine sind im Ganzen und mit ihren Augenhöhlenfortsätzen schwach nach hinten gewendet, die Jochbogen sind nur schwach convex ausgebogen, der Schädel kryptozyg. Der Alveolarfortsatz ist kurz, rechts sind die zwei Prämolaren und der erste Molar erhalten, wenig abgerieben, von mittlerer Grösse. Die mittlere Stirnbreite, in der Höhe der Scheitelbeinhöcker beträgt 98, der Abstand der Scheitelbeinhöcker 131. Der Gaumen ist mässig tief, die Quernaht verläuft annähernd geradlinig und rechtwinkelig auf die Längsnaht. Die Hinterhauptsansicht ist fünfseitig mit etwas gerundeten Grenzlinien und oberen Seitenecken. Der Schädel ist mesocephal, hypsicephal, leptoprosop, hypsiconch, leptorrhin.

Hier sei noch angereiht das zerbrochene Schädeldach:

No. 36 (22). Dasselbe liess keine exacte Messung zu, scheint aber in seinem ganzen Verhalten zur mesocephalen Gruppe zu gehören. Stirnbein, Seitenwandbein und ein Theil des Hinterhauptsbeins sind vorhanden. Die Stirn ist niedrig, an jene des weiblichen dolichocephalen Typus erinnernd, wenig nach hinten geneigt, Unterstirn kaum vorgewölbt, Augenbrauenbogen elegant und zart, Nasenwurzel frei, nicht eingezogen, Stirnhöcker deutlich, ebenso die Scheitelbeinhöcker, wenn auch schwach, über ihre Mitte läuft die stark markirte obere

Digitized by Google

und sehr nahe darunter die untere Schläfenlinie hin. Schläfenflächen mittelgross, der Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein stark aber fein ausgeprägt. Hinterhaupt ausgezogen, eine wulstige Vorwölbung zwischen Ober- und Unterschuppe, welch letztere gegen einander stark abgeknickt erscheinen, stellt eine Art von Torus occipitalis da, Muskelrelief am Hinterkopf sonst schwach. Die Schläfenenden der Kranznaht verwachsen, auch die übrigen Nähte und Nahtstrecken zeigen beginnende Verwachsung, das Alter war sonach schon senescirend. Kleinste Stirnbreite 96, grösste 125 mm, Oberränder der Augenhöhlen gerundet.

C. Einzelbeschreibung der Schädelmasken.

(Schädel-Maske = Mittelgesicht mit Stirnbein.)

No. 26 (24). Weiblich; der Weisheitszahn ist schon voll entwickelt, trotzdem ist das Aussehen des Schädels jugendlich. Die Stirn ist niedrig, schmal, gerade ansteigend, ohne Augenbrauenbogen; die Nase setzt sich ganz frei an die Unterstirn an. Die Augenhöhlen sind hypsiconch, die Nase mesorrhin, der Unterrand der Nasenöffnung ist scharf, exquisit anthropin; der Nasenrücken war gerade und gut erhaben. Der Alveolarfortsatz ist ziemlich kurz. Die kleinste Stirnbreite 84, die grösste 112 mm. Das Gesicht ist sehr gut modellirt, die Jochbeine angelegt. Der Gaumen zeigt einen breiten Gaumenwulst und Processus interpalatinus a . . Gesichtsbreite nach Virchow 83 mm, Gesichtsbreite nach v. Hölder 103 mm. Obergesichtshöhe 59, Stirnbogen 120. Der Schädel gehörte wahrscheinlich zur weiblichen dolichocephalen Form (eventuell mesocephal). Ein eigentlicher hinterer Nasenstachel fehlt. Die Anfänge der Schläfenlinien sind schwach, die Fläche darunter ausgewölbt.

No. 27 (25). Weiblich; der Weisheitszahn jederseits voll entwickelt, rechts sind die 3 Molaren vorhanden, der erste (vorderste) ist entschieden der grösste, dann folgt der 2. und der 3. Bei No. 26 (24) fehlen die 3 Molaren, die zweiten waren aber auch kleiner als die vordersten. No. 27 (25) sieht No. 26 (24) sehr

Digitized by Google

ähnlich, ist aber im Ganzen kräftiger und erscheint weniger jugendlich, obwohl an ihm wie an No. 26 (24) die Zähne noch wenig abgenützt sind. Die Stirn ist gerade ansteigend, die Stirnhöcker sind sehr ausgeprägt; die Unterstirn zeigt schwächste flache Andeutungen der Augenbrauenbogen in der Nachbarschaft der Glabella. Der Nasenfortsatz des Stirnbeins besitzt einen Rest der Stirnnaht. Die Augenhöhlen sind hoch und gerundet; die Nase lang und schmal mit schwachen Pränasal-Gruben; die Nasenwurzel ist frei angesetzt, das Nasendach elegant geformt, der Nasenrücken gerade mit ganz geringer Convexität. Das Gesicht ist stark modellirt, schmal, der Alveolarfortsatz kurz, die Jochbeine angelegt. Gesichtsbreite nach Virchow 84, nach von Hölder 103, Obergesichtshöhe 66. Stirnbreite kleinste 88, grösste 115, Stirnbogen 120. Der Gaumen ist tief, ziemlich schmal, der hintere Nasenstachel klein. Das Gesicht ist hypsiconch, leptorrhin, leptostaphylin, an der Grenze von mesostaphylin. Die Gesammtform nähert sich der weiblichen dolichocephalen.

No. 28 (26). Männliche, schwere Maske, die Keilbein-Scheitelnaht und die Keilbein-Stirnbeinnaht sind in den Schläfen verwachsen, auch die Mitte der Kranznaht, dagegen ist rechts (links fehlt) das Schläfenflächenende der Kranznaht offen bei starker rinnenförmiger Stenocrotaphie. Ein seniler Schwund des Alveolarfortsatzes beginnt erst an den letzten Molaren, sonst waren die Zähne alle noch erhalten. Die Stirn ist breit, steil ansteigend, die Stirnhöcker sehr ausgeprägt, die Stirnnasenwulst vortretend, nur auf diesem zeigen sich schwach erhabene flache Augenbrauenbogen, welche sonst auf $^2/_3$ des oberen Augenhöhlenrandes fehlen. Die Nasenwurzel ist ziemlich tief eingesetzt. Die Augenhöhlen neigen zur viereckigen Form; die Nase ist lang aber unten ziemlich breit, der Nasenrücken oben ziemlich schmal und niedrig, dann erhebt er sich convex und wird breiter; der vordere Nasenstachel ist stark. Das Gesicht erscheint im Ganzen etwas flach, breit, die Jochbeine breit ausgelegt, auch die Augenhöhlenfortsätze stehen mehr schief nach aussen als nach hinten, der (rechte) Jochbogen ist energisch

Digitized by Google

gewölbt, der Alveolarfortsatz kurz, der Gaumen gross mit breitem Gaumenwulst. Stirnbogen 130, kleinste Stirnbreite 96, grösste 144 (halbgemessen 77). Gesichtsbreite nach Virchow 102, von Hölder 120, Obergesichtshöhe 73.

Der Schädel gehört nach seinem Gesicht dem männlichen brachycephalen (v. Hölder's turanischem) Typus an, er war aber wohl mesocephal, da die Schläfenflächen offenbar sehr gross waren.

No. 29 (27). Stark zerbrochen, weiblich (?) Die Stirn ist gerade ansteigend, die Stirnhöcker treten hervor, dagegen ist die Unterstirn nur sehr schwach flach hervorgewölbt, Augenbrauenbogen fehlen so gut wie ganz. Die Augenhöhlen sind gross, gerundet; die Nase ist mässig lang aber schmal, der vordere Nasenstachel gross, der Unterrand der Nasenöffnung abgerundet. Das Gesicht ist stark modellirt (Fossa canina tief), kleinste Stirnbreite 90, Gesichtsbreite nach Virchow 85, Obergesichtshöhe 70. Der kräftige und lange Alveolarfortsatz und der sehr tiefe Gaumen machen einen männlichen Eindruck, während die Stirnform weiblich ist. Der Weisheitszahn war schon voll entwickelt, nach den Alveolen zu schliessen war der 1. Molar der grösste, alle Alveolen sehr gut erhalten, kein Zahn fehlte. Der Gaumen besass einen starken Torus palatinus. Die Maske ist leptorrhin, leptostaphylin; sie gehört zur weiblichen dolichocephalen Form.

No. 30 (24). Wahrscheinlich weiblich. Die Stirn ist steil, mit starken Stirnhöckern aber ohne Augenbrauenbogen und mit annähernd rechtwinkeligem Uebergang der Stirn in die Scheitelcurve, die Hinterhauptscurve ist abfallend vom Scheitel an. Die Nähte sind am Schädel alle offen, der dritte Molar (Weisheitszahn) war vorhanden, Zähne mittelgross. Die Schläfenflächen sind am Stirnbein stark eingetieft, der Anfang der Schläfenlinien ist am Stirnbein scharf markirt. Kleinste Stirnbreite 93, grösste 114. Der Gesichtsschädel (Obergesicht) ist schmal, gut profilirt; die Nasenbeine sind oben schmal, die Nasenöffnung breit, der Nasenstachel gut ausgebildet, aber die

Digitized by Google

Unterränder der Nasenöffnung etwas abgerundet mit Andeutung von Pränasalgruben. Die Augenhöhlen sind kurz aber ziemlich niedrig, die Jochbeine im Ganzen und mit ihrem Augenhöhlenfortsatz ziemlich stark nach hinten gebogen.

No. 31 (29). Maske eines grossen und schweren männlichen Schädels, mit nur linkem Oberkiefer etc. Die Temporalnähte verwachsen, über mittleres Alter, die hinteren Molaren fehlten bereits, ihre Alveolen sind ganz atrophirt. Die Stirn ist breit aber entschieden nach hinten geneigt; der Stirnnasenwulst stark, darauf erscheinen die (inneren) Glabellar-Enden der Augenbrauenbogen stark ausgeprägt, letztere fehlen aber der äusseren Hälfte der Oberaugenhöhlenränder. Die Nasenwurzel ist tief eingesetzt. Kleinste Stirnbreite 104; grösste 125; Stirnbogen 128. Die Augenhöhle ist hoch, viereckig, die Nase schmal, lang, die Nasenwurzel breit, tief eingesetzt. Das Gesicht ist etwas schwächer modellirt, ziemlich breit; das Jochbein etwas ausgelegt. Die Augenhöhlen sind chamäconch, Alveolarfortsatz kurz. Das Gesicht nähert sich dem männlichen brachycephalen Typus, hat aber auch dolichocephale Anklänge.

No. 32 (30). Weibliche Maske mit Stirnnaht, von mittlerem Lebensalter. Das Temporalende der Kranznaht verwachsen. Die Stirn ist steil ansteigend mit ausgeprägtem Stirnhöcker, die Unterstirn nicht hervorgewölbt, ohne Augenhöhlenbogen. Kleinste Stirnbreite 90. Das Gesicht erscheint breit und kurz, der Alveolarrand ist sehr kurz. Die Augenhöhlen sind viereckig, aber nicht niedrig, die Nase ist mittellang, unten breit; die Nasenwurzel schmal und flach, sehr wenig erhoben, auch die Stirnnasenfortsätze der Oberkiefer liegen oben stark flach. Der untere Rand der Nasenöffnung ist scharfkantig, der vordere Nasenstachel klein. Der 1. Molar war der grösste, die Zähne sind schon stark abgekaut, die Alveole des 3. Molars rechts schon atrophirt, sonst fehlte kein Zahn. Das Gesicht ist wenig modellirt, flach, der Jochbeinkörper ist ausgelegt, ebenso der Hinterrand seines Augenhöhlen-

Digitized by Google

fortsatzes. Gesichtsbreite nach Virchow 90, Obergesichtshöhe 60. Die Temporalfläche (rechts) erscheint rel. stark entwickelt, die Anfänge der Schläfenlinien auf dem Stirnbein sind aber ganz verwachsen. Das Gesicht zeigt die weibliche Form der süddeutschen Brachycephalie.

No. 33 (31). Zerbrochene männliche Maske, Rest eines grossen und schweren Schädels (wie No. 28 (26) und 31 (29) mit allen Zeichen der männlichen süddeutschen Brachycephalie. Die Stirn ist steil ansteigend, breit, flach, die Stirnhöcker sind deutlich; der Stirnnasenwulst ist schwach, flach, auf ihm zeigen sich minimale Stücke der Augenbrauenbogen. Die Augenhöhlen sind viereckig. Kleinste Stirnbreite 101, grösste 121. (?) Das Gesicht ist kurz, rel. breit, weniger modellirt als bei den Dolichocephalen, die Nasenwurzel nicht eingesenkt, breit, ziemlich flach, letzteres sind ebenso oben die Stirn-Nasenfortsätze der Oberkiefer. Der Unterrand der Nasenöffnung ist stark abgerundet, der Nasenstachel klein; der Alveolarfortsatz kurz. Die Maske ist chamäconch, mesorrhin, leptostaphylin. Gesichtsbreite nach Virchow 89; nach v. Hölder 116; Gesichtshöhe 62.

No. 34 (34). Weibliche Gesichtsmaske von ausgesprochen brachycephalem Typus. Das Gesicht ist flach, wenig modellirt, der Alveolarrand des Oberkiefers prograth vorgebogen. Die Stirn steigt senkrecht an mit grossen Stirnhöckern; die Unterstirn ist ganz flach. Die Entfernung der Augenhöhlen ist gross, die ganze Interorbitalpartie flach: speziell liegen die Stirnnasenfortsätze der Oberkiefer ziemlich flach, ebenso das Nasendach; letzteres springt nur wenig und gerundet, nicht scharf, vor; die Nasenbeine sind breit. Die Stirncurve zum Scheitel ist flach, breit. Die Augenhöhlen sind viereckig, ziemlich hoch aber rel. klein. Die Nasenöffnung ist schmal, der Nasenstachel gut ausgebildet, die Unterränder der Nasenöffnung sind abgerundet. Das Lebensalter war noch ziemlich jugendlich, die 3. Molaren waren entwickelt; der 1. und 2. Molar links sind durch Wurzelentzündungen zerstört, der Alveolarfortsatz hat hier eine tiefe nekrotische Grube. Die Schädelmaske ist mesoconch, leptorrhin, leptostaphylin. Ober-

Digitized by Google

gesichtsbreite nach Virchow 84, v. Hölder 104; Obergesichtshöhe 60. Kleinste Stirnbreite 92; Stirnbogen 117.

No. 35 (35). Männliche Gesichtsmaske des (männlichen) Brachycephalen-Typus, gross, schwer, starkknochig. Der Stirnnasenwulst tritt energisch hervor, seitlich von ihm, die Glabella schwach abgrenzend, erheben sich geringfügig ausgebildete Augenbrauenwülste, welche seitlich ganz fehlen. Die Stirn steigt ziemlich gerade an, die Stirnhöcker sind deutlich, die Stirnfläche ist breit, kleinste Stirnbreite 102. Die Nasenwurzel ist etwas unter dem vorgewölbten Stirnnasenfortsatz vertieft. Die Nase ist lang und gross, rel. schmal, das Nasendach stark erhoben, breit. Die Nasenbeine sind gross, der Nasenrücken convex. Die Stirnnasenfortsätze der Oberkiefer sind nach vorne stark aufgerichtet, trotzdem ist der Oberkiefer, resp. das Obergesicht, weniger energisch profilirt, breit. Das extrem dicke und massive (mongoloide) (Unterrand 10 mm dick) Jochbein (rechts) ladet stark nach auswärts aus, der Unterrand ist beträchtlich nach auswärts gebogen. An der Sutura Tempor. zygomatica des Jochbogens eine theilweise Sutura japonica, 6 mm in das Jochbein einspringend. Auch der Augenhöhlenfortsatz des Jochbeins steht schief nach aussen, nicht scharf nach hinten gewendet, entsprechend der Stellung des Jochbeinkörpers. Die Augenhöhlen sind weit, aber deutlich viereckig. Der Unterrand der Nasenöffnung zeigt schmale Pränasalgruben. Der vordere Nasenstachel ist gross und spitz. Die Schädel-Maske ist mesoconch, leptorrhin, brachystaphylin, mit schmalem Torus palatinus. Die Anfänge der Schläfenlinien auf dem Stirnbein sind energisch ausgeprägt. Der Alveolarfortsatz ist stark prognath. Obergesichtsbreite nach Virchow $2 \times 58 = 116$ (?), nach von Hölder $2 \times 63 = 126$. Obergesichtshöhe 72. — Die Schläfennähte sind verwachsen; von den Zähnen war im Leben nur je der 3. Molar zu Verlust gegangen, ihre Alveolen sind ganz verwachsen, sonst waren alle Zähne, obwohl sehr tief abgekaut, noch erhalten; der 1. Molar ist grösser als der 2., der Gaumen extrem tief.

Nr. 36 s. oben S. 32.

Digitized by Google

D. Einzelbeschreibung der kleineren Schädelbruchstücke.

No. 37. Zerbrochenes Schädeldach aus Stirnbein und Scheitelbeinen bestehend. Schwer, männlich (?), die Nähte noch offen, an der Spitze der Lambdanaht zwei Worm'sche Knochen, welche in das Ende der Sagittalnaht einspringen. Die Stirn ist etwas nach rückwärts geneigt, aber die Stirnhöcker sind deutlich, die Augenbrauenbogen gut ausgebildet, die Glabella scharf begrenzend. Die Unterstirn ist ziemlich vorgewölbt, daher die Nasenwurzel entsprechend tief eingesetzt. Die Anfänge der Schläfenlinien auf dem Stirnbein sind gering ausgeprägt. Die Scheitelcurve ist oval gewölbt. Die Scheitelbeinhöcker treten wenig vor. Die Länge des Schädels betrug etwa 175—180. Die Breite an den Scheitelbeinen gemessen 143. Stirnbreite kleinste 95, grösste 120; Stirnbogen 115. Der Schädel war nach dem Ansehen und diesen approximativen Messungen mesocephal.

No. 38. Stirnbein mit Nasenansatz, grosse Theile der Scheitelbeine. Dickwandig, gross, männlich, von mittlerem Lebensalter. Der Typus ist ausgesprochen dolichocephal. Breite der Scheitelbeine 139. Die Stirn ist fliehend, die Stirnhöcker sind verstrichen, die Stirncurve geht gewölbt in die Scheitelcurve über, welche, fast in gleicher Wölbung wie zur Stirn, hinter dem Scheitel abfällt. Die Unterstirn ist stark vorgebuchtet, die Augenbrauenbogen sind kräftig ausgebildet, die Glabella ist gut abgegrenzt, der Stirnnasenwulst hoch gewölbt, die Nasenwurzel daher tief unter der Stirn eingesetzt. Die Nase war breit und wahrscheinlich gross, das Nasendach stark erhoben, der Stirnnasenfortsatz des Oberkiefers stark nach vorne aufgerichtet. Die Schläfenanfänge der Kranznaht sind verwachsen, die Anfänge der Schläfenlinien auf dem Stirnbein sehr kräftig, die Temporalfläche ist gross und geht über die (ganz verstrichenen) Scheitelbeinhöcker weg.

No. 39. Stirnbein, links zerbrochen, kleiner Rest des linken, grosser des rechten Scheitelbeins. Leicht, dünnwandig, weiblich (?). Die Stirn war etwas nach hinten geneigt, die

Digitized by Google

Unterstirn etwas vorgewölbt, die Augenbrauenbogen ziemlich ausgebildet, sie erheben sich auf dem Stirnnasenwulst kräftig und grenzen die Glabella dadurch gut ab, der Stirnnasenwulst ist in der Mitte von oben nach unten etwas rinnenartig vertieft. Die Stirnhöcker erscheinen deutlich, die Scheitelwölbung ist ziemlich flach und breit. Die Schläfenfläche (rechts) ist mittelgross und bleibt unter der Höhe des (rechten) Scheitelbeinhöckers, der gut ausgeprägt ist. Der Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein ist kräftig. Kleinste Stirnbreite $2 \times 49 = 98$. Der Schädel war wahrscheinlich mesocephal, da weder der dolicho- noch der brachy-cephale Typus entschieden ausgeprägt ist.

No. 40. Zerbrochenes Stirnbein und Reste der zwei Scheitelbeine. Schwer, massiv, dickwandig, männlich. Das Stirnbein ist extrem breit, senkrecht ansteigend, die Unterstirn kaum vorgebuchtet, der Stirnhöcker breit und hoch, die Stirn- und Scheitelcurve flach und breit. Die Schläfennähte sind verwachsen, es zeigen sich keine Worm'sche Knochen oder andere Zwischenknochen. Der Anfang der Schläfenlinien am Stirnbein ist ganz minimal, kaum ausgeprägt, die Schläfenfläche klein. Kleinste Stirnbreite c. $2 \times 59 = 118$. Das Bruchstück gehört zum männlichen brachycephalen Typus.

No. 41. Zerbrochener Hinterschädel, rechts kleiner Stirnbeinrest, linkes Scheitelbein z. Thl. abgebrochen, das Hinterhauptsbein und das rechte Schläfenbein sind grossentheils erhalten. Extrem schwer, massiv, dickwandig, mit energischem Muskelansatz. — Relief an der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins und mit grosser Schläfenfläche, über die Mitte des etwas verflachten Scheitelbeinhöckers hinstreichend. Kranznaht, Sagittal- und Lambdanaht sind verwachsen und fast gänzlich verstrichen, die Schuppennaht offen und ihr Mastoidealtheil (Mastoidealnaht) ist verwachsen. Die halbzirkelförmigen Hinterhauptslinien springen stark gewölbt vor, der Hinterhauptshöcker ist im Vergleich dazu sehr mässig entwickelt. Der Zitzenfortsatz war gross und breit. Die Schädelbreite c. 140 (2×70), der Schädel war danach mesocephal.

Digitized by Google

No. 42. Seitenstück eines starken männlichen Schädels, sehr massiv und dickwandig. Die Nähte sind noch offen, der Zitzenfortsatz ist sehr gross und breit. Die Schläfenschuppe erscheint normal, nur relativ klein, sehr gross dagegen die glatte und nach oben deutlich begrenzte Schläfenfläche, welche über den Scheitelbeinhöcker, welcher ganz verstrichen ist, wegstreicht; mesocephal?

No. 43. Grosser Theil einer männlichen Schädelbasis mit Hinterhauptsfragmenten. Der Schädel war gross, dickwandig. Breite des Schädeldachs: 140, der Schädel war daher dolichocephal, dem entspricht auch die sehr starke pyramidale Ausziehung der Oberschuppe des Hinterhauptsbeins, und das relativ schwache Muskelansatzrelief an der Unterschuppe. Ober- und Unterschuppe sind durch eine rinnenartige quere Einbiegung von einander geschieden, über dieser Querrinne wölbt sich die Oberschuppe breit hervor. Ein Hinterhauptshöcker fehlt gänzlich. Die Zitzenfortsätze sind mässig gross und breit. Die Breite der Schädelbasis 127 mm. Die Nähte sind, soweit zu sehen, normal, kein Worm'scher Knochen u. ä. Hinterhauptsloch 34 : 26, schmal und mehr 5eckig als oval. Der Jochbogen war angelegt, die Schläfenbeinschuppe klein und niedrig, die Sphenobasilarfuge längst verwachsen.

No. 44. Stirnbein mit Nasenrest und grossem Keilbeinflügel. Schläfennähte verwachhsen; männlich, vielleicht dolichocephaler Typus. Kleinste Stirnbreite 96, grösste 119. Stirnbogen 125.

No. 45 bis 49 Stirnbeine.

		Stirnbreite kleinste:	Stirnbreite grösste:	Stirnbogen
No. 45.	männlich, wahrscheinl. brachycephal. Typus	92	122	132
No. 46.	weiblich „ „ „	97	125	133
No. 47.	„ „ „ „	96	120	131
No. 48.	kindlich „ „ „	95	120	120
No. 49.	„ „ „ „	89	112	122

No. 50. Oberschuppe und der grösste Theil der Unterschuppe des Hinterhauptsbeins, männlich mit Torus occipitalis,

Digitized by Google

der Hinterhauptshöcker fehlt, sonst ist das Muskelrelief energisch, die Oberschuppe pyramidal ausgezogen, wahrscheinlich zum dolichocephalen Typus gehörig. Der Hinterhauptsbogen d. h. der ganze Bogen des Hinterhauptsbeins bis zum Hinterrand des Foramen magnum misst 115, der grösste Querbogen 130, die „Höhe" = senkrechte Entfernung der Endpunkte des Hinterhauptsbogens, 92. Die grösste Breite des Hinterhauptsbeins = senkrechte Entfernung der Endpunkte des grössten Querbogens misst 111. Der Oberschuppenbogen 68, der Bogen der Unterschuppe 47 mm.

Vergleichungen und Ergebnisse der Schädeluntersuchung.

Die moderne Bevölkerung Lindau's gehört nach den Untersuchungen des Herrn Obermedizinalrath Dr. H. von Hölder in Stuttgart (— Zusammenstellung der in Württemberg vorkommenden Schädelformen. Mit einer Karte und sechs Tafeln. Stuttgart. G. Schweizerbart'sche Verlagshandlung (E. Koch) 1876 —) ebenso wie die der Stadt benachbarten Landbezirke zu den Landstrichen mit besonders hoch ausgebildeter Brachycephalie. Eine genaue Statistik der heutigen Schädelformen fehlt für Lindau noch. Ich selbst habe aus dem schwäbisch-allemannischem Gebiete hoher Kurzköpfigkeit nur ein ziemlich entfernt liegendes grösseres Beinhaus, das von Walleshausen bei Schwabhausen, eines schwäbischen Ortes aber rechts des Lech, untersuchen können.[1]) Mein Resultat stimmt jedoch mit dem des Herrn von Hölder gut überein. Die Brachycephalie ist dort eine noch ausgesprochenere als in den speziell altbayerischen Theilen Südbayerns.

Der altbayerische Stamm zeigt nach meinen 800 Messungen an Schädeln aus Landgemeinden und zwar: Chammünster, Altötting, Aufkirchen, Beuerberg, Prien einen mittleren Längenbreitenindex von 83,0. Dagegen ergaben die Messungen in

1) J. Ranke, Beiträge zur somatischen Anthropologie der Bayern. 1883 München Theodor Riedel (jetzt F. Bassermann). Bd. I. II. Abschnitt. S. 13 ff. und S. 54 ff. Tabelle S. 98 und 99.

Digitized by Google

dem Ossuarium in Walleshausen, dass die Bevölkerung schwäbisch-allemannischen Stammes an der Westgrenze des eigentlichen Altbayerns im Mittel wie gesagt in noch höherem Grade brachycephal ist; der mittlere Längenbreiten-Index beträgt für Walleshausen 85,33. Die Altbayern zeigen sonach im Durchschnitt eine „mittlere Brachycephalie" (Gruppe der Indices 80,0—84,9), während die schwäbische Bevölkerung von Walleshausen mit dem Mittelwerth von 85,33 schon in die Gruppe „gesteigerter Brachycephalie", Hyperbrachycephalie (Grenzen der Indices 85,0—89,9), gehört.

Unter den von mir gemessenen 1000 Schädeln[1]) aus der modernen Landbevölkerung der altbayerischen Kreise, Oberbayern, Niederbayern, Oberpfalz, schwankt der Längenbreiten-Index zwischen

70,3 bis 97,6

also von entschiedener Dolichocephalie bis zu dem höchsten Grad der bisher gemessenen normalen Brachycephalie. Dabei überwiegen aber weit die entschieden brachycephalen Formen. Unter den 1000 Schädeln fanden sich nur 8 Dolichocephale mit einem Längenbreiten-Index, der unter 75,0 zurückbleibt: Von Index 70 und 71 fand sich je ein Schädel, von Index 72, 73, 74 fanden sich je 2. Die Anzahl der Mesocephalen mit einem Index von 75,0—79,9 beträgt 163 pro mille und es zeigen innerhalb dieser Gruppe die gegen die Brachycephalie neigenden und hart an der Grenze der Brachycephalie stehenden Formen ein entschiedenes Uebergewicht, die Anzahl der unter den 1000 Schädeln auf die fünf mesocephalen Indices treffenden Schädel sind: auf Index 75 treffen 5 Schädel; 76 — 13; 77 — 25; 78 — 53; 79 — 67. Die Mehrzahl der 1000 Schädel, nemlich 829, erweisen sich als brachycephal mit einem Index zwischen 80,0 und 97,6. Unter den Brachycephalen hat eine überwiegende Mehrzahl, nemlich 528, einen Längenbreiten-Index zwischen 80,0 und 84,9 (= Indices der mittleren Brachycephalie), das Maximum der für einen Index

1) l. c. II. Abschn. S. 21 ff.

Digitized by Google

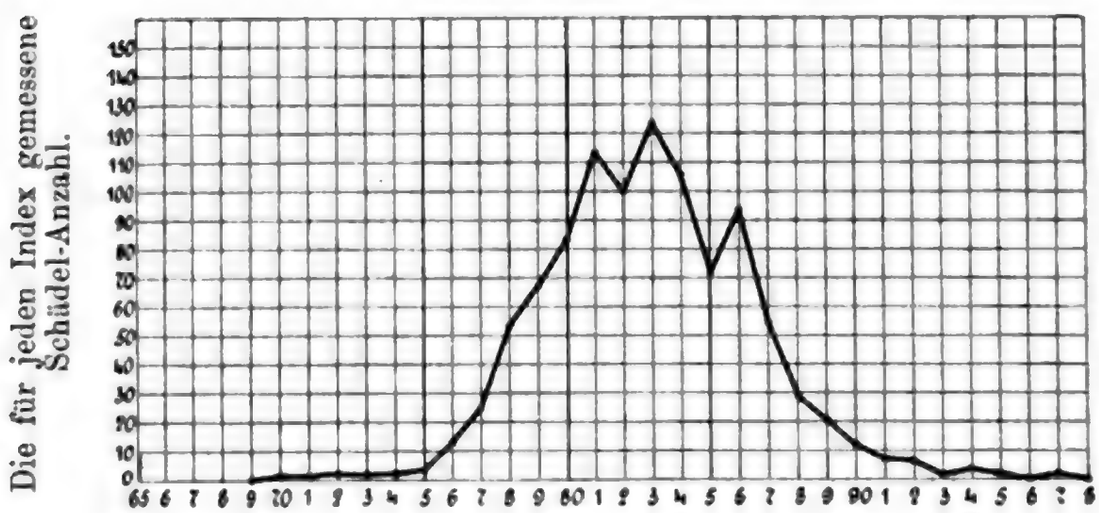
gemessenen Schädelanzahl trifft auf den Index 83 mit 124 Schädeln, denselben Index, welcher sich auch als mittlerer Index berechnet. Bei 268 Schädeln beträgt der Index zwischen 85,0 und 89,9 (hyperbrachycephale Gruppe), aber ein Index von 90,0 und darüber (bis 97,6) wurde im Ganzen noch 33 mal bestimmt. (Index-Gruppe der Ultra-Brachycephalen 90,0 bis 94,9); die Indices von 95,0 bis 99,9 bilden die höchste Gruppe der beim normalen Menschen jemals beobachteten Brachycephalie.

Die nebenstehende Curve[1]) gestattet mit einem Blick eine Uebersicht über die eben geschilderten Verhältnisse.

I. Curve.

Vertheilung der einzelnen Längenbreiten-Indices unter 1000 Schädeln der modernen ländlichen Bevölkerung aus den altbayerischen Regierungsbezirken Bayerns.

Dolichocephale	Mesoceph.	Brachycephale	Gesammtzahl der Schädel 1000
8	163	528 + 301	



Fortschreitende Reihe der Längenbreiten-Indices.

Die Anzahl der auf die einzelnen Indices der dolichocephalen und der mesocephalen Gruppe treffenden Schädel ist oben angegeben; für die einzelnen Indices der brachycephalen

1) l. c. S. 23.

Digitized by Google

Schädelgruppe ergaben sich folgende Zahlen: von Index 80 wurden gemessen 83 Schädel, von Index 81 — 114; 82 — 100; **83 — 124** (Maximum); 84 — 106; 85 — 71; 86 — 94; 87 — 55; 88 — 29; 89 — 20; 90 — 12; 91 — 8; 92 — 7; 93 — 1; 94 — 3; 95 — 1; 96 — 0; 97 — 1.

In dem schwäbisch-allemannischen Orte Walleshausen zeigte sich, im Vergleich mit den eigentlich altbayerischen Verhältnissen, die, wie angegeben, im Allgemeinen höhere Ausbildung der Brachycephalie schon darin, dass unter den 100 untersuchten Schädeln dolichocephale Formen ganz fehlen; es fanden sich auch nur 9 Mesocephale, von welchen noch 3 mit einem Index von 79,8 hart an der Grenze der Brachycephalie stehen. Der Längenbreiten-Index schwankte überhaupt nur von 76,0 bis 93,4; 91 Schädel von 100 erwiesen sich als brachycephal und 49 von diesen gehörten den höchsten Stufen der Brachycephalie an (Index von 85,0 bis 93,4).

Wir dürfen für die moderne Bevölkerung Lindau's im Wesentlichen die gleiche, wenigstens eine sehr ähnliche, Vertheilung der Schädelindices voraussetzen. In Prozenten ausgedrückt ergibt sich folgende Vertheilung der Typen:

	Altbayern (Oberbayern, Niederbayern, Oberpfalz)	Schwaben (Walleshausen)
Dolichocephale	1 (0.9)	0
Mesocephale	16	9
Brachycephale	83	91
Summe	100	100

Ein extremes Uebergewicht der brachycephalen (83 und 91%) und Verschwinden der dolichocephalen Schädelformen (0 und 0,9%) charakterisirt die moderne süd-Bayerische Bevölkerung, zu welcher Lindau gehört.

Digitized by Google

Die Gräber aus der Völkerwanderungsperiode der süddeutschen Länder diesseits der Donau und der Rheingegenden, die sogenannten Reihengräber, wurden für Baden und die Rheinlande von den Herren A. Ecker und L. Lindenschmit[1]) eingehend untersucht und ihr germanischer Charakter sowie ihre historische Stellung fixirt. In Bayern hat sich das Hauptverdienst in der archäologischen Untersuchung dieser Reste des Alterthums Herr Major J. Würdinger erworben.[2])

Schon A. Ecker hatte bezüglich der Schädel hervorgehoben, dass unter der weit überwiegenden Zahl der Dolicho- und Mesocephalen in den süddeutschen Reihengräbern auch mehr vereinzelt brachycephale Formen auftreten, so dass schon in jener Periode der Schädel-Typus nicht rein langschädelig war. Immerhin ist die Anzahl der relativ langen Formen, Dolichocephale und Mesocephale so überwiegend, dass der Unterschied zwischen der heutigen vorwiegend kurzköpfigen Bevölkerung der süddeutschen Gegenden und der aus den Reihengräbern bekannt gewordenen Bewohner der gleichen Länder während der Völkerwanderungsperiode ein extremer ist.

Herr Julius Kollmann hat im Jahre 1877 eine vortreffliche Abhandlung veröffentlicht über: „Schädel aus alten Grabstätten Bayerns[3]); er konnte damals seine Untersuchungen auf 70 Schädel und Schädelbruchstücke, deren Längenbreiten-Index noch bestimmbar war, basiren. In Procenten umgerechnet war sein Hauptresultat betreffs der in den südbayerischen Reihengräbern bis dahin gefundenen Schädel das folgende:

---

1) A. Ecker, Crania Germaniae meridionalis occidentalis. Schädel früherer und heutiger Bewohner des südwestlichen Deutschlands. Mit 38 Tafeln. Freiburg i/B. 1865, gross 4⁰.

2) Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. I. S. 142 ff. Die Platten- und Reihengräber in Bayern.

3) Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. I. S. 151 ff. s. auch H. Ranke l. c. Bd. I. S. 113 ff. Ueber oberbayerische Plattengräber.

Digitized by Google

70 Bayerische Reihengräberschädel nach J. Kollmann.

Dolichocephale	bis Index	74,9	44 Procent
Mesocephale	„ „	75,0—79,9	45 „
Brachycephale	„ „	80,0 und darüber	11 „
		Summe .	100 Procent

Es ist mir seit jener Veröffentlichung Kollmann's gelungen, noch 130 Schädel, deren Längenbreiten-Index bestimmt werden konnte, aus der Völkerwanderungs-Periode Bayerns zu sammeln, so dass das jetzt zu überblickende Gesammtmaterial an Schädeln 200 beträgt. Trotz dieser bedeutenden Vermehrung der Anzahl der Schädel ist mein Gesammtresultat der Vertheilung der Schädel auf die drei Haupt-Formgruppen von dem Kollmann's wenig verschieden. Ich fand:

200 Bayerische Reihengräberschädel.

Dolichocephale	bis Index	74,9	42 Procent
Mesocephale	„ „	75,0—79,9	44 „
Brachycephale	„ „	80,0 und darüber	14 „
		Summe .	100 „

Unter den 200 Schädeln sind 84 Dolichocephale, 89 Mesocephale, und 27 Brachycephale.

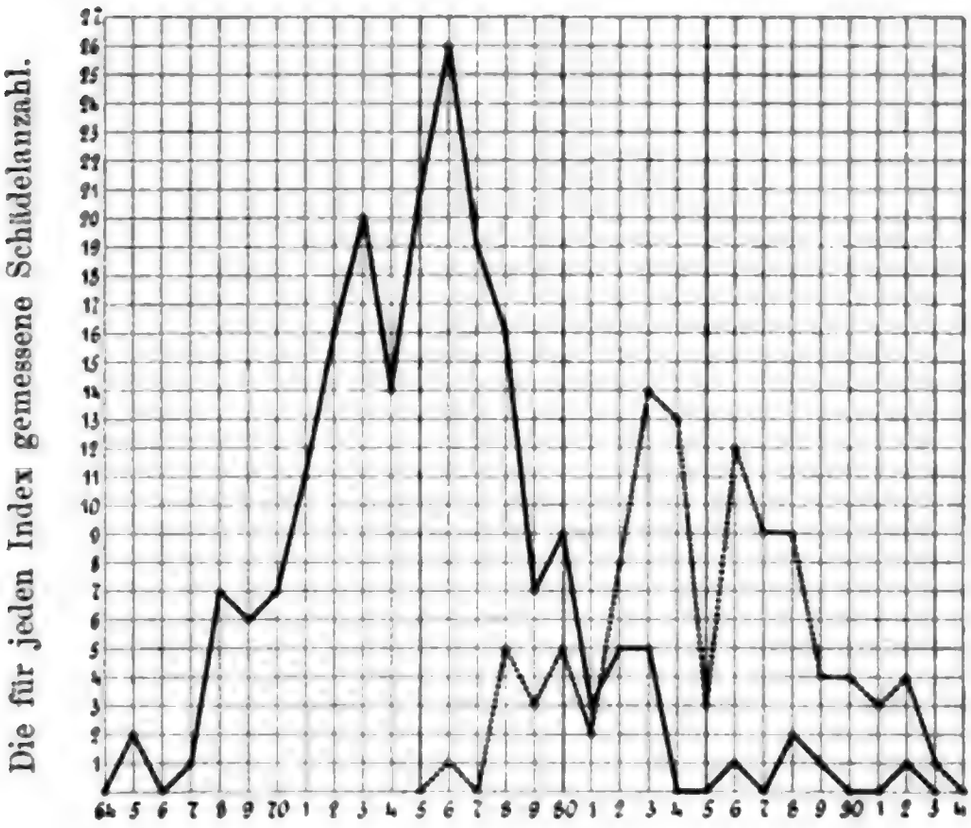
In den beiden auf S. 48 mitgetheilten Curven sind die Messungsresultate der 200 Reihengräberschädel und der 100 Schädel aus dem Ossuarium in Walleshausen, welche als Repräsentanten der modernen schwäbisch-allemannischen Bevölkerung Bayerns zu gelten haben, in einander gezeichnet, um die Differenz der modernen Bevölkerung von jener der Völkerwanderungs-Periode in den gleichen Landestheilen mit einem Blick überschaubar zu machen.

Digitized by Google

II. und III. Curve.

II. Vertheilung der einzelnen Längenbreiten-Indices unter 200 Schädeln aus südbayerischen Reihengräbern der Völkerwanderungs-Periode, und III. unter 100 Schädeln aus dem Ossuarium in Walleshausen.

	Dolichocephale	Mesoceph.	Brachycephale	
II.	84 = 42%	89 = 44%	27 = 14%	Anzahl der Schädel 200
III.	0%	9%	91%	Anzahl der Schädel 100



Fortschreitende Reihe der Längenbreiten-Indices.

Während bei den Schädeln aus der Völkerwanderungs-Periode der massive Stock der Curve (II) durch die Dolichocephalen und Mesocephalen gebildet wird und die relativ wenigen Brachycephalen als ein geringfügiger und fremdartiger Anhang dieser Curve erscheinen, bildet das Massiv der schwäbisch-bayerischen Schädel von Walleshausen die hyperbrachycephale und brachycephale Gruppe, dagegen erscheinen als ein relativ geringfügiger Anhang ihrer Curve die Mesocephalen, Dolichocephale fehlen gänzlich. Der Unterschied ist extrem.

Digitized by Google

Wir müssen fragen: Wie erfolgte die Veränderung der in der Völkerwanderungs-Periode, wie es nach dem Gesagten scheinen muss, vorwiegend langköpfigen Bevölkerung unseres Landes in das heutige vorwiegend kurzköpfige Volk?

Es scheinen zunächst nur zwei Möglichkeiten zu bestehen. Entweder fand eine direkte Umbildung der langen und schmalen Schädelformen in den heutigen runden und breiten Schädeltypus durch Einflüsse des Wohnorts und der Kultur statt, eine Ansicht, welche bei der nachgewiesenen hohen Konstanz der typischen Schädelformen hier doch erst sekundär in Betracht kommen kann, oder die Veränderung hat ihren Grund in einer Zumischung zahlreicher brachycephaler Individuen zu den einst ausschliesslich langköpfigen Stämmen, welche in der Völkerwanderungs-Periode Bayern dauernd besetzten.

Mag die Veränderung der Schädelformen durch direkte Umbildung des einen Typus in den anderen oder durch steigende Zumischung von brachycephalen Individuen zu dem dolichocephalen Grundstock entstanden sein, sicher muss in den auf die Völkerwadnerung folgenden Jahrhunderten noch lange Zeit hindurch die Zusammensetzung der Bevölkerung in Betreff der typischen Schädelformen eine andere gewesen sein, als sie sich heute zeigt: die Dolichocephalen, welche jetzt unter unserem Volke so selten sind, ja vielfach ganz fehlen, müssen in früheren Jahrhunderten noch entsprechend zahlreicher gewesen sein.

Die mittelalterlichen Schädel aus Lindau zeigen uns diese lang gesuchte Uebergangs-Periode. —

Die Schädel und Schädelbruchstücke aus dem mittelalterlichen Ossuarium in Lindau sind im Vorstehenden eingehend besprochen worden. Hier sollen nur die zunächst für die oben angeregte Frage ins Gewicht fallenden Hauptresultate dargestellt werden.

Unter den eingesendeten Schädeln und Schädelresten waren 25, welche eine exakte Bestimmung des Längenbreiten-Index gestatteten.

Digitized by Google

In die Hauptgruppen vertheilt sind von den Lindauer Schädeln 8 dolichocephal, 9 mesocephal und 8 brachycephal.

Die Messungsergebnisse sind nach dem Längenbreiten-Index geordnet folgende:

	8 Dolichocephale (Index bis 74,9):	9 Mesocephale (Index 75,0 bis 79,9):	8 Brachycephale (Index 80,0 u. darüber):
1.	70,10	75,91	80,00
2.	72,22	77,12	80,70
3.	72,52	77,20	81,86
4.	73,15	77,29	82,45
5.	73,54	77,77	83,37
6.	73.91	78,19	84,18
7.	74,17	78,21	87,06
8.	74,31	78,45	88,63
9.		79,77	

Die Bedeutung dieses Ergebnisses wird durch die Gegenüberstellung der Hauptresultate der bisherigen Beobachtungen ersichtlich, wobei wir uns auf die Vergleichung der Schädel aus der Völkerwanderungs-Periode mit den modernen (1000) südbayerischen und mit den mittelalterlichen Lindauer Schädeln beschränken.

Umänderung der Längenbreiten-Indices der südbayerischen Bevölkerung in historischer Zeit.

	Schädel aus der Völkerwanderungszeit (200 Reihengräber-Schädel)	Schädel aus dem frühen Mittelalter (Lindau)	Schädel der modernen süd-bayerischen Bevölkerung (1000 Schädel)
Dolichocephale	42%	32%	1%
Mesocephale	44 „	36 „	16 „
Brachycephale	14 „	32 „	83 „
Summe:	100	100	100

Die Lindauer Schädel stellen sich als Mittelglied zwischen die Schädel aus der Völkerwanderungs-Periode und jene der modernen Bevölkerung: die relative Anzahl der Dolichocephalen ist seit der Völkerwanderung bis zur Periode der Lindauer Schädel von 42 auf 32 Procent, also im Verhältniss von c. 4 zu 3 gesunken, dagegen ist die relative Anzahl der Brachy-

Digitized by Google

cephalen von 14 auf 32 gestiegen, sonach im Verhältniss von mehr als 1 zu 2, um mehr als das Doppelte. Die relative Anzahl der Mesocephalen ist wie die der Dolichocephalen gefallen, von 44 auf 36 Procent. Es sind das ersichtlich die gleichen Veränderungen, welche sich bis in die Neuzeit fortgesetzt haben: die relative Anzahl der Dolichocephalen wurde bis in unsere Zeit eine minimale (c. 1%), auch die relative Anzahl der Mesocephalen sank noch beträchtlich weiter von 44 auf 36 auf 16 Procent,[1]) dagegen stieg die relative Anzahl der Brachycephalen noch sehr bedeutend von 14 auf 32 auf 83 Procent.

Die Mischung der Schädeltypen der Lindauer Schädel steht jener während der Völkerwanderungsperiode noch beträchtlich näher als der der heutigen Südbayern. Es spricht das dafür, dass, wie es die historische Analyse schon ergeben hat, die Lindauer Schädel und Gebeine aus dem frühen Mittelalter stammen.

Für eine direkte Umbildung der einen Form in die andere bringen die Lindauer Schädel keine Beweise. Es ergibt sich das schon daraus, dass die Uebergangsformen, welche wir doch unter den Mesocephalen zu suchen hätten, unter den mittelalterlichen Schädeln nicht zahlreicher, sondern beträchtlich seltener sind, als unter den Schädeln der Völkerwanderungsperiode.

Unter den Schädeln aus Lindau sind echte Dolichocephale (32%), welche in der ganzen Bildung des Hirnschädels und des Gesichtes den dolichocephalen Reihengräber-Schädeln entsprechen. Andererseits finden sich ebenso häufig (32%) echte Brachycephale, welche sich in Nichts von den heutigen südbayerischen, altbayerischen und schwäbischen, Kurzköpfen unterscheiden.

Die zwischen diesen beiden Extremen stehenden Mesocephalen zerfallen in zwei Gruppen. Die eine Gruppe reiht sich jenen namentlich aus den Reihengräbern der Völker-

1) In Walleshausen ist die Anzahl der Mesocephalen nur 9, in der Regensburger Stadtbevölkerung nur 5 Procent.

Digitized by Google

wanderungszeit wohlbekannten Mesocephalen an, welche für Bayern zuerst von den Herren H. Ranke[1]) und J. Kollmann[2]) studirt worden sind. Ihr Hirnschädel entspricht vor allem in der Bildung der Stirn in hohem Maasse dem dolichocephalen Reihengräber-Typus, sie haben aber einen stärker gerundeten Hinterkopf und sind im Mittelkopf breiter, was sich meist sofort in der deutlicheren Ausprägung der Scheitelbeinhöcker zu erkennen gibt: es sind im vorderen Abschnitt des Hirnschädels Dolichocephale, im hinteren Abschnitt Brachycephale.

Die überwiegende Mehrzahl der Lindauer Mesocephalen reiht sich aber dem brachycephalen Schädeltypus an und steht diesem zum Theil ganz nahe. Es sind die typischen Mesocephalen unserer modernen südbayerischen Bevölkerung; an den dolichocephalen Typus erinnert vor allem nur das mehr oder weniger pyramidal ausgezogene oder sonst stärker vorgebuchtete Hinterhaupt. Diese Abweichung von der brachycephalen Schädelform beginnt gewöhnlich ebenfalls im Mittelkopf und zwar hier mit Abflachung der Scheitelbeinhöcker. Der vordere Abschnitt des Hirnschädels ist bei dieser Gruppe meist typisch brachycephal, der hintere Abschnitt zeigt Anklänge an die dolichocephale Form. An letztere erinnern hie und da auch stärker entwickelte Augenbrauenbogen.

Es sind das nicht Uebergangsformen, sondern direkte Mischformen, wie sie sich aus der Vererbung bei der Kreuzung der beiden Haupttypen bilden mussten. Dabei zeigt sich in Lindau der brachycephale Typus sichtlich als der stärkere, da die ihm nahestehenden Mischformen der Zahl nach überwiegen und sich vom reinen Typus nur wenig unterscheiden. Wir sehen, dass die Typen-Kreuzung mehr und mehr das brachycephale Element der Bevölkerung stärkte. Am wichtigsten für die Ausbildung der süddeutschen Brachycephalie war aber

1) Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. I. S. 118 ff.

2) l. c. S. 173.

Digitized by Google

zweifellos das fortgehende Zuströmen brachycephaler Individuen selbst.[1])

Wir sind nun durch die Aufsammlung körperlicher Reste der Bewohner unseres Vaterlandes aus früheren, z. Thl. weit vor der Völkerwanderung gelegenen Epochen, im Stande, auf die Frage Antwort zu geben, woher diese den Dolichocephalen sich zumischenden Brachycephalen bei uns gekommen sind.

---

1) Immerhin dürfen wir aber auch eines mechanischen Momentes der Schädel-Umbildung nicht vergessen, welches innerhalb der Wirkung der Vererbung durch Typenkreuzung sich geltend macht. Die Breite der Lindauer Schädel steht, wie oben hervorgehoben wurde, in einem Correlationszusammenhang mit der Ausbildung der Scheitelbeinhöcker. Während letztere bei den breiteren und breiten Schädelformen deutlich, zum Theil sehr stark, gross und breit, hervortreten, sind sie bei den Schädeln mit schmalerem, nach hinten verlängertem Hinterhaupt meist nahezu oder ganz verstrichen, kaum erkennbar. Diese Formverschiedenheit hängt mit der verschiedenen Grösse der Schläfenfläche, des Planum temporale, zusammen. Bei den Schädeln mit stark ausgeprägten Scheitelbeinhöckern läuft die untere und die, manchmal extrem ausgebildete, obere halbzirkelförmige Schläfenlinie, welche nach oben die Schläfenfläche begrenzen, unter dem Scheitelbeinhöcker hin, dagegen verlaufen beide oder wenigstens die obere halbzirkelförmige Schläfenlinie verschieden hoch über dem Scheitelbeinhöcker, oder auf diesem selbst, wenn sich derselbe mehr oder weniger verstrichen zeigt. Bekanntlich bezeichnen die beiden halbzirkelförmigen Begrenzungslinien der Schläfenfläche den Ansatz (resp. Ursprung) des Schläfenmuskels, M. temporalis, und seiner Fascie. Mit der grösseren oder geringeren Ausbildung des Schläfenmuskels, mit dem Höher-Rücken desselben an der Schläfenfläche, scheint demnach bei unseren Schädeln die Grössenentwickelung der Scheitelbeinhöcker und damit die relative Abflachung der Scheitelbeine und des hinteren Abschnitts des Hirnschädels in einem gewissen ursächlichen Zusammenhang zu stehen. Im Allgemeinen ist bei unseren Brachycephalen die Schläfenfläche im Verhältniss zum Querumfang des Hirnschädels kleiner als bei den Dolichocephalen. Auch die Steigerung der Cultur hat bekanntlich eine rel. Verkleinerung der gesammten Kauwerkzeuge und damit auch des Schläfenmuskels zur Folge.

Digitized by Google

Schädel aus den älteren prähistorischen Epochen Südbayerns.

Die Geschichte erzählt, dass während der Völkerwanderungsperiode bis dahin jenseits des römischen Grenzwalls, im Allgemeinen nördlicher wohnende germanische Stämme, auch speziell Thüringer, in das südliche Bayern eingebrochen sind und sich hier zuerst vorübergehend, dann dauernd gehalten haben.

Solche Stämme, welche wir als „germanische Nordvölker" bezeichnen dürfen, brachten ihre langen und schmalen Schädelformen während der Völkerwanderungszeit nach Bayern. Schon aus den berühmten Untersuchungen von A. Retzius in der Mitte des scheidenden Jahrhunderts hatte sich ergeben, dass in Schweden die herrschende Schädelform der dortigen Germanen die langgestreckte, dolichocephale sei; die Herren R. Virchow[1]) und Kupffer[2]) konstatirten das gleiche Verhältniss, der erstere für die Friesen, der zweite für die Küstenbevölkerung der Ostsee (um Königsberg i/Pr.). Ich habe gefunden, dass die moderne Landbevölkerung von Dänemark (Jütland und Seeland) in Beziehung auf die Vertheilung der Längenbreiten-Indices der Schädel noch heute mit den süddeutschen Reihengräber-Stämmen so gut wie absolut übereinstimmt,[3]) die Brachycephalen sind unter den Dänen nur noch seltener und der Grad der Kurzköpfigkeit ist ein geringerer (der Index steigt nur bis 82). Meine Hauptresultate ergibt die folgende Gegenüberstellung:

---

1) R. Virchow. Beiträge zur physischen Anthropologie der Deutschen mit besonderer Berücksichtigung der Friesen. Besonderer Abdruck der Abhandlungen der kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1876. Zweiter Abdruck Berlin 1877.

2) Die anthropologischen Sammlungen Deutschlands. IV Königsberg i. Pr. Schädel und Skelette der anthropologischen Sammlungen zu Königsberg i. Pr. v. Prof. C. Kupffer und cand. med. F. Bessel-Hagen. Braunschweig. Archiv für Anthropologie Bd. XII. 1880.

3) J. Ranke. Ausblick nach Skandinavien und in die Vorzeit. In: Beiträge zur somatischen Anthropologie der Bayern. Bd. I. Abschnitt II. S. 57 ff.

Digitized by Google

	83 Schädel aus der dänischen Landbevölkerung:	200 Schädel aus südbayerischen Reihengräbern:	100 Schädel aus Ebrach (Westfranken):	59 Schädel aus Aschaffenburg (Westfranken):
Dolichocephale bis Index 74,9	57%	42%	25%	12%
Mesocephale Index 75,0—79,9	37 „	44 „	28 „	32 „
Brachycephale Index 80,0 und darüber	6 „	14 „	47 „	56 „

Ueberall da, wo nicht im Laufe der Geschichte von Osten her sich Slaven eingeschoben haben, zeigen die nördlicher wohnenden germanischen Völker noch heute ähnliche kraniologische Verhältnisse wie die Reihengräber-Stämme Bayerns.

Für die hier aufgeworfenen Fragen der speziell bayerischen Ethnographie ist es von besonderer Bedeutung, dass ich den Nachweis führen konnte,[1]) dass noch heut zu Tage in den nördlichen, speziell nord-westlichen Gebietstheilen Bayerns, namentlich im westlichen Maingebiete, wo eine thüringisch-fränkische Bevölkerung sitzt, sich in grosser Anzahl die gleichen langgestreckten Schädelformen finden, welche uns im Vergleich mit der modernen kurzköpfigen Schädelform unserer Südbayern in so hohem Grade auffallen.

In jenen Gegenden, aus welchen jene Stämme aufbrachen, deren Reste wir in unseren südbayerischen Reihengräbern der Völkerwanderungs-Periode gefunden haben, ist noch jetzt die Form der Reihengräberschädel in reinen unvermischten Typen weit verbreitet. In dem aus dem vorigen Jahrhundert stammenden Ossuarium in Ebrach gehört noch $^1/_4$ aller Schädel diesem reinen Typus an. Aehnliches hat R. Virchow[2]) für Thüringen konstatirt, indem er dort den mesocephalen Reihengräber-Schädeltypus nachweisen konnte. In Aschaffenburg fand ich noch 12% des dolichocephalen Reihengräber-Typus.[3]) Die Hauptergebnisse der Messungen an Schädeln aus den Ossuarien von Ebrach und Aschaffenburg habe ich oben neben

1) l. c. S. 37 ff.

2) R. Virchow, Schädeln aus einer Krypte in Leubingen im nördlichen Thüringen Z. E. V. Bd. IX. 1877. S. 327 ff.

3) s. oben S. 55.

Digitized by Google

die Schädel der dänischen Landbevölkerung und der südbayerischen Reihengräbern gestellt.[1])

Alle die Stürme der Völkerbewegungen und die fortschreitenden Stammesverschiebungen, haben in jenen Gegenden Bayerns das Bild noch nicht gänzlich zu verwischen vermocht, welches uns die Reihengräber aus jener frühen Periode entwerfen. Die von dort nach dem Süden über den römischen Grenzwall vordrängenden Stämme waren, wie wir gefunden haben, nicht rein aber vorwiegend dolichocephal. Wenn heute aus denselben Gegenden wieder Völkerzüge in Südbayern einbrechen würden, so würden dadurch wieder die gleichen Schädelformen hereingebracht werden, welche während der Völkerwanderungsperiode erscheinen.

In der That habe ich das für die Stadtbevölkerung Münchens feststellen können.[2]) Während noch im vorigen Jahrhundert dolichocephale Schädel-Formen so gut wie vollkommen fehlen, treten sie in der heutigen Bevölkerung unserer Landes-Hauptstadt in einem gewissen Bruchtheil auf, nachdem das Zuströmen aus den fränkischen Provinzen, in einer neuen Völkerwanderung, ein immer lebhafteres geworden ist.

Zum Vergleiche stehen mir Messungen einerseits an 100 männlichen Schädeln der alten Münchener Stadtbevölkerung aus dem 16. und 17. Jahrhundert, die jüngsten urkundlich aus dem Jahre 1712 stammend, zur Verfügung, andererseits an 100 männlichen Schädeln der neuen resp. modernsten Münchener Stadtbevölkerung aus der Mitte dieses Jahrhunderts.

Die Untersuchungen ergaben, dass in den letzten Jahrhunderten der Längenbreiten-Index der Schädel der Münchener Stadtbevölkerung im Mittelwerth nicht unbeträchtlich abgenommen hat, die Schädel im Allgemeinen erkennbar schmaler geworden sind:

---

1) Näheres s. Beiträge zur somatischen Anthropologie der Bayern. II. Abschnitt Ethnologische Kraniologie der Bayern. S. 37 ff.

2) s. die beiden Tabellen im Anhang.

Digitized by Google

	Münchener Stadtbevölkerung	
	alte:	neue:
mittlerer Längenbreiten-Index von je 100 Schädeln	84,8	82,4

Diese Abnahme des mittleren Längenbreiten-Index rührt aber davon her, dass der alten männlichen Münchener Stadtbevölkerung Dolichocephale vollkommen fehlen und sie nur ganz wenige Mesocephale besitzt, während die neue männliche Stadtbevölkerung eine relativ beträchtliche Anzahl dieser beiden lang gestreckteren Schädelformen besitzt. Ziffernmässig habe ich gefunden:

	Münchener männliche Stadtbevölkerung	
	100 Schädel aus dem 16. und 17. Jahrhundert:	100 Schädel aus der Mitte des 19. Jahrhunderts:
Dolichocephale bis Index 74,9	0%	6%
Mesocephale Index 75,0—79,9	8 „	17 „
Brachycephale Index 80,0 u. darüber	92 „	77 „

Unter 100 Schädeln der neuen weiblichen Stadtbevölkerung Münchens fand ich ebenfalls 2 Dolichocephale und 14 Mesocephale, die Münchener Frauen sind sonach im Ganzen noch immer etwas brachycephaler als die Männer, was sich aus den gleichen Ursachen wie in den prähistorischen Epochen erklärt; die Frauen sind das stabilere Element der Bevölkerung.

Die moderne Bevölkerung der bayerischen westlichen Maingegenden enthält neben den Dolichocephalen zahlreiche Mesocephale und Brachycephale; letztere sind von der gleichen typischen Form wie unsere modernen Brachycephalen in Südbayern und beweisen eine somatische Beeinflussung von letzterer Seite aus. Es spricht aber für die dort noch fortbestehende Kraft des dolichocephalen Typus in diesen seinen alten Ursitzen, dass nicht nur die Mesocephalen in der Gesammtbildung des Schädels sehr häufig sich an den dolichocephalen Typus nahe anschliessen, sondern dass sich dort auch den Brachycephalen recht häufig dolichocephale Züge, namentlich in der Bildung der Stirn, der Nasenwurzel u. a. beigemischt zeigen.

Aus diesen noch heute von den typischen Langköpfen der

Digitized by Google

Völkerwanderungs-Periode bewohnten Theilen Bayerns stehen mir keine Schädel aus den vorhistorischen Metallperioden zur Verfügung. Dagegen sind einige Schädel und sonstige Skelettreste aus der vor den Metallperioden liegenden sog. jüngeren Steinzeit, aus der neolithischen Periode, vorhanden, deren Reste in den nördlichen Theilen Bayerns in jüngster Zeit in überraschendem Reichthum zu Tage gekommen sind.

Es ist mir gelungen, aus dieser frühen Epoche auch einige Schädel zu bergen. Das kraniologische Material ist folgendes:

Ein Schädeldach aus einem steinzeitlichen Begräbniss aus der Höhle im Fockenstein bei Pottenstein.[1])

Zwei ziemlich wohl erhaltene Schädel aus steinzeitlichen Gräbern bei Ochsenfurt, eingesendet durch Herrn Offizial Clessin.[2])

Drei Schädel aus der Steinbach-Höhle bei Sulzbach.[3])

Ein Schädel aus einer von Herrn Dr. Pfaff ausgebeuteten oberfränkischen Höhle.[4])

Hier sollen nur die allgemeinen kraniologischen Verhältnisse dieser uralten Schädel mitgetheilt werden.

Vor allem wichtig erscheint es, dass unter dieser steinzeitlichen Serie kein brachycephaler oder charakteristische Eigenschaften des brachycephalen Typus aufweisender Schädel sich findet, es sind dolichocephale und mesocephale Formen, welche in allem Wesentlichen dem dolichocephalen Typus südbayerischer Reihengräber und ebenso dem der heutigen Bewohner der westlichen Maingegenden Bayerns entsprechen. Auch die

---

1) J. Ranke: Die Felsenwohnungen aus der jüngeren Steinzeit in der fränkischen Schweiz. Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. III. S. 206 ff. l. c. S. 217 und 220.

2) s. Corresp.-Blatt der deutschen anthropologischen Gesellschaft. Juli-No. 1896. P. Reinecke.

3) s. Corresp.-Blatt der deutschen anthropol. Ges. XXI. 1890 S. 162. J. Ranke. Die Steinbach-Höhle.

4) Dr. Pfaff. Ein prähistorisches Menschenskelett aus dem fränkischen Jura. Zeitschrift d. deutschen geologischen Gesellschaft 1890 S. 618.

Digitized by Google

Mesocephalen zeigen im Stirn- und Gesichtsbau diesen Typus, besonders extrem sind zum Theil, z. B. bei dem einen Schädel aus Ochsenfurt, die Augenbrauenbogen vorgewulstet. Die Form der Schädel entspricht im Typus jenem aus dem grossen neolithischen Gräberfeld, welches Herr Nagel bei Rössen in Thüringen untersucht und vortrefflich ausgehoben hat. Ich verdanke der Güte des Herrn Nagel einen der in Rössen gehobenen Schädel. Derselbe ist in schwachem Grade im Grabe verdrückt, so dass er etwas zu schmal erscheint. Seine Länge ist 183, seine Breite etwa 127 oder 128, letzterer Werth ergibt einen Längenbreiten-Index von 69,94, ohne Zweifel war der Schädel im Leben, wenn auch etwas breiter, doch ein ausgesprochener Dolichocephale.

Die bayerischen steinzeitlichen Schädel ergeben folgende Reihe:

Steinzeitliche Schädel aus Bayern.

	Länge:	Breite:	Höhe:	Index:
Schädel aus der Fockenstein-Höhle:				
1. Schädeldach, männlich	183	136	—	74,31
Schädel aus der Steinbach-Höhle:				
2. Grosser männlicher Schädel (No. 1) .	187	143	140	76,47
3. Schädeldach, männlich (No. 2) . . .	183	136	—	74,31
4. Kinderschädel, gut erhalten (No. 3) .	159	118	—	74,21
Schädel aus der Pfaff-Höhle:				
5. Kinderschädel (mit Skelett)	165	123	—	74,54
Schädel aus den spät-neolithischen Gräbern bei Ochsenfurt:				
6. Grosser männlicher Schädel	193	153	—	79,27
7. Schädeldach, männlich	182	142	—	78,02

Die Haupttypen der bayerischen Steinzeit-Schädel gruppiren sich in folgender Weise im Vergleich mit den Schädeln der südbayerischen Reihengräber und der rel. modernen Bevölkerung der westfränkischen Gegenden (Ebrach).

Das Resultat ist:

		7 Steinzeit-Schädel:	200 Reihengräber-Schädel:	100 Schädel aus Ebrach:
Dolichocephale bis Index 74,9 .	4	= 57 %	42 %	25 %
Mesocephale, Index 75,0—79,9 .	3	= 43 „	44 „	29 „
Brachycephale 80,0 und darüber	0	= 0 „	14 „	46 „
Summe:	7	= 100	100	100

Digitized by Google

In jenen Gegenden Bayerns im westlichen Maingebiet, in welchen der dolichocephale Schädeltypus unter der Bevölkerung sich noch jetzt als ein Haupttypus erhalten hat, finden wir den gleichen dolichocephalen Typus in der ältesten dort bis jetzt bekannt gewordenen vorgeschichlichen Epoche, in der jüngeren Steinzeit, ausschliesslich neben Mesocephalen. Brachycephale fehlen aus dieser Periode bis jetzt gänzlich, im Uebrigen entspricht aber die Vertheilung der Haupt-Typen in hohem Maasse jener der südbayerischen Reihengräber-Bevölkerung.

In den nördlichen Gauen Bayerns ist sonach das kraniologische Bild durch die Völkerwanderung nicht zerstört worden.

Das Gleiche gilt von den südlichen Landestheilen.

Der Anzahl nach ist bis jetzt noch das kraniologische Material, welches aus den älteren prähistorischen Epochen vor der Völkerwanderungs-Zeit gewonnen werden konnte, gering und wird das auch der Natur der Sache nach immer bleiben. Durch den damals bei den Bestattungen vorwiegend üblichen Leichenbrand sind die Gebeine der Todten unwiederbringlich zerstört worden. Aehnliches gilt für die Zeit direkt vor der Völkerwanderung. Immerhin genügen die in den letzten Jahrzehnten gesammelten Schädel und Schädelbruchstücke doch, um zu beweisen, dass in jenen älteren Epochen Südbayern von Stämmen bewohnt war, welche in Beziehung auf ihren Schädelbau der heutigen Bevölkerung derselben Gegenden in allem Wesentlichen entsprechen.

Es sind bis jetzt 10 Schädel aus älteren prähistorischen Metall-Epochen, welche den Anforderungen einer kraniologischen Untersuchung entsprechen, über welche ich hier berichten kann, Die immer steigende Sorgfalt in der Ausbeutung der alten Grabstätten, das mehr und mehr auch in die Kreise der archäologischen Prähistoriker eindringende Verständniss für die Wichtigkeit der menschlichen Skelettreste für die For-

Digitized by Google

schung, lässt hoffen, dass dieses Schädelmaterial sich bald weiter vermehren werde.

In dem Zusammenhang dieser Betrachtung interessirt uns vor allem der allgemeine Typus des Hirnschädels und dessen Längenbreiten-Index.

Aus der Bronzezeit steht mir nur ein, aber vortrefflich erhaltener, weiblicher Schädel zur Verfügung. Er zeigt vollkommen den weiblichen brachycephalen Typus unserer heutigen Landbevölkerung, sein Längenbreiten-Index ist 81,1.

Aus der Hallstatt-Periode, der Latèn-Periode und der Zeit der beginnenden Einwirkung der Römer sind 9 Schädel vorhanden, davon sind 3 mesocephal, 6 brachycephal bis zum Index 87,71. Alle Schädel, aber namentlich die ausgesprochen brachycephalen entsprechen ebenfalls fast absolut dem Typus der modernen südbayerischen Landbevölkerung.

10 Schädel aus älteren prähistorischen Metall-Epochen Südbayerns.

	Dolichocephale:	Mesocephale:	Brachycephale:
1.	0	76,34	81,10
2.		77,14	81,12
3.		77,72	81,90
4.			82,66
5.			82,66
6.			85,40
7.			87,72

Dolichocephale Schädelformen fehlen bis jetzt vollkommen, auch ein aus dieser Zeit stammender, im Grab verdrückter und dadurch in seiner Form exakt nicht mehr messbarer Schädel, welcher in die vorstehende Reihe daher nicht aufgenommen werden konnte, ist doch trotz seiner starken Zusammendrückung im Grabe noch nicht dolichocephal. Die drei Mesocephalen der Reihe zeigen mittlere Formen. Die 7 Brachycephalen schreiten vom Index 81,1 an bis zum Index 87,7 vor, also von dem mittleren bis zu dem extremsten Grade der Brachycephalie. Eine procentische Berechnung der Vertheilung der Hauptformen hat bei der geringen Anzahl der Schädel keinen Ausschlag

Digitized by Google

gebenden Werth; immerhin ergibt die Gegenüberstellung der Reihen der bis jetzt bekannten ältesten und der heutigen Bevölkerung Südbayerns eine unverkennbare prinzipielle Uebereinstimmung beider, und scheidet beide gleichmässig von den Schädeln der Reihengräberzeit.

	10 Schädel aus älteren prähistorichen Epochen:	1000 Schädel der modernen altbayerischen Landbevölkerung:	200 Schädel aus südbayerischen Reihengräbern der Völkerwanderung:
Dolichocephale bis Index 74,9 .	0 %	1 %	42 %
Mesocephale, Index 75,0—79,9 .	30 „	16 „	44 „
Brachycephale, Index 80 u. darüber	70 „	83 „	14 „
Summe:	100	100	100

Soweit wir die Verhältnisse bis jetzt überblicken können, drangen während der Völkerwanderungsperiode der heutigen Bevölkerung der westlichen Maingegenden Bayerns ähnliche, aber noch ausschliesslicher als diese aus Dolichocephalen und Mesocephalen bestehende kriegerische Stämme, namentlich Bajuwaren und Schwaben-Allemannen, mit Weibern und Kindern nach Süd-Bayern vor. Ihre körperlichen Reste sind es, welche wir in den Reihengräberfeldern begraben finden. Es waren der Mehrzahl nach noch Heiden: der Krieger wurde mit den Waffen, das Weib mit ihrem einfachen Schmuck, zu dem das Dolchmesser gehörte, bestattet. Diese Grabbeigaben, die charakteristischen Schädelformen, die Anlage der Nekropolen an landschaftlich schönen, einen weiten Ausblick gewährenden Stellen, ihre Orientirung nach dem Aufgang der Sonne u. a. machen die Reihengräber der Völkerwanderungs-Zeit sofort kenntlich.

Die langköpfigen „Nordstämme“ drangen, wie unsere Schädel-Messungen aus den älteren prähistorischen Epochen Süd-Bayerns beweisen, zwischen eine Bevölkerung ein, welche damals im Allgemeinen wenigstens ebenso brachycephal war wie die heutigen Südbayern und deren Schädeltypus in weitgehender Weise unserem modernen brachycephalen Typus entsprach.

Diese brachycephale südbayerische Bevölkerung, welche vor und während der Römerherrschaft durch den von ihnen im grössten Maassstab betriebenen ausgedehnten Ackerbau der

Digitized by Google

„Hochäcker" ihre volle Sesshaftigkeit beweist, muss sehr zahlreich gewesen sein, obwohl wir von ihren Skelettresten so wenig besitzen. Sie waren damals schon vollkommen christianisirt, sie hatten daher ihre Todten, soweit sie nicht noch, wie das in Regensburg und Augsburg für diese Zeit nachzuweisen ist, verbrannt wurden, um die schon bestehenden Kirchen oder Kapellen, in den in den Ortschaften selbst gelegenen Kirchhöfen bestattet, deren Umtrieb die Gebeine vernichten musste. Nur dem Umstand, dass die einbrechenden Nordstämme im Wesentlichen noch Heiden waren und der heidnischen Begräbnisssitte, der Bestattung der Leichen auf der freien Haide, wo sie für die Jahrhunderte ungestört liegen blieben, verdanken wir die vergleichsweise reichliche Erhaltung ihrer Gebeine.

Für die brachycephale christianisirte Bevölkerung Südbayerns beginnen mit der Annahme des Christenthums, also schon vor dem Einbruch der Nordstämme, die gleichen Verhältnisse, welche nach der vollen Christianisirung der in der Völkerwanderung eingedrungenen Stämme so gut wie alle Skelettreste vernichteten, sodass wir vom 6. Jahrhundert an bis in die Neuzeit Skelettreste der Bevölkerung überhaupt kaum mehr finden. Nur an wenig Orten, in Ossuarien und Vorhallen der Kirchen, haben sich Schädel und Gebeine gleichsam zufällig erhalten.

Die offenen Ossuarien, allen Unbilden des Wetters ausgesetzt, sind aber für eine dauernde Conservirung der Schädel ungeeignet, diese verrotten und zerfallen; und wahrscheinlich geht kein Schädel in einem offenen Beinhaus über die Mitte des vorigen Jahrhunderts hinaus; die durch Inschriften datirten Schädel stammen, soweit ich nachweisen konnte, fast ausnahmslos aus diesem, wenige aus dem Ende des vorigen Jahrhunderts.

Den Nordstämmen erschienen die im Lande sitzenden zum Theil wenigstens romanisirten Bewohner als „Wallen" oder „Wälsche". Die zahlreichen Ortsnamen in Südbayern, welche mit Walchen, Wahlen oder Wallen zusammengesetzt sind:

Digitized by Google

wie Katzwalchen, Traunwalchen, Walchenberg, Walchen, Wahlsperg u. v. a. beweisen, dass sich noch Jahrhunderte nach der Niederlassung der Nordstämme in Südbayern innerhalb der deutschsprechenden Bevölkerung Bayerns „wälsch-“ sprechende Gemeinden in abgesonderten Ansitzen erhalten hatten. J. E. von Koch-Sternfeld führt in seinem Werke: Salzburg etc. unter der Herrschaft der Römer S. 38 aus der zu Südbayern zu rechnenden Umgegend von Salzburg als solche Sitze von „Wallen“ unter den Germanen an: Wals, Walserfeld, Walchen und in alter Schreibweise: Walwis, Wallahouis, Wallwusariberg, Wallarium u. a.

Die Absonderung, in welcher sich anfänglich, wie die abgesonderten Begräbnissstätten beweisen, die eingewanderten heidnischen Stämme von den christlichen sesshaften Bewohnern des besetzten Landes hielten, konnte nach der Annahme des Christenthums von Seite der ersteren nicht aufrecht erhalten werden. Es trat, wie der Erfolg beweist, eine Mischung der eingewanderten Sieger mit den sesshaften Landeseingeborenen ein. Die Letzteren nahmen die Sprache der Sieger im Laufe der ersten auf die Einwanderung folgenden Jahrhunderte vollkommen an, ebenso wie sie vor der Völkerwanderungszeit unter der Herrschaft der Römer deren Sprache gelernt hatten. Bei dem Wiederaufdämmern der Geschichte nach den Völkerstürmen, welche die letzten Reste der Römerherrschaft weggefegt hatten, finden wir Südbayern von dem rein-deutschen Stamme der Bajuvaren besetzt; fast nur jene „wälschen“ Ortsnamen deuten äusserlich noch auf den Assimilirungsprocess zwischen den beiden Grundbestandtheilen des Volkes hin. Die Sprache und Sitte ist überall deutsch.

Körperlich jedoch, wenigstens in Beziehung auf den Schädelbau, sehen wir eine fast ebenso durchgreifende Beeinflussung der Sieger durch die sesshaften älteren Landesbewohner. Die dolichocephalen Schädelformen sind heute in Südbayern nahezu verschwunden, die siegreichen Einwanderer sind in Beziehung auf die Schädelform von dem brachycephalen Typus der alteingesessenen Bevölkerung gleichsam aufgesaugt.

Digitized by Google

Nach der Verschmelzung der in der Völkerwanderung nach Südbayern eingedrungenen Nordstämme mit der alteingesessenen Bevölkerung, sind nun in Südbayern die kraniologischen Verhältnisse wieder sehr annähernd die gleichen, wie wir sie vor der Völkerwanderungs-Periode konstatiren konnten. Die Brachycephalie ist wieder wie damals der herrschende Typus.

Vollkommen verschwunden ist jedoch der dolichocephale Typus unter unserem brachycephalen Volke keineswegs, seine Spuren lassen sich an vielen, im Allgemeinen unzweifelhaft dem brachycephalen Typus zugehörenden, Schädeln desselben nachweisen. Besonders kenntlich ist dieses dolichocephale Element bei brachycephalen oder mesocephalen Schädeln an einer weniger energischen Abrundung des Hinterhaupts; letzteres zeigt sich dann, wie typisch bei den Dolichocephalen, mehr oder weniger deutlich nach hinten verlängert, ausgezogen. Stellt man eine grössere Anzahl solcher brachycephaler Schädel mit verlängertem Hinterhaupt neben einander, so bemerkt man mit Ueberraschung, dass sich mehrfach auch andere dem dolichocephalen Typus zugehörende Bildungen an ihnen zeigen, z. B. Vorwölbung der Unterstirn, etwas hervorragende Augenbrauenbogen, tieferes Einsetzen der Nasenwurzel, bestimmte Bildungen des Gesichts-Skelettes. Wenn auch schwächer ausgeprägt, entsprechen doch die kraniologischen Verhältnisse unserer südbayerischen Brachycephalen einer Typen-Mischung derselben mit Dolichocephalen, ähnlich wie sie oben für die noch heute unter Dolichocephalen lebenden Brachycephalen der westlichen Maingegenden geschildert wurde, bei welchen nur der Natur der Sache nach die dolichocephale Beeinflussung noch energischer sein muss. In diesem Verhältniss liegt vor allem der oben angedeutete Unterschied der heutigen Brachycephalen Südbayerns von jenen vor der Völkerwanderungsperiode. —

Trotz aller der Völkerverschiebungen, welche während der Völkerwanderungsperiode auf Bayerischem Boden stattgefunden haben, finden wir sonach jetzt

Digitized by Google

nach anderthalb Jahrtausenden in wesentlichen Zügen das gleiche Bild der kraniologischen Verhältnisse wieder, welches vor der Völkerwanderung bestanden hat. Im Nordwesten haben die Dolicho- und Mesocephalen ihre alten Sitze bewahrt und ebenso im Süden des Landes die Brachycephalen. Der ansässige Grundstock der Bevölkerung war im Stande, sich die eingedrungenen Sieger in Beziehung auf den Schädelbau zu assimiliren.

Dieser Assimilirungs-Process, von welchem ein fortgeschrittenes Stadium die früh-mittelalterlichen Schädel Lindaus demonstriren, hatte schon begonnen, als die noch heidnischen dolichocephalen Nordstämme ihre Todten in den Nekropolen der Reihengräber bestatteten.

Aus der obenstehenden Zusammenstellung der Schädelformen aus südbayerischen Reihengräbern ergibt sich, dass unter den Dolichocephalen und zur Dolichocephalie neigenden Mesocephalen schon ein doch nicht ganz verschwindender Bruchtheil wahrer Brachycephalen auftreten. Die oben in einander gezeichneten Curven der Schädel aus Reihengräbern und aus dem modernen Ossuarium von Walleshausen (s. S. 48) beweisen, dass die unter die Reihengräber-Schädel eingestreuten Brachycephalen im Längenbreiten-Index vollkommen den Brachycephalen der heutigen südbayerischen Bevölkerung entsprechen. Die beiden brachycephalen Curvenabschnitte zeigen bis ins Einzelne Uebereinstimmung. Die brachycephale Seite der Curve der Reihengräberschädel reicht ebenso weit in die extremen Formen der Brachycephalie hinein wie die Curve der Schädel aus Walleshausen, ja es zeigen sich in den beiden correspondirenden Curvenabschnitten sogar die gleichen Theilmaxima für die Indices 80, 83 und 88. Wie mehrfach erwähnt, entspricht im Allgemeinen auch der sonstige Schädelbau der brachycephalen Reihengräberschädel dem brachycephalen Haupt-Typus der heutigen Südbayern ebenso, wie jenem vor der Völkerwanderung.

Es war also schon eine Blutmischung zwischen den beiden

Digitized by Google

differenten Volksbestandtheilen erfolgt und vielfach können wir Frauen als die Vermittler der brachycephalen Form nachweisen. Freilich steht nicht fest, ob diese Aufnahme brachycephaler Bestandtheile nicht schon vor der Festsetzung in Südbayern erfolgt ist, die Formen und die daraus sich ergebenden Folgen der Mischung würden die gleichen sein.

Wir haben sogar sichere Beweise dafür, dass schon vor der Völkerwanderungsperiode in friedlichem Verkehr an einem Grenzposten der Römerherrschaft gegen die Germanen eine Mischung der beiden kraniologischen Elemente stattgefunden hat. Untersuchungen über diesen Vorgang konnte ich an dem mustergiltig gesammelten Skelett- und Schädelmaterial anstellen, welche Herr Pfarrer Dahlem in Regensburg den dortigen Nekropolen aus der Römer-Zeit enthoben hat.

Regensburg hat jetzt eine exquisit kurzköpfige Bevölkerung. Ich habe in dem grossen Ossuarium der Michelskapelle zu St. Emmeran 100 Schädel der rel. modernen Stadtbevölkerung gemessen. Herr von Hölder, welcher vor mir diese Schädel durchgesehen und z. Theil gemessen hat, fand unter mehr als 200 Schädeln nur einen und zwar weiblichen dolichocephalen Schädel, welcher in meiner Reihe nicht vorkommt. Als Haupt-Maasse dieses dolichocephalen Schädels habe ich bestimmt:

Umfang 496; Länge 181; Breite 132—133; Höhe 133. Der Längenbreiten-Index beträgt sonach 73,47.[1])

Aus den von mir, wie das stets, um die Statistik nicht zu beeinflussen, geschah, ohne Wahl dem Ossuarium der Michelskapelle entnommenen Schädeln waren

	100 Schädel der rel. modernen Regensburger Stadtbevölkerung:
Dolichocephale bis Index 74,9	0
Mesocephale Index 75,0—79,9	5
Brachycephale Index 80,0 und darüber	95
Summe	100

1) Vielleicht ist der Schädel der eines eingewanderten weiblichen Dienstboten aus bayerisch West-Franken.

Digitized by Google

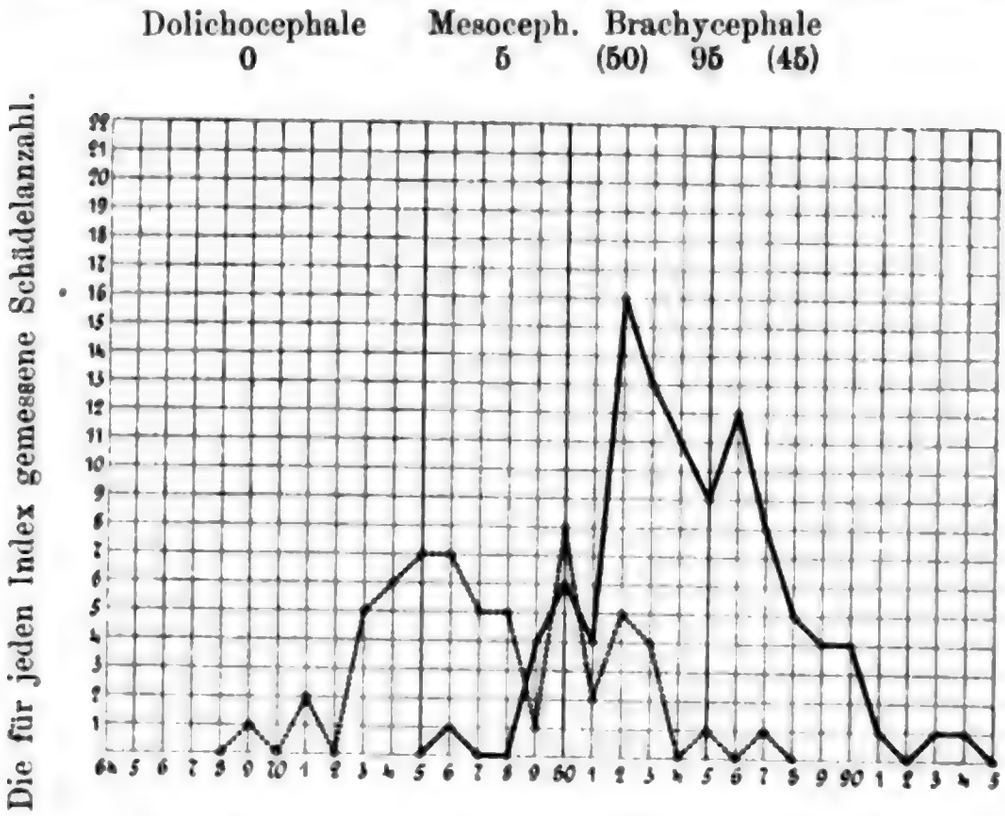
Die Brachycephalie der modernen Stadtbevölkerung Regensburgs ist danach ganz extrem, extremer als ich sie bis dahin irgendwo anders beobachtet hatte.[1]) Nicht nur fehlen in der vorstehenden Reihe Dolichocephale ganz, auch die Mesocephalen sinken in ihrer Anzahl bis auf 5 Procent herunter und 4 von diesen 5 stehen mit einem Index über 79 hart an der Grenze der wahren Brachycephalie; der 5. mesocephale Schädel hat den Index 76,92. Die Gesammt-Schwankungsbreite der Längen-Breiten-Indices beträgt 76,92 bis 94,67. Die untenstehende Curve macht die Einzelresultate der Messungen anschaulich.

Kurve IV und V.

Regensburger Stadtbevölkerung:

IV. Die Vertheilung der Längenbreiten-Indices von 100 Schädeln der modernen Stadtbevölkerung.

V. von 60 Schädeln aus der Zeit der Römerherrschaft in Castrum Reginum vom 2. bis 4. Jahrhundert.



Fortschreitende Reihe der Längenbreiten-Indices.

1) Die speziellen Messungsergebnisse an den 100 gemessenen Schädeln s. im Anhang Tabelle I.

Digitized by Google

Herr Dahlem hat, wie gesagt, aus den römischen Nekropolen Regensburgs, dem Castrum Reginum der Römer, einen wahren Schatz somatisch-anthropologischen Materials zusammen gebracht, welchen er mir mit grösster Liberalität zu untersuchen gestattete. Ich habe schon an anderer Stelle einige Hauptresultate mitgetheilt,[1]) glaube aber hier in diesem Zusammenhang nochmals auf jene Untersuchungen zurückkommen zu sollen.

Die archäologischen Beigaben, namentlich die zahlreichen Münzfunde in den Gräbern, gestatteten Herrn Dahlem eine sehr exakte Datirung derselben. Die Mehrzahl der Gräber zeigte Leichenbrand, nur etwa je das 10. Grab Bestattung ohne Verbrennung. Etwa 60 Schädel aus diesen Bestattungsgräbern gestatteten mir eine genaue Messung. Nach Herrn Dahlems Bestimmungen beginnen die Begräbnisse im zweiten und schliessen im vierten nachchristlichen Jahrhundert. Aus dem 2. Jahrhundert konnte ich 15 Schädel messen, aus dem Ende des 2. und Anfang des 3. Jahrhunderts 9. Aus dem 3. Jahrhundert bis zum Anfang des 4. waren 19, aus dem 4. Jahrhundert 16 messbare Schädel vorhanden.

Castrum Reginum, hart an der Grenze gegen die Germanen gelegen, ergänzte seine Besatzung, deren Gebeine Herr Dahlem aus den Nekropolen erhoben hat, zum wesentlichen Theil aus den benachbarten germanischen Stämmen, zum anderen Theil aus der römischen Provinzialbevölkerung der Nachbarschaft, deren hochgradige Brachycephalie wir für die damalige und eine frühere Zeit im Vorstehenden nachgewiesen haben.

Der Längenbreiten-Index aller der 60 von mir gemessenen Schädel vom 2. bis 4. Jahrhundert vertheilt sich in folgender Weise:

---

1) l. c. Abschnitt II. S. 60 ff.

Digitized by Google

60 Schädel aus römischen Nekropolen Regensburgs.

Dolichocephale bis Index 74,9	14	23%
Mesocephale Index 75,0—79,9	25	42 „
Brachycephale Index 80,0 und darüber	21	35 „
Summe	60	100

Während uns unter den oben besprochenen römischen und vorrömischen Schädeln der südbayerischen Bevölkerung dolichocephale Formen nicht begegneten, ist hier in Castrum Reginum mehr als $^1/_4$ aller Schädel dolichocephal.

Soviel aus meinen Aufschreibungen hervorgeht, gehörten alle diese Langschädel dem männlichen Theil der Besatzung an mit Ausnahme eines einzigen mit einem Index von 73.7, welcher von einem Weibe stammte. Im Ganzen habe ich übrigens nur vier unverkennbar weibliche Schädel verzeichnet und zwei Kinderschädel. Drei von diesen Frauen-Schädeln sind exquisit brachycephal.

Wenn wir den Zahlen dieser statistischen Aufnahme vollen Glauben schenken dürfen, so war in der ersten Zeit der Belegung der Nekropolen die Besatzung von Castrum Reginum noch weniger mit Dolichocephalen gemischt als später, und auch gegen Ende der römischen Periode nehmen die dolichocephalen Schädel wieder an relativer Anzahl ab. Es erklärt sich das aus den mehr oder weniger freundschaftlichen Beziehungen zu den benachbarten (germanischen) Nordstämmen, welche im Anfang noch nicht so eng geknüpft waren und in der letzten Zeit, vor dem Beginn des Kampfes, wieder lockerer werden mussten.

Aus dem ältesten Theil der Nekropolen, aus dem 2. nachchristlichen Jahrhundert, sehen wir unter 15 Schädeln nur einen einzigen Dolichocephalen neben Mesocephalen und Brachycephalen. Die Reihe ist:

Dolichocephale bis Index 74,9	1	7 %
Mesocephale von Index 75,0—79,9	7	46,5 „
Brachycephale Index 80,0 und darüber	7	46,5 „
Summe	15	100,0

Digitized by Google

Aus dem Ende des 2. bis Anfang des 4. Jahrhunderts waren 28 Schädel zu untersuchen, darunter waren neben 6 Brachycephalen 9 Dolichocephale, die Reihe ist folgende:

Dolichocephale, bis Index 74,9	9	32%
Mesocephale, von Index 75,0—79,9	13	46 „
Brachycephale, Index 80,0 und darüber	6	22 „
Summe	28	100

In der letzten Periode, also im Laufe des 4. nachchristlichen Jahrhunderts, überwiegen wieder die Brachycephalen, unter 17 Schädeln sind 4 dolichocephal = 23%, 6 mesocephal = 35% und 7 brachycephal = 42%.

In Regensburg hatte sich sonach schon vor dem Beginn der Völkerwanderungs-Periode in friedlicher Weise eine Vermischung der brachycephalen mit den dolichocephalen Bevölkerungs-Elementen des Landes gemacht.

Was auf römischer Seite erfolgte, war, wie uns die Untersuchung der Schädel der Reihengräber-Stämme ergeben hat, wenn auch in geringerem Grade, auch bei diesen schon eingetreten.

Das erklärt es, dass sich in den südbayerischen Reihengräbern der Völkerwanderungs-Periode schon brachycephale Formen vom Typus der alt-eingesessenen süd-bayerischen Bevölkerung finden.

Es hatte in Südbayern der Process der Verschmelzung der Nord- und Süd-Stämme schon begonnen, dessen Resultat das heutige Bayerische Volksthum ist.

Die Schädel aus der St. Stefanskirche in Lindau zeigen uns eine bisher noch fehlende Zwischenstufe dieses Verschmelzungs-Processes.

Digitized by Google

Die Gehirngrösse resp. die Schädelkapacität der brachycephalen und der dolichocephalen Bayern.

Aus der Tabelle I S. 11 ergeben sich die Resultate der Messungen der Schädelkapacität der frühmittelalterlichen Schädel aus Lindau, aus welcher wir auf die Gehirngrösse der damaligen Bevölkerung zurückschliessen dürfen.

Es konnte die Kapacität von 10 Schädeln bestimmt werden. Es ergab sich:

mittlere Kapacität von 10 nach dem Geschlecht gemischten Schädeln aus der früh-mittelalterlichen Bevölkerung Lindaus . . . . . 1388 ccm.

Das Resultat kann verglichen werden mit dem, welches ich an 200 nach dem Geschlecht gemischten Schädeln der modernen Münchener Stadtbevölkerung gewonnen habe;[1]) ebenso an 200 nach dem Geschlecht gemischten Schädeln der altbayerischen Landbevölkerung.[2]) Wir stellen die betreffenden Zahlenwerthe neben einander in der folgenden kleinen Tabelle:

	frühmittelalterliche Stadtbevölkerung Lindaus	moderne Stadtbevölkerung Münchens	moderne altbayerische Landbevölkerung
Schädelkapacität in ccm	1388	1442	1419

Danach ergibt sich, dass seit dem frühen Mittelalter die mittlere Schädelkapacität und mit ihr entsprechend die Gehirngrösse der südbayerischen Bevölkerung bis zur Gegenwart nicht unbeträchtlich gewonnen hat.

Wir sind im Stande, dieses Resultat, welches mit den bekannten älteren Angaben Brocas stimmt, noch näher zu zergliedern, wie das in der Haupt-Tabelle schon angedeutet ist.

Ziehen wir die Mittel der Schädelkapacität nach den Hauptschädeltypen gesondert, so ergeben sich für die

	frühmittelalterliche Bevölkerung Lindaus		
	(3) Dolichocephale:	(4) Mesocephale:	(2) Brachycephale:
Schädelkapacität in ccm	1350	1378	1510

1) J. Ranke, Stadt- und Landbevölkerung, verglichen in Beziehung auf die Grösse ihres Hirnraumes. Mit 3 Tafeln. Stuttgart J. G. Cotta. 1882.

2) l. c. ebenda.

Digitized by Google

Die Dolichocephalen und Mesocephalen der frühmittelalterlichen Bevölkerung Lindaus haben sonach, eine im Mittel beträchtlich **geringere** Schädelkapacität als die Brachycephalen, deren Schädelkapacität im Gegensatz dazu sehr gross erscheint.

Man könnte einwerfen, dass die Anzahl der Schädel, welche hier zum Vergleich herbeigezogen werden konnten, eine zu geringe sei, um das Resultat für die südbayerischen Verhältnisse als ein allgemein giltiges erscheinen zu lassen.

Wie mehrfach hervorgehoben, zeigt die moderne Bevölkerung der Nord-West-fränkischen Gegenden Bayerns, wie meine Untersuchungen der Ossuarien in Aschaffenburg und Kloster Ebrach ergaben, noch jetzt eine Mischung von Dolichocephalen und Mesocephalen mit Brachycephalen, welche den Verhältnissen der frühmittelalterlichen Lindauer Bevölkerung sehr nahezu entspricht. Von Ebrach stehen 100 Schädel für die Kapacitäts-Messung zur Verfügung,[1]) darunter befinden sich 25 Dolichocephale, 28 Mesocephale und 47 Brachycephale. Ich stelle im Folgenden die mittleren Resultate der Kapacitäts-Bestimmungen an den Lindauer und Ebracher Schädeln neben einander:

	Schädelkapacität in ccm		
	Dolichocephale:	Mesocephale:	Brachycephale:
Frühmittelalterliche Bevölkerung Lindaus . . .	(3) 1350	(4) 1378	(2) 1510
Moderne Bevölkerung des bayerischen Nord-West-Frankens (Ebrach) . .	(25) 1386	(28) 1442	(47) 1463

Das beträchtliche Uebergewicht der Schädelkapacität der Brachycephalen gegenüber den Dolicho- und Mesocephalen unter der Bevölkerung Bayerns in alter und neuer Zeit ist damit erwiesen.

Damit fällt die oft gemachte Behauptung von der höheren Stellung der Dolichocephalen, namentlich bezüglich der Gehirn-Entwickelung, gegenüber den Brachycephalen in Süd-Deutschland in Nichts zusammen.

1) s. die Tabelle II. im Anhang.

Digitized by Google

Das ist gewiss, dass unsere bayerischen Brachycephalen mehr Hirnraum und dem entsprechend mehr Gehirn besitzen, als unsere Dolichocephalen. Nach der landläufigen Hypothese würde dem grösseren Gehirn eine höhere psychische Begabung entsprechen, wir ziehen diesen unerweisbaren Schluss nicht.

Die folgenden Resultate unserer Untersuchungen weisen auch die andere Fabel von den hochgewachsenen blonden Dolichocephalen und den kleinen brünetten Brachycephalen in Deutschland für unser Untersuchungsgebiet zurück.

Die Körpergrösse der jetzigen und der früh-mittelalterlichen Bevölkerung Lindaus.

In grosser Anzahl wurden von den langen Skelettknochen namentlich Oberschenkelbeine eingesendet, sodass von letzteren 100 rechte und 100 linke gemessen werden konnten. Ihre nähere Beschreibung soll später erfolgen.

Die langen Knochen haben eine erhöhte ethnologisch-anthropologische Bedeutung erhalten, seitdem durch französische Forscher[1]) eine Methode ausgebildet worden ist, welche an Stelle der bisherigen Schätzungen für die europäische Bevölkerung[2]) eine genauere Berechnung der mittleren Körpergrösse einer geschlossenen Bevölkerungsgruppe gestattet, wenn von dieser eine grössere Anzahl langer Knochen der Messung unterzogen werden kann.

Für Lindau ist das von besonderer Bedeutung, da für

---

1) L. Manouvrier. La termination de la taille d'après les grands os des membres. Mém. S. T. IV. 1892. S. 347—402. 2. Dasselbe im Auszug in Rev. mens. 1892. S. 227—233. — Rahon, Recherches sur les ossements humains, Mém. 2. S. T. IV. 1893. S. 403—458. Dasselbe im Auszug in Rev. mens. 1892. S. 234—237. — Lehmann-Nitsche, Ueber die langen Knochen der südbayerischen Reihengräberbevölkerung, in J. Ranke, Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. XI. 1895. Hft. 3—4.

2) Speziell für die Lyoner Bevölkerung.

Digitized by Google

diese Stadt aus meiner Bestimmung der Körpergrösse der Militärpflichtigen in Bayern[1]) die mittlere Körpergrösse der modernen Bevölkerung bekannt ist.

Wie von allen anderen Bezirken habe ich zum Behufe der Grössenstatistik die Resultate der Körpermessung jedes einzelnen Individuums der Militärpflichtigen aufgezeichnet und das Gesammtresultat in Kurvenform zusammengefasst. Hiefür wurde die Körpergrösse nach Centimetern fortschreitend als Abscisse verwendet, auf welche dann über der betreffenden Grössenzahl die Anzahl der von derselben Grösse gemessenen Individuen als Ordinaten verzeichnet wurden. Die Anzahl der Militärpflichtigen in Lindau im Jahre 1875, dem Jahrgang meiner Statistik, betrug 46 Individuen. Die Summe ihrer Körpergrössen betrug 7520, mit 46 dividirt ergibt das

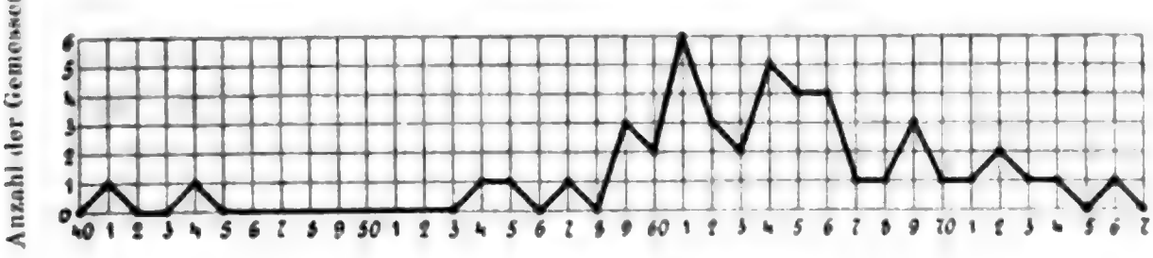
1,635 Meter

als mittlere Körpergrösse der Lindauer Militärpflichtigen des Jahrgangs 1875.

Die folgende Grössenkurve macht dieses Resultat anschaulich.

Lindau Stadt.

Körpergrösse von 46 Militärpflichtigen des Jahres 1875.



Körpergrösse in Centimetern.

Die Körpergrösse ist sonach bemerkenswerth gering im Verhältniss gegen andere Gegenden Südbayerns, wo ich sie,

1) J. Ranke, Zur Statistik und Physiologie der Körpergrösse der bayerischen Militärpflichtigen in den 7 rechtsrheinischen Regierungsbezirken nach den Vorstellungslisten der kgl. Ober-Ersatzkommissionen vom Jahr 1875 mit 2 farbigen Karten. In J. Ranke, Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns Bd. IV.

Digitiz

z. B. für Tölz und Berchtesgaden, zu c. 1,700 Meter bestimmt habe.

Von den 200 Oberschenkelbeinen der früh-mittelalterlichen Bevölkerung Lindaus, welche gemessen werden konnten, waren 136, 71 der rechten und 65 der linken Körperseite angehörend, als zweifellos männlich zu konstatiren.

Die mittlere Länge dieser 136 Oberschenkelknochen, in natürlicher Stellung gemessen, beträgt 439 Millimeter. Nach Manouvriers Resultaten müssen der Länge der trockenen Knochen für den Verlust des Knorpels 2 Millimeter zugezählt werden, um die Länge der Knochen beim Lebenden zu erhalten, die mittlere Länge der Oberschenkelknochen steigt danach auf

441 Millimeter.

Für diese Zahl wurde in den Tabellen Manouvriers die entsprechende Körpergrösse gesucht und von der gefundenen Zahl nach Vorschrift Manouvriers noch 2 Centimeter abgezogen, da um so viel im Mittel nach seinen Bestimmungen der Körper durch die gestreckte Lage der Wirbelsäule bei der Leiche länger ist als bei dem Lebenden.

Die Tabelle Manouvriers enthält für die Oberschenkelbein-Länge von 441 Millimeter als Körpergrösse der Leiche 1656 Millimeter; unter Abrechnung von 20 Millimeter ergibt das für die mittlere Körpergrösse der alten Lindauer:

1,636 Millimeter;

die mittlere Körpergrösse der modernen Lindauer:

1,635 Millimeter,

welche ich für die Militärpflichtigen gefunden habe, ist sonach mit der der frühmittelalterlichen Stadtbevölkerung identisch.

Trotz der Aenderung der kraniologischen Verhältnisse hat sich die Körpergrösse in dieser langen Zeit unverändert erhalten; es ist das das gleiche Resultat, welches auch unsere statistischen Grössenaufnahmen der Militärpflichtigen und die Grössenberechnungen nach den langen Knochen für die moderne und für die

Digitized by Google

prähistorische Bevölkerung Südbayerns aus der Völkerwanderungsperiode im Allgemeinen ergeben haben.

Ich habe die langen Knochen der südbayerischen Reihengräberbevölkerung in meinem anthropologischen Institut durch Herrn Lehmann-Nitsche untersuchen und aus ihnen die Körpergrösse der in den etwa anderthalb Jahrtausende alten Gräbern Bestatteten in der oben dargelegten Weise berechnen lassen.[1])

Die grösste Anzahl der Knochen hatte ich aus dem grossen Reihengräberfelde von Allach bei München erhalten, welches unter meiner Leitung von den Herren Michelböck, Drexl u. a. ausgehoben worden ist. Allach gehört zu dem Bezirksamte München. Als Mittelgrösse für letzteres Bezirksamt (ohne die Stadt München selbst) habe ich bestimmt 1,68 Meter. Die Berechnung der Körpergrösse jener prähistorischen Bevölkerung der gleichen Gegend ergab für die Männer

1,683 Meter.

Die Körpergrösse der prähistorischen und der modernen Bewohner unseres Landbezirks sind sonach ebenfalls identisch, obwohl jene überwiegend dolichocephal und die heutige Bevölkerung fast ausschliesslich brachycephal ist. Die Körpergrösse erweist sich sonach als eine konstantere somatische Eigenschaft als die Schädelform, letztere hat sich typisch verändert, während erstere unverändert erscheint.

Es ergibt sich sonach, dass die Veränderung der Schädelform von der Dolichocephalie zur Brachycephalie keine Veränderung in der Körpergrösse der Bevölkerung Bayerns hervorgebracht hat.

Schon im Jahre 1882 habe ich statistisch nachgewiesen,[2]) dass unter der heutigen Bevölkerung Bayerns die Blonden

---

1) Aus dem Münchener anthropologischen Institut. Ueber die langen Knochen der südbayerischen Reihengräberbevölkerung von Dr. R. Lehmann-Nitsche. J. Ranke, Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns Bd. XI. 1894. Auch als Doktor-Dissertation separat erschienen.

2) J. Ranke, Correspondenzblatt der deutschen anthropolog. Gesellschaft (Kongress in Frankfurt a/M.) 1882. S. 226. s. auch J. Ranke „Der Mensch" Bd. II. S. 124.

Digitized by Google

nicht grösser sind als die Brünetten. Dasselbe gilt nach Weisbach[1]) für die Serbo-Kroaten in den Küstenländern der Adria, wo die Blonden recht selten sind. Weisbach fand dort für

Blonde (116) die Mittelgrösse 1,675 Meter,
Brünette (1140) „ „ 1,692 „

Auch für ganz Deutschland existirt nach den bisherigen Untersuchungen ein Unterschied in der Mittelgrösse der Blonden und Brünetten nicht. Nach Meisner[2]) haben die vorwiegend blonden Schleswiger Rekruten eine mittlere Grösse von 1,692 Meter, für die am häufigsten brünetten Altbayern (Rosenheim) fand ich die Mittelgrösse der Militärpflichtigen in jener mehrfach erwähnten Grössenstatistik zu 1,707 Meter. Auch die grossartigen statistischen Aufnahmen von J. H. Baxter[3]) über die in den Vereinigten Staaten Nordamerikas während des Sklaven-Krieges der Nord-Staaten und Südstaaten zum Militärdienst sich Meldenden ergibt für Deutsche das gleiche Resultat, ebenso für Nord-Amerikaner, Engländer und Irländer. Baxters Zahlen sind:

Heimatland:	Zahl der Gemessenen:	darunter in Procenten		Grösse in Meter	
		Blonde:	Brünette:	Blonde:	Brünette:
Britisch Amerika	14365	66,2	33,8	1,7061	1,7037
Vereinigte Staaten	190621	66,4	33,6	1,7184	1,7215
England	9649	70,5	29,5	1,6912	1,6922
Irland	28995	70,3	29,7	1,6956	1,6956
Deutschland	**29060**	**69,5**	**30,5**	**1,6899**	**1,6956**
Summa:	273690	—	—	1,7002	1,7017

Für die unter der Viertel-Million der Untersuchten sich findenden 29 Tausend Deutsche aus allen deutschen Gauen beträgt die Differenz der Mittelwerthe für die mittlere Körpergrösse

1) A. Weisbach, Die Serbo-Kroaten der adriatischen Küstenländer. Berlin 1884.

2) Meisner, Die Körpergrösse der Wehrpflichtigen in Holstein. 1889. J. Ranke, Archiv f. Anthropol. Bd. XVIII. S. 101.

3) J. H. Baxter, Statist. med. and anthrop. 2. Bde. Washington 1875.

Digitized by Google

der Blonden und Brünetten nur 0,0057 Meter, d. h. nicht ganz 6 Millimeter Plus zu Gunsten der Brünetten, in Wahrheit ist diese Differenz = 0. —

Zum Schluss möchte ich nicht unerwähnt lassen, dass die früh-mittelalterliche Bevölkerung Lindaus von der modernen südbayerischen Bevölkerung bezüglich ihrer Schädel- und Skelettbildung sich unterscheidet:

durch das Fehlen fast jeglicher traumatischen Einwirkungen während des Lebens,

durch das fast vollkommene Fehlen der Schläfenenge,

durch das Fehlen, resp. durch das auffallend seltene Vorkommen, von Worm'schen Knochen und von sonstigen Naht- und Fontanellknochen sowie von persistirenden fötalen Nähten.

Alles das deutet wohl auf Fehlen der jetzt so viel verbreiteten Rachitis in jener Zeit; dafür sprechen auch die langen Knochen, an welchen ich Spuren rachitischer Verkrümmungen bisher nicht gefunden habe.

Digitized by Google

Tabelle I.

Regensburger Stadtbevölkerung

100 Schädel aus dem Ossuarium von St. Emmeran, Michelskapelle.

Horizontalumfang, grösste Länge, grösste Breite, ganze Höhe (nach dem Längenbreiten-Index geordnet).

Laufende Nummer	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Bemerkungen
1	3	554	195	150	131	76,92	67,81	87,33	Schläfenenge
2	94	545	191	151	138	79,05	72,25	91,39	Stirnnaht, Schläfenenge,
3	86	516	178	141	129	79,21	71,91	91,49	Hinterhaupt ausgezogen
4	79	522	182	145	124	79,67	68,13	85,51	
5	78	524	183	146	130	79,78	71,04	89,04	
6	41	512	177	142	133	80,22	76,26	93,66	
7	8	533	183	147	135	80,32	73,77	91,83	
8	69	507	173	139	123	80,34	71,09	88,49	
9	28	496	169	136	127	80,47	75,14	93,38	
10	81	535	185	149	143	80,54	77,29	95,97	Schläfenenge
11	36	530	182	147	134	80,77	73,62	91,15	Schläfenenge
12	34	520	179	145	129	81,00	72,06	88,96	
13	47	508	174	142	129	81,61	74,13	90,84	
14	24	525	180	147	135	81,66	74,99	91,83	Schläfenenge
15	96	555	191	156	145	81,67	75,91	92,94	
16	21	508	178	146	137	82,02	76,96	93,83	Schläfenenge
17	18	541	180	148	130	82,22	72,22	87,83	
18	16	535	184	151	135	82,06	73,37	89,40	
19	4	520	179	147	131	82,12	73,18	89,11	
20	39	524	179	147	134	82,12	74,85	91,15	
21	25	508	168	138	132	82,14	78,57	95,65	Schläfenenge beiderseits
22	43	550	186	153	142	82,25	76,34	92,80	Schläfenschaltknochen
23	15	530	181	149	132	82,32	72,92	88,59	
24	33	547	187	154	142	82,35	75,93	92,20	
25	68	519	176	145	135	82,38	76,70	93,10	
26	31	497	171	141	131	82,45	76,61	92,90	
27	75	502	173	143	115	82,66	66,47	80,42	
28	97	533	179	148	141	82,68	78,77	95,26	Viereckiger Fontanellknochen der grossen Fontanelle im Anfang der Sagittalnaht.
29	37	554	191	158	135	82,72	70,68	91,21	
30	50	534	182	151	136	82,96	74,72	90,06	Schläfenenge
31	1	543	188	156	134	82,98	71,27	85,89	
32	90	520	177	147	131	83,05	74,01	89,11	Schläfenenge
33	11	543	183	152	133	83,06	72,67	87,50	
34	35	518	178	148	123	83,14	70,22	83,10	
35	56	527	173	144	129	83,23	74,56	89,58	

Digitized by Google

Laufende Nummer	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Bemerkungen
36	87	525	181	151	141	83,42	77,90	93,37	
37	72	525	175	146	136	83,43	77,71	93,15	
38	17	530	182	152	136	83,51	74,72	89,47	
39	2	545	188	157	124	83,51	65,95	78,98	
40	14	542	183	153	134	83,60	73,22	87,57	
41	22	554	189	158	137	83,60	72,48	86,71	
42	83	509	177	148	120	83,61	67,79	81,08	Schläfenenge
43	99	486	165	138	118	83,63	71,51	85,50	Einfacher Spitzenknochen
44	42	509	173	145	127	83,81	73,41	87,58	
45	27	520	175	147	133	84,00	76,00	90,47	
46	45	518	176	148	128	84,09	72,72	86,48	Schläfenenge
47	80	522	177	149	135	84,18	76,26	90,60	
48	67	520	179	151	140	84,35	78,21	92,71	
49	51	495	167	141	128	84,43	76,64	90,78	
50	89	490	167	141	121	84,43	72,45	85,81	
51	66	525	174	147	142	84,48	81,61	96,59	
52	71	523	182	154	125	84,61	68,68	81,16	
53	84	535	179	152	135	84,91	75,41	88,81	
54	32	512	173	147	133	84,97	76,87	90,47	Stirnnaht, Lambdanaht
55	52	510	175	147	132	84,97	76,30	89,79	durch Worm'sche Knochen
56	93	544	188	160	141	85,10	75,00	88,12	doppelt
57	61	520	176	150	127	85,22	72,15	84,66	
58	54	500	170	145	123	85,29	72,35	84,82	
59	5	550	184	157	146	85,32	79,34	92,99	
60	19	532	179	153	142	85,47	79,33	92,80	
61	12	495	166	142	126	85,54	75,90	88,73	
62	59	543	180	154	136	85,55	75,55	88,31	Stirnnaht
63	76	536	181	155	136	85,63	75,13	87,74	Schläfenenge
64	85	512	175	150	122	85,71	69,71	81,33	
65	48	535	180	155	139	86,11	77,22	81,29	
66	57	532	180	155	126	86,11	70,00	81,99	
67	9	518	174	150	123	86,20	70,69	90,58	
68	53	490	160	138	125	86,25	78,12	88,74	
69	73	521	175	151	134	86,28	76,57	88,07	Schläfenenge
70	100	522	175	151	133	86,28	76,00	91,03	Vollständiger Inkaknochen,
71	29	513	168	145	132	86,31	78,57	86,71	Schläfenenge
72	23	540	183	158	137	86,33	74,86	90,34	Schläfenenge
73	64	505	167	145	131	86,82	78,44	91,78	Schläfenenge
74	91	509	168	146	134	86,90	79,76	88,23	
75	40	527	176	153	135	86,93	76,70	88,88	
76	62	530	176	153	136	86,93	77,27	89,74	Schläfenenge
77	13	536	179	156	140	87,15	78,21	84,10	Schläfenenge
78	7	511	173	151	127	87,28	73,40	84,10	
79	65	530	174	152	137	87,35	78,73	90,13	
80	98	544	183	160	129	87,43	70,49	80,62	
81	49	502	168	147	129	87,50	76,78	87,75	

Digitized by Google

Laufende Nummer	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Bemerkungen
82	82	480	160	140	123	87,50	76,87	87,85	Schläfenenge
83	70	529	177	155	133	87,57	75,14	85,80	Schläfenschaltknochen beiderseits, Schläfenenge
84	44	533	178	156	142	87,64	79,77	91,02	Schläfenenge
85	55	501	168	148	127	88,09	75,59	85,80	Schläfenenge
86	77	500	168	148	128	88,09	76,19	86,48	
87	58	503	166	147	122	88,55	73,49	82,99	Schläfenenge
88	10	538	176	156	125	88,63	71,02	80,12	Stirnnaht
89	6	525	170	151	130	88,82	76,47	86,09	Fortsetzung der Kranznaht in die Ala magna oss. sph. links, fast 2 cm lang
90	60	545	178	159	140	89,32	78,65	88,05	
91	79	490	162	145	127	89,50	78,39	87,58	Schläfenenge
92	63	540	182	163	133	89,55	73,07	81,59	
93	92	520	169	152	133	89,94	78,69	87,50	
94	95	568	181	163	139	90,05	76,79	85,27	
95	46	515	169	153	141	90,53	83,43	92,15	
96	30	531	171	155	132	90,64	77,19	85,16	
97	88	524	172	156	127	90,70	73,83	81,41	
98	38	532	174	160	137	91,95	78,73	85,62	
99	20	500	161	150	132	93,16	81,98	87,99	
100	26	539	169	160	136	94,67	80,47	85,00	Einfacher grosser Spitzenknochen
Im Mittel:		**523,3**	**176,6**	**149,7**	**132,2**	**84,8**	**75,0**	**88,2**	

Digitized by Google

Tabelle II.

100 Schädel aus Kloster Ebrach.

Horizontaler Umfang; grösste Länge; grösste Breite; ganze Höhe; Capacität (nach dem Längenbreiten-Index aufsteigend geordnet).

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite I mm	Ganze Höhe I mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Ohr-Höhe	Längen-Ohrhöhen-Index	Schädel-Capacität ccm
1	86	472	170	117	121	68,8	71,2	103,0	107	62,9	1125
2	83	511	189	131	131	69,3	69,3	100,0	109	57,7	1370
3	32	530	192	134	134	69,8	69,8	100,0	112	58,3	1480
4	29	525	189	133	124	70,4	65,6	93,2	105	55,8	1340
5	81	537	199	141	139	70,9	69,8	98,6	121	60,8	1560
6	84	505	183	130	125	71,0	68,3	96,1	112	61,2	1340
7	31	542	198	141	142	71,2	71,7	100,7	114	57,6	1650
8	69	525	192	137	133	71,3	69,3	97,1	115	59,9	1480
9	1	522	154	139	142	71,6	73,2	102,2	122	62,9	1425
10	7	500	181	130	132	71,8	72,9	101,5	115	63,5	1210
11	48	529	192	138	—	71,9	—	—	117	60,9	1330
12	6	529	191	138	130	72,3	68,1	94,2	—	—	1385
13	5	535	194	141	135	72,7	69,6	95,7	119	61,3	1515
14	77	555	183	133	132	72,7	72,1	99,2	114	62,3	1200
15	78	526	191	139	132	72,8	69,1	95,0	112	58,6	1460
16	2	517	185	135	135	73,0	73,0	100,0	114	61,6	1320
17	71	509	183	134	124	73,2	67,8	92,5	113	61,7	1310
18	95	545	199	146	—	73,4	—	—	117	58,8	1540
19	56	499	179	132	132	73,7	73,7	100,0	110	61,5	1330
20	3	505	179	133	130	74,5	72,6	97,7	108	60,3	1270
21	14	516	185	138	132	74,6	71,4	95,6	114	61,6	1420
22	66	518	185	138	132	74,6	71,4	95,6	117	63,2	1360
23	67	532	193	144	134	74,6	69,4	93,1	116	60,1	1530
24	90	513	185	138	133	74,6	71,9	96,4	116	62,7	1415
25	58	469	170	127	123	74,7	72,4	96,8	109	64,1	1090
		25 dolichocephale Schädel haben im Mittel:									1386 cc.
26	23	541	192	144	131	75,0	68,2	91,0	117	60,9	1510
27	55	517	185	139	123	75,1	68,5	88,5	108	58,4	1380
28	15	506	180	136	124	75,5	68,9	91,2	110	61,1	1380
29	4	497	176	133	119	75,6	67,6	89,5	103	58,5	1305
30	73	539	193	146	137	75,6	71,0	93,8	122	63,2	1570
31	79	510	181	137	134	75,7	74,0	97,8	114	63,0	1480
32	96	540	189	143	131	75,7	69,3	91,6	116	61,4	1550
33	99	514	183	139	128	76,0	69,9	92,1	111	61,2	1410
34	51	530	188	143	137	76,1	72,9	95,8	116	61,7	1460
35	91	520	181	139	128	76,8	70,7	92,1	112	61,8	1450
36	34	518	182	140	127	76,9	69,8	90,7	113	62,8	1410

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite I mm	Ganze Höhe I mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Ohr-Höhe	Längen-Ohrhöhen-Index	Schädel-Capacität ccm
37	21	542	188	145	128	77,1	68,1	88,3	110	58,5	1440
38	85	500	180	139	126	77,2	70,0	90,6	110	61,1	1300
39	35	522	181	140	132	77,3	72,9	94,3	113	62,4	1390
40	76	550	195	151	122	77,4	62,6	80,8	119	61,0	1450
41	93	492	174	135	126	77,6	72,4	93,3	109	62,7	1230
42	49	510	181	141	133	77,9	73,5	94,3	114	63,0	1530
43	57	530	187	146	123	78,1	65,8	84,2	114	61,0	1450
44	53	531	188	147	132	78,2	70,2	89,8	116	61,7	1530
45	9	509	176	138	126	78,4	71,6	91,3	110	63,1	1340
46	41	520	185	145	127	78,4	68,6	87,6	111	60,0	1355
47	75	540	188	148	137	78,7	72,9	92,6	121	61,4	1620
48	33	530	187	148	134	79,1	71,7	90,5	113	60,4	1535
49	11	530	188	149	132	79,2	70,2	88,6	114	60,6	1330
50	12	524	175	139	128	79,4	73,1	92,1	113	64,6	1400
51	30	522	185	147	136	79,5	73,5	92,5	118	63,8	1550
52	27	540	191	152	—	79,6	—	—	117	61,3	1500
53	16	551	194	155	134	79,9	69,1	86,6	113	58,2	1530
		28 mesocephale Schädel haben im Mittel:									1442
54	13	503	172	138	126	80,2	73,3	91,3	111	64,5	1260
55	24	520	179	144	137	80,4	76,5	95,1	121	67,6	1440
56	44	521	181	146	124	80,7	68,5	84,9	110	60,7	1420
57	82	498	172	139	126	80,8	73,3	90,6	106	61,6	1250
58	50	—	179	145	141	81,0	78,8	97,2	121	67,6	1465
59	92	516	179	145	125	81,0	69,8	86,2	112	62,6	1430
60	54	537	182	148	129	81,3	70,9	87,2	115	63,2	1570
61	62	512	176	143	128	81,2	72,7	89,5	112	63,6	1460
62	10	498	172	140	129	81,4	75,0	92,1	110	64,0	1320
63	39	525	179	146	138	81,6	77,1	94,5	121	67,6	1550
64	22	545	186	152	—	81,7	—	—	117	62,9	1570
65	47	522	182	149	135	81,9	74,2	90,6	116	63,7	1480
66	17	532	185	152	135	82,2	73,0	88,6	113	61,1	14[illegible]0
67	38	528	185	152	137	82,2	74,1	90,1	112	60,5	1470
68	42	513	180	148	127	82,2	70,5	85,8	114	63,3	1410
69	61	520	185	152	128	82,2	69,2	84,2	117	63,2	1520
70	65	517	180	148	126	82,2	70,0	85,1	114	63,3	1450
71	19	495	169	139	125	82,3	74,0	89,0	108	63,9	1290
72	20	520	181	149	135	82,3	74,6	90,6	111	61,3	1420
73	26	527	181	149	124	82,3	68,5	83,2	112	61,3	1380
74	87	502	170	140	127	82,4	74,7	90,7	114	67,1	1290
75	68	548	189	156	130	82,5	68,8	83,3	121	64,0	1600
76	60	526	180	149	—	82,8	—	—	118	65,5	1450
77	37	523	181	150	123	82,9	68,0	82,0	116	64,1	1430
78	100	536	181	150	133	82,9	73,5	88,7	120	66,3	1555
79	43	513	172	143	126	83,1	73,3	88,1	110	64,0	1360
80	59	522	178	148	129	83,1	72,5	87,2	121	68,0	1395

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite I mm	Ganze Höhe I mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Breiten-Höhen-Index	Ohr-Höhe	Längen-Ohrhöhen-Index	Schädel-Capacität ccm
81	89	529	181	151	128	83,4	70,7	84,8	115	63,5	1410
82	94	560	189	158	131	83,6	69,3	82,9	119	63,0	1690
83	40	511	174	146	137	83,9	78,7	93,8	114	65,0	1370
84	74	517	177	149	133	84,2	75,1	89,3	117	66,1	1480
85	46	516	178	150	139	84,3	78,1	92,7	122	68,5	1515
86	72	532	179	151	141	84,4	78,7	93,4	119	66,5	1585
87	52	531	181	153	130	84,5	71,8	85,0	119	65,7	1510
88	18	520	175	148	130	84,6	74,3	87,8	110	62,9	1330
89	80	535	179	152	—	84,9	—	—	122	68,2	1670
90	36	530	176	151	129	85,8	73,3	85,4	117	66,5	1460
91	25	526	176	152	143	86,4	81,2	94,1	123	69,9	1560
92	63	487	165	143	116	86,7	70,3	81,1	109	66,1	1190
93	8	522	174	151	138	86,8	79,3	91,4	115	66,1	1500
94	45	518	177	154	134	87,0	75,7	87,0	120	67,8	1550
95	88	530	178	155	129	87,1	72,5	83,2	120	67,4	1550
96	28	556	188	164	135	87,2	71,8	82,3	123	65,4	1790
97	97	523	172	150	130	87,2	75,6	86,7	115	66,9	1450
98	70	530	173	151	142	87,3	82,1	94,7	123	71,1	1640
99	64	503	170	150	130	88,2	76,5	86,7	121	71,2	1395
100	98	513	168	149	129	88,7	76,8	86,1	114	67,9	1420
47 brachycephale Schädel haben im Mittel:											**1463**
Im Mittel:		**521,2**	**181,8**	**143,79**	**131,2**	**78,3**	**71,9**	**91,2**	**113,6**	**62,4**	**1436**

Die Schädel No. 16. 27. 37. 39. 50. 54. 79. 88. 94 haben Stirnnaht,
No. 40 basilare Impression,
No. 98 Schädelbasis schief.

Digitized by Google

Tabelle III.

Münchener Stadtbevölkerung

I. aus dem 16. und 17. Jahrhundert.

Männerschädel.

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Capacität ccm	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
1	70	1625	—	188	146	132	77,6	70,2	Stirnnaht, Schaltknochen in der Pfeilnaht
2	32	1478	533	185	144	129	77,8	69,7	
3	54	1456	540	191	149	136	78,0	71,2	
4	62	—	542	183	144	136	78,7	74,3	
5	98	—	—	175	137	—	78,3	—	
6	99	—	—	193	153	—	78,8	—	
7	7	1265	501	177	140	131	79,1	74,0	
8	6	1596	540	189	150	135	79,4	71,4	
Summe: 8 Mesocephale, mittlerer Längenbreiten-Index: 78,4.									
9	45	—	572	201	170	135	80,1	62,1	
10	46	1511	554	192	154	125	80,2	65,1	
11	96	—	—	179	144	—	80,4	—	
12	91	—	—	174	140	—	80,5	—	
13	79	1530	—	181	146	129	80,7	71,3	
14	72	1173	—	167	135	122	80,8	73,1	
15	22	—	526	183	148	130	80,9	71,0	
16	61	—	514	178	144	127	80,9	71,3	
17	8	1346	529	180	146	130	81,1	72,2	
18	65	1278	501	171	139	126	81,3	73,7	
19	84	1401	—	182	148	136	81,3	74,7	
20	81	1526	—	179	146	140	81,6	78,2	Stenocrotaphie
21	3	1744	557	191	156	136	81,7	71,2	
22	33	—	509	171	140	136	81,9	79,5	Spitzenknochen
23	10	1380	513	178	146	125	82,0	70,2	
24	13	1560	524	184	152	134	82,2	72,4	
25	18	—	512	173	143	130	82,7	75,1	Weiblicher Typus
26	58	—	530	179	148	137	82,7	76,5	
27	4	—	540	186	154	125	82,8	67,2	
28	31	—	529	180	149	133	82,8	73,9	
29	9	—	535	182	151	132	83,0	72,5	Spitzenknochen
30	53	1318	508	173	145	121	83,0	69,6	
31	95	—	—	176	146	134	83,0	76,1	
32	20	—	511	172	143	127	83,1	73,8	
33	34	1503	529	183	152	127	83,1	69,4	
34	63	—	550	183	152	134	83,1	73,2	Stirnnaht
35	23	—	544	186	155	137	83,3	73,7	
36	76	1405	—	180	150	126	83,3	70,0	
37	2	1730	551	187	156	139	83,4	74,3	

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Capacität ccm	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
38	40	—	549	181	151	118	83,4	65,2	Weiblicher Typus, basilare Impression
39	61	1578	538	181	151	130	83,4	71,8	
40	83	1365	—	175	146	121	83,4	69,1	Stirnnaht, abnorme Naht im Scheitelbein
41	37	1582	535	182	152	131	83,5	72,0	
42	75	1824	—	194	162	135	83,5	69,6	
43	67	1324	490	165	138	117	83,6	70,9	Stirnnaht
44	97	—	—	183	153	129	83,6	70,5	
45	55	—	492	166	139	117	83,7	70,5	Stirnnaht, weibl. Typus.
46	19	—	548	185	155	138	83,8	74,6	
47	85	1384	—	174	146	137	83,9	78,7	
48	90	1540	—	179	146	142	83,9	81,6	
49	39	—	515	172	145	127	84,3	73,8	
50	71	—	—	185	156	129	84,3	69,7	
51	93	—	—	192	162	137	84,4	71,3	
52	73	1396	—	175	148	131	84,6	74,9	Stirnnaht
53	24	—	508	170	144	130	84,7	76,5	Weiblicher Typus
54	51	1402	530	176	149	136	84,7	77,3	
55	88	—	—	177	150	—	84,7	—	
56	100	—	—	172	146	133	84,9		
57	47	1563	521	174	148	134	85,1	77,0	
58	27	—	514	176	150	118	85,2	67,0	
59	38	—	533	176	150	132	85,2	75,0	Fontanellknochen d. grossen Fontanelle
60	48	1440	528	176	150	133	85,2	75,6	
61	57	—	500	169	144	119	85,2	70,4	Weiblicher Typus
62	14	1473	527	177	151	123	85,3	69,5	
63	1	1380	530	180	154	134	85,5	74,4	Stirnnaht
64	36	1376	518	173	148	134	85,5	77,4	
65	66	—	527	175	150	130	85,7	74,3	Stirnnaht
66	78	1382	—	170	146	135	85,9	79,4	Stirnnaht
67	43	—	510	173	149	127	86,1	73,4	
68	77	1670	—	188	163	132	86,2	70,2	
69	68	1312	521	175	151	131	86,3	74,9	
70	29	—	510	169	146	135	86,4	79,9	
71	80	1532	—	176	152	132	86,4	75,0	
72	17	1392	510	173	150	124	86,7	71,7	
73	87	—	—	174	151	133	86,8	76,4	
74	89	1467	—	169	147	133	87,0	78,7	
75	35	1236	508	171	149	121	87,1	70,8	
76	41	1420	514	171	149	126	87,1	73,7	
77	94	—	—	178	155	—	87,1	—	
78	25	—	528	175	153	128	87,4	73,1	
79	28	—	530	175	153	130	87,4	74,3	
80	60	—	538	177	155	137	87,6	77,4	
81	50	1351	519	171	150	130	87,7	76,0	
82	59	—	535	179	157	131	87,7	73,2	

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Capacität ccm	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
83	26	—	551	182	160	143	87,9	78,6	
84	30	—	550	181	160	133	88,0	73,5	
85	12	1610	545	183	162	118	88,5	64,5	Flachkopf
86	42	—	509	167	148	130	88,6	77,8	Weiblicher Typus
87	52	1470	530	172	153	133	89,0	77,3	
88	82	1197	—	163	145	121	89,0	74,2	
89	11	1749	553	184	165	131	89,6	71,2	
90	44	—	528	173	155	121	89,6	69,9	
91	69	—	530	175	157	133	89,7	76,0	
92	5	1670	536	171	154	131	90,1	76,6	
93	56	—	532	175	158	133	90,3	76,0	
94	86	—	—	162	148	130	91,4	80,2	
95	21	—	547	177	162	126	91,5	71,2	
96	49	1439	527	170	156	129	91,8	75,9	
97	74	—	—	171	158	129	92,4	75,4	
98	15	—	499	166	145	131	93,4	78,9	
99	92	—	—	158	143	—	93,5	—	Stirnnaht
100	16	—	537	171	165	131	96,5	76,6	
Im Mittel:		**1465**	**532,1**	**177,3**	**150,2**	**130,3**	**84,6**[1]	**73,5**	

Summe: 92 Brachycephale, mittlerer Längenbreiten-Index: 85,3.

1) Durch Addition ergibt sich 84,8.

Digitized by Google

Tabelle IV.

Münchener Stadtbevölkerung

II. aus der Mitte des 19. Jahrhunderts.

Männerschädel.

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
1	88	—	192	138	124	71,9	64,6	
2	22	548	200	145	134	72,5	67,0	
3	91	—	189	137	126	72,5	66,7	
4	99	—	183	133	125	72,7	67,8	
5	15	540	195	144	138	73,9	70,8	
6	76	—	184	137	135	74,5	73,4	
Summe: 6 Dolichocephale, mittlerer Längenbreiten-Index: 73,0.								
7	74	—	188	143	126	76,1	67,0	
8	48	541	190	146	133	76,8	70,0	Stirnnaht
9	80	—	186	143	131	76,9	70,4	
10	33	549	192	148	134	77,1	69,8	
11	83	—	184	143	128	77,7	69,6	
12	46	523	186	145	131	78,0	70,4	
13	92	—	179	140	131	78,2	73,2	
14	51	—	183	145	133	78,4	71,9	
15	40	527	184	145	139	78,8	75,5	
16	66	—	182	144	132	79,1	72,5	
17	86	—	178	141	131	79,2	73,6	
18	34	551	195	155	134	79,5	68,7	
19	50	540	190	151	137	79,5	72,1	
20	32	540	187	149	131	79,7	70,1	
21	12	538	189	151	129	79,9	68,3	
22	38	528	184	147	134	79,9	72,8	
23	98	—	179	143	126	79,9	70,4	
Summe: 17 Mesocephale, mittlerer Längenbreiten-Index: 78,5.								
24	93	—	175	140	129	80,0	73,7	
25	26	529	187	150	134	80,2	71,7	
26	6	549	194	156	132	80,4	68,0	
27	41	532	184	148	135	80,4	73,4	
28	100	—	175	141	124	80,6	70,9	Stirnnaht
29	5	544	187	151	151	80,7	80,7	
30	79	—	176	142	134	80.7	76,1	
31	95	—	176	142	128	80,7	72,7	
32	61	—	177	143	130	80,8	73,4	
33	75	—	182	147	132	80,8	72,5	
34	70	—	184	149	137	81,0	74,5	

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
35	43	525	185	150	144	81,1	77,8	
36	65	—	180	146	130	81,1	72,2	
37	90	—	175	142	136	81,1	77,7	
38	3	552	192	156	139	81,2	72,4	
39	39	542	192	156	129	81,2	67,2	
40	23	528	186	151	130	81,2	69,9	
41	96	—	183	149	129	81,4	70,5	
42	27	537	184	150	140	81,5	76,1	
43	71	—	178	145	136	81,5	76,4	
44	8	544	191	156	135	81,7	70,7	
45	27	537	184	150	140	81,7	76,1	
46	77	—	175	143	134	81,7	76,6	
47	28	540	181	148	141	81,8	77,9	
48	73	—	181	148	123	81,8	68,0	
49	47	527	182	149	133	81,9	73,1	
50	89	—	177	145	128	81,9	72,3	
51	42	542	185	152	132	82,2	71,4	
52	58	—	180	148	130	82,2	72,2	
53	68	—	181	149	138	82,3	75,7	
54	56	—	180	149	137	82,8	76,1	
55	62	—	180	149	135	82,8	75,0	
56	49	531	181	150	137	82,9	75,7	
57	30	531	182	151	132	83,0	72,5	
58	45	521	177	147	136	83,0	76,8	
59	9	540	184	153	136	83,2	73,9	
60	14	540	184	153	144	83,2	78,3	
61	63	—	177	148	137	83,6	77,4	
62	31	520	178	149	142	83,7	79,8	
63	85	—	178	149	127	83,7	71,3	
64	59	—	179	150	135	83,8	75,4	
65	35	532	180	151	127	83,9	70,5	
66	97	—	175	147	127	84,0	72,6	
67	16	527	177	149	145	84,2	81,9	
68	64	—	178	150	131	84,3	73,6	
69	94	—	169	143	128	84,6	75,7	
70	53	—	178	151	133	84,8	74,7	
71	4	552	186	158	136	84,9	73,1	
72	78	—	174	148	130	85,1	74,7	
73	25	526	177	151	136	85,3	76,8	
74	21	552	183	157	140	85,8	76,5	Stirnnaht
75	17	550	184	158	137	85,9	74,5	
76	29	530	179	154	139	86,0	77,7	
77	52	—	178	153	132	86,0	74,2	
78	67	—	171	147	133	86,0	77,8	
79	72	—	179	154	134	86,0	74,8	

Digitized by Google

Laufende No.	Nummer der Orig.-Tabelle	Horizont.-Umfang mm	Grösste Länge mm	Grösste Breite mm	Ganze Höhe mm	Längen-Breiten-Index	Längen-Höhen-Index	Bemerkungen
80	44	—	174	150	125	86,2	71,8	
81	81	—	174	150	132	86,2	75,9	
82	37	529	178	154	143	86,5	80,3	
83	84	—	170	147	122	86,5	71,8	
84	13	545	184	160	125	87,0	67,9	Stirnnaht
85	19	553	185	161	128	87,0	69,2	Stirnnaht
86	36	530	177	154	131	87,0	74,0	
87	55	—	180	157	142	87,2	78,9	Stirnnaht
88	11	547	183	160	137	87,4	74,9	
89	7	540	176	154	139	87,5	79,0	
90	10	537	177	155	135	87,6	76,3	Os japonicum beiderseits
91	54	—	172	151	139	87,8	80,8	Stirnnaht
92	57	—	172	151	139	87,8	80,8	
93	60	—	176	156	132	88,6	75,0	
94	2	535	176	156	152	88,6	86,4	
95	82	—	169	150	121	88,8	71,6	
96	18	562	189	168	141	88,9	74,6	
97	87	—	172	153	136	89,0	79,1	
98	69	—	172	154	139	89,5	80,8	
99	20	549	180	162	139	90,0	77,2	
100	1	540	179	162	148	90,5	82,7	
Im Mittel:		**538,2**	**181,3**	**149,4**	**133,9**	**82,4**	**73,8**	

Summe: **77** Brachycephale, mittlerer Längenbreiten-Index: **84,1.**

Digitized by Google

Tabelle V.

Uebersicht über die Länge der männlichen Oberschenkelknochen der früh-mittelalterlichen Bevölkerung Lindaus.

Oberschenkel links, ♂, Länge in natürlicher Stellung.

Die Millimeter der Länge und die Anzahl der Knochen.	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51 = Länge nach cm
13						9						
12				8		8						
11				7	9	7						
10				7	9	6						
9				5	7	5						
8				5	7	3	9	4				
7				4	6	3	8	2				
6				3	6	1	6	2				
5		8		3	6	0	5	2				
4		7		1	5	0	4	1				
3		6		1	5	0	3	0				
2	9	3	8	0	0	0	3	0	1	4		
1	2	2	8	0	0	0	1	0	0	1		
	(2)	(5)	(2)	(12)	(11)	(13)	(8)	(8)	(2)	(2)	(0)	(0) = 65

Oberschenkel rechts, ♂, Länge in natürlicher Stellung.

Die Millimeter der Länge und die Anzahl der Knochen.	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51 = Länge nach cm
18					9							
17				9	8							
16				9	7							
15				8	7							
14				8	7	7						
13				7	7	6						
12				7	7	4						
11				7	6	4						
10				7	5	4						
9				7	5	3						
8				6	4	3						
7				6	4	3						
6			8	5	3	2	8	8				
5			6	4	2	2	8	8				
4			6	4	1	0	7	6				
3			5	3	1	0	3	2				
2			5	3	1	0	1	0				
1		1	1	0	0	0	0	0	7	0		6
	(0)	(1)	(6)	(17)	(18)	(14)	(6)	(6)	(1)	(1)	(0)	(1) = 71

Digitized by Google

Sitzung vom 6. Februar 1897.

1. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung des Professors der Mechanik an der hiesigen technischen Hochschule, Herrn Dr. August Föppl: „Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitationsgesetzes" vor.

2. Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Zur Theorie der Doppelreihen."

Ueber eine mögliche Erweiterung des Newton'schen Gravitations-Gesetzes.

Von **A. Föppl.**

(*Eingelaufen 6. Februar.*)

In einer jüngst erschienenen Schrift[1]) habe ich an einigen Stellen in unbestimmten Ausdrücken darauf hingewiesen, dass meiner Schätzung nach die Gravitationstheorie heute noch nicht ihre endgültige Fassung erlangt haben dürfte. Wer das Recht zu einer solchen Aeusserung in Anspruch nehmen will, muss nachweisen können, dass mindestens noch eine von der herrschenden Anschauung abweichende Erklärung des Weltsystems möglich ist. Diesen Nachweis beabsichtige ich hier zu liefern.

Zuvor möchte ich indessen noch erwähnen, was mich ursprünglich zu meiner Vermuthung führte, denn auf den Versuch einer Abänderung des Newton'schen Gesetzes, den ich hier auseinandersetzen will, lege ich nur insoferne Werth, als er

---

[1]) Föppl, Geometrie der Wirbelfelder, Leipzig 1897.

Digitized by Google

die Zulässigkeit jener Vermuthung bestätigt. Die elektrischen und magnetischen Felder, die mit dem Gravitationsfelde der Welt eine unverkennbare Aehnlichkeit besitzen, wie unter anderem schon aus dem Vergleiche des Coulomb'schen Gesetzes mit dem Newton'schen Gesetze hervorgeht, zeichnen sich durch den Umstand aus, dass sie sich nicht ins Unendliche erstrecken. Damit soll gesagt sein, dass der Kraftfluss, den ein solches Feld durch eine Kugelfläche sendet, gegen Null convergirt, wenn der Radius der Kugel unbegrenzt wächst. Die Vermuthung liegt nahe genug, dass es sich auch mit dem Gravitationsfelde eines gewissen Weltganzen ähnlich verhalten könne. Wer sich gegen die Vorstellung sträubt, dass sich das Feld jedes in sich geschlossenen Systems nothwendig ins Unendliche erstrecken müsse oder wer die Schwierigkeiten anerkennt, die aus den besonders von Herrn Seeliger[1]) betonten Folgerungen des Newton'schen Gesetzes hervorgehen, wird wenigstens zugeben, dass es wünschenswerth ist, nach einer Fassung des Gravitationsgesetzes zu suchen, die diese Schwierigkeiten beseitigt, ohne die Vorzüge des Newton'schen Gesetzes preiszugeben.

Von einem Anfangspunkte, dessen Wahl gleichgültig ist, seien die Radienvektoren $\mathfrak{r}$ gezogen. Man nehme an, dass der Zustand des Gravitationsfeldes im Punkte $\mathfrak{r}$ (gleichgültig ob er sich im Innern eines Weltkörpers befindet oder nicht) durch eine einzige gerichtete Grösse $\mathfrak{v}$ beschrieben werden kann. Der augenblickliche Zustand des Gravitationsfeldes der Welt wird dann durch eine Vectorfunktion

$$\mathfrak{v} = f(\mathfrak{r})$$

angegeben. Um in möglichst enger Uebereinstimmung mit dem Newton'schen Gesetze zu bleiben, nehmen wir erstens an, dass die Funktion $\mathfrak{v}$ wirbelfrei ist und dass ferner ihre Quellen mit den Massen der Weltkörper zusammenfallen. Nur darin weichen wir ab, dass wir neben positiven Quellen auch negative

[1]) H. Seeliger, Sitzungsberichte der k. bayer. Ak. d. Wiss., Heft III, 1896, p. 373.

Digitized by Google

zulassen. Damit sich das Feld eines in sich abgeschlossenen Systems nicht nothwendig ins Unendliche erstrecke, müssen wir ferner, wie bei den elektrischen Feldern, voraussetzen, dass die Summe der negativen Quellen gleich der Summe der positiven ist. Die Kraftlinien des Gravitationsfeldes gehen dann alle von positiven Massen aus zu negativen hin (oder umgekehrt, denn hierin liegt nur eine willkürliche Vorzeichenbestimmung).

In dieser Einführung von Massen[1]) verschiedenen Vorzeichens besteht die Erweiterung, die man, wie ich glaube, dem Newton'schen Gesetze geben kann. Freilich macht sich dabei, wie man nachher sehen wird, noch eine Untersuchung über die Form nöthig, die man dem Energie-Inhalt des Gravitationsfeldes zu geben hat.

Schon jetzt will ich aber darauf hinweisen, dass man selbstverständlich allen Massen unseres Sonnensystems das gleiche Vorzeichen geben muss, ebenso den Massen der Kometen, die in unser System gelangen. Man wird nämlich sehen, dass man auf Grund der vorher angegebenen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Funktion $\mathfrak{v}$ in Verbindung mit einer Annahme über die Energie des Gravitationsfeldes beweisen kann, dass alle Massen gleichen Vorzeichens sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, Massen entgegengesetzten Vorzeichens sich aber nach demselben Gesetze abstossen müssen. Abgesehen von dem umgekehrten Wirkungssinne aller Kräfte würde also das Weltganze einem Systeme elektrischer Massen verschiedenen Vorzeichens gleichen.

Wenn wir z. B. beobachten, dass die Bewegungen eines

---

[1]) Wo ich hier von Massen rede, meine ich damit nicht die im Trägheitsgesetze oder in der dynamischen Grundgleichung auftretende Grösse, sondern nur das materielle Substrat der Weltkörper, insofern es den Träger der Gravitationserscheinungen bildet. „Masse" ist daher hier ebenso wie in der Electricitätslehre gleichbedeutend mit „Quelle des Kraftflusses". Dass „Masse" im Sinne des Trägheitsgesetzes nur eine positive Grösse sein kann, hat schon Mach in seiner Mechanik ausführlich nachgewiesen.

Digitized by Google

Doppelsterns dem Newton'schen Gesetze gehorchen, könnte daraus nach der hier zu erörternden Hypothese nur geschlossen werden, dass beide Sterne Massen gleichen Vorzeichens enthalten. Es müsste aber unentschieden bleiben, ob diese Massen gleicher oder entgegengesetzter Art mit denen unseres Sonnensystems sind.

Dass wir noch keine Fälle verzeichnen konnten, in denen eine Abstossung zwischen zwei Weltkörpern bemerkt wurde, lässt sich, wie mir scheint, sehr einfach durch den Umstand erklären, dass solche Körper durch die zwischen ihnen wirkende Kraft auseinandergetrieben werden, wenn sie sich zufällig einmal nahe gekommen sind. Wir können daher nach unserer Hypothese gar nicht erwarten, Weltkörper verschiedenen Vorzeichens in so nahen Abständen zu finden, dass die zwischen ihnen wirkende umgekehrte Gravitation uns in ihren Wirkungen messbar erkenntlich würde.

Bei meinem Ausgangspunkte ist es selbstverständlich, dass ich mir die Uebertragung der Gravitationskräfte durch ein Medium (den Lichtäther) vermittelt denke. Nach der Maxwell'schen Elektricitätslehre wird die Energie des elektrischen Feldes, die in einem Volumen-Elemente $d\tau$ angehäuft ist, durch einen Ausdruck von der Form

$$\frac{1}{2} c \mathfrak{v}^2 d\tau$$

angegeben, wenn $\mathfrak{v}$ den elektrischen Vector und c eine Constante des Mediums bedeuten. Bei dieser Annahme folgt mit Nothwendigkeit, dass sich Massen gleichen Vorzeichens abstossen müssen, wie wir es bei den elektrischen Erscheinungen beobachten. Um zu dem entgegengesetzten Verhalten bei der Gravitation zu gelangen, genügt es, für die Energie des Volumen-Elementes $d\tau$ den Werth

$$\left(e_0 - \frac{1}{2} c \mathfrak{v}^2\right) d\tau$$

anzunehmen, wobei e_0 eine neue Constante des Mediums, nämlich den Inhalt an Energie in der Volumen-Einheit des Raumes

Digitized by Google

für $\mathfrak{v} = 0$ bedeutet. Ich werde nachher noch darauf hinweisen, dass eine solche Form für die Energievertheilung im Weltraume nach manchen Richtungen hin ganz annehmbar erscheint. Aus dieser Annahme folgt mit Nothwendigkeit, wie ich jetzt zeigen werde, das erweiterte Newton'sche Gesetz.

Der Gesammtinhalt an Gravitationsenergie entweder des Weltalls oder eines in sich abgeschlossenen Weltganzen ist nach meiner Annahme in einem gegebenen Augenblicke

$$T = T_0 - \frac{1}{2} c \int^{\infty} \mathfrak{v}^2 \, d\tau \tag{1}$$

wo $T_0 = \int^{\infty} e_0 \, d\tau$ gesetzt ist und die Integration sich über das ganze Gravitationsfeld unseres Weltganzen erstreckt. Der Vector $\mathfrak{v}$ kann, da er wirbelfrei vertheilt sein sollte, aus einem gewöhnlichen Potentiale V abgeleitet werden. Nach dem Green'schen Satz ist daher

$$\int^{\infty} \mathfrak{v}^2 \, d\tau = \int^{\infty} V q \, d\tau \tag{2}$$

wenn q die Dichte der Quellen (d. h. das 4π fache der Masse) in $d\tau$ bezeichnet. Das Oberflächenintegral über die Grenzfläche des Raumes, das nach der allgemeinen Fassung des Green'schen Satzes hinzuzufügen wäre, verschwindet nämlich hier nach unserer Voraussetzung, dass sich das Feld des Weltganzen nicht ins Unendliche erstrecken soll.

Wir wollen nun annehmen, dass irgend eine Quelle (oder Masse) q_1, die positiv oder negativ sein kann und die wir als unendlich klein voraussetzen wollen, von ihrem Orte $\mathfrak{r}$ um das unendlich kleine Stück $\delta\mathfrak{r}$ verschoben wäre. Es handelt sich darum, zu berechnen, um wie viel sich dadurch der Ausdruck für T in Gl. (1) ändert. Mit Rücksicht auf (2) haben wir

$$\delta T = -\frac{1}{2} c \, \delta \int^{\infty} V q \, d\tau = -\frac{1}{2} c \left(\int^{\infty} \delta V q \, d\tau + \int^{\infty} V \delta q \, d\tau \right) \tag{3}$$

Jedes der beiden Integrale in der letzten Klammer lässt sich leicht berechnen. Beim zweiten kommen überhaupt nur

Digitized by Google

jene beiden Volumen-Elemente in Betracht, in denen sich q_1 zu Anfang und zu Ende der Verschiebung befunden hat; man hat dafür

$$\int^{\infty} V \delta q \, d\tau = (\delta \mathfrak{r} \nabla) V \cdot q_1 \tag{4}$$

wenn $(\delta \mathfrak{r} \nabla)$ eine Differentiation von V in der Richtung $\delta \mathfrak{r}$ angibt. Nun ist, da V das Potential der Quellen q bedeutet

$$V = \frac{1}{4\pi} \int^{\infty} \frac{q \, d\tau}{a} \tag{5}$$

und daher

$$(\delta \mathfrak{r} \nabla) V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{q}{a^3} \mathfrak{a} \, \delta \mathfrak{r} \, d\tau \tag{6}$$

Das erste Integral in der Klammer der Gleichung (3) hat, wie man leicht in derselben Weise zeigen kann, genau denselben Werth wie das zweite und im Ganzen wird daher

$$\delta T = c \cdot \frac{1}{4\pi} \int \frac{q q'}{a^3} \mathfrak{a} \, d\tau \cdot \delta \mathfrak{r} \tag{7}$$

Wenn sich die Quelle q_1 um $\delta \mathfrak{r}$ bewegt, wirkt eine Kraft $\mathfrak{P}$ an ihr, die sich aus Gl. (7) berechnen lässt. Die Arbeit $\mathfrak{P} \delta \mathfrak{r}$ bei der Verschiebung $\delta \mathfrak{r}$ erhöht nämlich die kinetische Energie auf Kosten der potentiellen und das Energieprincip liefert die Beziehung

$$\mathfrak{P} \delta \mathfrak{r} + \delta T = 0 \tag{8}$$

Dies muss für jede beliebige (virtuelle) Verschiebung $\delta \mathfrak{r}$ gelten. Man kann daher den Faktor des inneren Produkts $\delta \mathfrak{r}$, der in beiden Ausdrücken vorkommt, wegheben und erhält

$$\mathfrak{P} = -\frac{c}{4\pi} q' \int \frac{q}{a^3} \mathfrak{a} \, d\tau \tag{9}$$

Das ist aber für den Fall, dass q und q' gleiches Vorzeichen haben, nichts anderes als das Newton'sche Gravitationsgesetz: zugleich folgen die übrigen vorher aufgestellten Behauptungen.

Natürlich ist diese ganze Betrachtung nur eine einfache Nachbildung der längst bekannten Ableitung des Coulomb'schen

Digitized by Google

Gesetzes aus dem Maxwell'schen Gesetze der Energievertheilung im elektrischen Felde. Man konnte von vornherein erwarten, dass sie zu diesem Resultate führen müsse, nachdem das Vorzeichen des mit $\mathfrak{v}^2$ behafteten Gliedes in Gl. (1) umgekehrt wurde.

Ich will und kann mich hier nicht auf Weltbildungshypothesen (entsprechend der Kant-Laplace'schen etwa) einlassen, möchte aber nur noch bemerken, dass die durch Gl. (1) ausgesprochene Voraussetzung, beim Zusammenballen von Massen gleichen Vorzeichens nehme die Gravitationsenergie des Raumes ab und auf ihre Kosten werde die thermische Energie u. s. f. des werdenden Weltkörpers gebildet, mit Vorstellungen solcher Art ganz gut in Uebereinstimmung ist.

Es liegt mir natürlich ganz fern, zu behaupten, dass die hier als möglich nachgewiesene Erweiterung des Newton'schen Gesetzes der Wahrheit entspricht, dass es also in der That Weltkörper gibt, die sich gegenseitig abstossen. Die Möglichkeit wird man aber — wenigstens auf Grund der mir bekannten Beobachtungsthatsachen — einstweilen nicht abstreiten können. Eine Möglichkeit, die, wenn sie das Richtige treffen sollte, gelegentlich auch durch eine Beobachtung bestätigt werden kann, muss aber immer ausgesprochen werden und ich nehme daher keinen Anstand, diese kleine Betrachtung zu veröffentlichen.

München, 1. Februar 1897.

Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 16. Februar.*)

Während die elementare Theorie der einfach-unendlichen Reihen wohl im wesentlichen als abgeschlossen gelten darf, so scheint mir diejenige der unendlichen Doppelreihen in verschiedener Beziehung der Vervollkommnung nicht nur bedürftig, sondern thatsächlich auch fähig zu sein. Im Folgenden mache ich den Versuch, auf der Grundlage einiger einfacher Sätze über die Grenzwerthe zweifach-unendlicher Zahlenfolgen, eine solche Theorie in möglichst einheitlicher und übersichtlicher Weise aufzubauen. Jene Hülfssätze, die im wesentlichen von den möglichen Beziehungen zwischen Grenzwerthen von der Form:

$$\lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty}(a_\mu^{(\nu)}),\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right),\quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

handeln, mögen wohl allgemein bekannt sein: da sie mir indessen in der hier gewählten einfachen Formulirung und Begründung nirgends begegnet sind, so schien es mir zweckmässig, dieselben zunächst vollständig zu entwickeln (§ 1, Art. 2—5). Daraus ergeben sich dann in sehr anschaulicher Weise die verschiedenen Eventualitäten, die bei der Convergenz und Divergenz einer Doppelreihe eintreten können, in's besondere jene scheinbaren Anomalien, die aus dem principiellen Unterschiede zwischen einer Doppelreihe einerseits und der aus ihren Zeilen bezw. Colonnen gebildeten Reihe andererseits hervorgehen; zugleich liefert der gewählte Ausgangspunkt unmittelbar die Hülfsmittel, um das wirkliche Vorkommen der als möglich erkannten Fälle durch concrete Beispiele zu belegen (§ 2). Im darauffolgenden Paragraphen werden die

Digitized by Google

Beziehungen untersucht, welche zwischen einer convergenten Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's gebildeten einfachen Reihe bestehen. Der bei dieser Gelegenheit bewiesene Hauptsatz (§ 3, Art. 3) stellt eine merkliche Verallgemeinerung und Vervollständigung eines wichtigen, zuerst von Herrn Stolz[1]) bewiesenen Satzes dar. Dabei möchte ich einigen Werth darauf legen, dass der hier mitgetheilte Beweis lediglich eine ganz elementare Grenzwerth-Bestimmung erfordert, während derjenige des Herrn Stolz auf Stetigkeits-Betrachtungen und dem Begriffe der gleichmässigen Convergenz beruht.

Es folgen nun zunächst die bekannten Sätze über absolut convergente Doppelreihen und deren unbedingte Convergenz (§ 4, Art. 1—4); sodann aber (Art. 5—7) wird der Satz, dass jede unbedingt convergente Doppelreihe auch absolut convergiren muss, wie ich glaube, zum ersten Male vollständig bewiesen.[2]) — Im letzten Paragraphen (§ 5) werden schliesslich verschiedene Methoden zur Herstellung allgemeiner Convergenz- und Divergenz-Kriterien für unendliche Doppelreihen discutirt und die als zweckmässig erkannten entsprechend verwerthet. Da mir in der Literatur, ausser einer ganz gelegentlichen kurzen Bemerkung des Herrn Thomae[3]),

---

[1]) Ueber unendliche Doppelreihen. Mathem. Ann., Bd. 24, S. 164, Art. 6.

[2]) Herr Stolz hat in der oben citirten Abhandlung (a. a. O. S. 168) den fraglichen Satz nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt. Es steht nun natürlich frei, eine unabhängig von der Anordnung der Glieder convergirende Doppelreihe nur dann unbedingt convergent zu nennen, wenn sie von vornherein jene Eigenschaft besitzt. Allein dann bleibt doch immer die Möglichkeit offen, dass eine convergente Doppelreihe mit divergenten Zeilen oder Colonnen (die also eo ipso nicht absolut convergirt) in dem gewöhnlichen Sinne unbedingt convergiren könnte, d. h. dass die Summe der Doppelreihe bei jeder Umordnung des betreffenden zweifach-unendlichen Schema's den gleichen Werth behielte.

[3]) Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Theta-Functionen einer Veränderlichen. 2. Aufl. (1873). S. 70. Fussnote.

Digitized by Google

keinerlei Versuche nach dieser Richtung hin bekannt geworden sind, so dürften die hier mitgetheilten Betrachtungen in der Hauptsache als neu und nicht ganz überflüssig erscheinen.[1])

§ 1. Ueber Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen.

1. Es sei eine zweifach unendliche Folge reeller Zahlen vorgelegt:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} & \ldots & a_\mu^{(0)} \ldots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} & \ldots & a_\mu^{(1)} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{(\nu)} & a_1^{(\nu)} & \ldots & a_\mu^{(\nu)} \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right. ,$$

so sagt man bekanntlich: die Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ besitzen für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$, oder, genauer bezeichnet, für unabhängig von einander in's Unendliche wachsende μ und ν einen bestimmten Grenzwerth a, in Zeichen:

$$(2)\qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a,$$

wenn eine bestimmte Zahl a existirt, so dass:

$$(3)\qquad |a - a_\mu^{(\nu)}| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu > m,\ \nu > n:$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) positiven Zahl ε müssen sich zwei natürliche Zahlen m, n so zuordnen lassen, dass Ungl. (3) befriedigt wird. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(3\,\mathrm{a})\qquad |a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)}| < \varepsilon'$$

für $\mu \geqq m'$, $\nu \geqq n'$, $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$, $\sigma = 0, 1, 2, \ldots$ (d. h. bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon' > 0$ und passender Wahl von m', n').

---

[1]) Gleichzeitig mit der Correctur dieser Mittheilung erhalte ich einen Aufsatz des Herrn O. Biermann „Ueber unendliche Doppelreihen und unendliche Doppelproducte" (Monatshefte für Mathematik und Physik, VIII, p. 115 ff.), in welchem gleichfalls einige Convergenz-Kriterien für Doppelreihen aufgestellt werden. Dieselben sind indessen von geringerer Tragweite als die hier mitgetheilten.

Digitized by Google

Die Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \infty \text{ bezw. } = -\infty$$

hat sodann die Bedeutung: Jeder (beliebig grossen) positiven Zahl G lassen sich zwei natürliche Zahlen m, n so zuordnen, dass:

$$(5) \qquad a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

2. Man bemerke vor allem, dass durch die Existenz eines bestimmten endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ diejenige von $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von ν, bezw. diejenige von $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für endliche Werthe von μ in keiner Weise präjudicirt wird. Denn die definirenden Ungleichungen (3) verlangen ja eine gewisse Eigenschaft lediglich von denjenigen Termen, bei denen beide Indices μ, ν gewisse Grenzen überschreiten: mit anderen Worten, diejenigen $a_\mu^{(\nu)}$, welche den ersten m Zeilen und n Colonnen des Schema's (1) angehören, können hierbei völlig willkürlich gedacht werden, sie brauchen z. B. nicht einmal numerisch unter einer endlichen Grenze zu bleiben. Aber noch mehr: es kann sogar $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ endlich und bestimmt ausfallen, obschon $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von ν, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen bestimmten Werth von μ existirt. Beispiel:

$$\begin{aligned} a_\mu^{(\nu)} &= (-1)^{\mu+\nu} \cdot \frac{\mu^p + \nu^q}{\mu^p \cdot \nu^q} \\ &= (-1)^{\mu+\nu} \left(\frac{1}{\mu^p} + \frac{1}{\nu^q} \right) \end{aligned} \qquad \left(\begin{matrix} \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ p > 0,\ q > 0 \end{matrix} \right).$$

Hier wird offenbar:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

also völlig bestimmt, dagegen:

Digitized by Google

$$\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu^q}, \quad \limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^q} \quad \text{für: } \nu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum,}$$

$$\liminf_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\mu^p}, \quad \limsup_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu^p} \quad \text{für: } \mu = 1, 2, 3, \ldots \text{ in infinitum,}$$

d. h. jede einzelne Zeile bezw. Colonne besitzt zwei von einander verschiedene Unbestimmtheitsgrenzen. Dabei gilt nun, wie dieses Beispiel schon vermuthen lässt, der folgende Satz:

Ist:

$$(6) \quad \begin{cases} \liminf\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l_\nu, \ \limsup\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L_\nu & (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \liminf\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = l'_\mu, \ \limsup\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = L'_\mu & (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

so hat man stets:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} l_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} l'_\mu = \lim\limits_{\mu=\infty} L'_\mu \end{array} \right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

falls überhaupt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ **existirt.**

Beweis. Ist: $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ (d. h. endlich), so existirt für jedes beliebig kleine positive ε eine Beziehung von der Form:

$$|a_\mu^{(\nu)} - a| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geq m, \ \nu > n.$$

In Folge dessen hat man auch:

$$|\liminf_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| < \varepsilon, \quad |\limsup_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} - a| < \varepsilon \quad \text{für: } \nu > n,$$

d. h.

$$|l_\nu - a| < \varepsilon, \ |L_\nu - a| < \varepsilon \qquad \text{für: } \nu > n,$$

und somit schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = a.$$

Ist dagegen $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, so besteht für jedes beliebig grosse positive G eine Beziehung von der Form:

Digitized by Google

$$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } a_\mu^{(\nu)} < -G \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

und somit wird auch:

$$\left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} > G \text{ bezw. } \left.\begin{matrix} l_\nu \\ L_\nu \end{matrix}\right\} < -G \text{ für: } \nu \geqq n,$$

d. h. schliesslich:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = \lim_{\nu=\infty} L_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty.$$

Das analoge gilt dann offenbar für l'_μ, L'_μ — womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

3. Wird jetzt speciell $l_\nu = L_\nu$ für $\nu \geqq n$ (bezw. $l'_\mu = L'_\mu$ für $\mu \geqq m$), d. h. existirt für $\nu \geqq n$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ (bezw. für $\mu \geqq m$ ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$), so nimmt der eben bewiesene Satz die folgende Form an:

Existirt ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und ausserdem $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, bezw. $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$, so ist:

$$(8)\quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Demnach ergibt sich, dass die Existenz[1]) von:

$$(9)\qquad \lim_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},\quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\nu \geqq n),\quad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ (\mu \geqq m)$$

allemal diejenige von:

$$(10)\qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right),\quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

und zugleich die Beziehung:

$$(11)\qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$$

nach sich zieht.

---

[1]) In dem angegebenen weiteren Sinne, d. h. die betreffenden Grenzwerthe dürfen eventuell auch unendlich gross mit bestimmten Vorzeichen ausfallen.

Digitized by Google

Daraus folgt dann weiter, dass $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher nicht existiren kann, wenn die beiden Grenzwerthe (10) existiren und von einander verschieden ausfallen.

(Beispiele:

$$(12)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu}{\mu+\nu},\quad 2^{-\frac{\nu}{\mu}},\quad \left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu.$$

Man hat hier für jedes $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(13)\qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1, \text{ also auch: } \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 1:$$

dagegen für jedes $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(14)\qquad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \text{ also auch: } \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = 0.$$

Bei keinem der genannten Beispiele kann also $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ existiren, was sich im übrigen auch leicht verificiren lässt).

Dagegen ist es keineswegs gestattet, aus der blossen Existenz der Beziehung (11) (welche allemal die Existenz von $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$ implicite voraussetzt) auf diejenige von $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zu schliessen. Selbst wenn:

$$(15)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \text{ für } \textbf{jeden} \text{ einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu, \end{cases}$$

so braucht darum keineswegs $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a$ zu sein (was nach dem Satze am Anfange dieses Artikels nur dann der Fall sein müsste, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ überhaupt existirt).

Man betrachte z. B.:

$$(16)\qquad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}\quad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}.$$

Hier wird:

$$(17)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ für } \textbf{jeden} \text{ einzelnen Werth von } \nu, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu, \end{cases}$$

Digitized by Google

während ein bestimmter $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ offenbar nicht vorhanden ist, da $(\mu-\nu)^2$ jede beliebige Zahl $\geqq 0$ vorstellen kann, wenn μ und ν unabhängig von einander in's Unendliche wachsen. Im übrigen besteht hier für jedes beliebige Werthepaar μ, ν die Beziehung:

$$0 < a_\mu^{(\nu)} < 1 \tag{18}$$

und daraus folgt, dass $a_\mu^{(\nu)}$ auch bei unendlich wachsenden Werthen von μ und ν das endliche Intervall (0, 1) niemals verlassen kann.

Ein ähnliches Verhalten zeigt der folgende Ausdruck:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, 3, \ldots \\ \nu = 1, 2, 3, \ldots\end{pmatrix}, \tag{19}$$

für welchen:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \tag{20}$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt und im übrigen:

$$0 < a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{2} \tag{21}$$

wird.

Man könnte hiernach vermuthen, dass etwas analoges allemal stattfindet, wenn die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ für jedes einzelne (wenn auch noch so grosse) ν bezw. μ existiren und unter einer festen Grenze bleiben. Diese Vermuthung wäre indessen irrig, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$a_\mu^{(\nu)} = \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1} \quad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Auch hier wird:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ (für jedes einzelne } \nu \text{ bezw. } \mu), \tag{23}$$

und andererseits:

$$a_\nu^{(\nu)} = 2^{\nu+1} \tag{24}$$

d. h. die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ wachsen für $\mu = \nu$ gleichzeitig mit μ und ν in's Unendliche.

Digitized by Google

Ein Beispiel ähnlicher Art liefert der Ausdruck:

$$(25) \qquad a_{\mu}^{(\nu)} = \frac{\mu^2 \nu^2}{\mu^3 + \nu^3} \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

4. Die im vorigen Artikel betrachteten Eventualitäten erscheinen ausgeschlossen, falls die Terme $a_{\mu}^{(\nu)}$ sich monoton verhalten, d. h. falls für jedes (μ, ν):

$$(26) \qquad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0 \text{ bezw. } \leqq 0 \quad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \ldots \\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Für solche monotone Zahlenfolgen gilt der Satz:

Bleiben die $|a_{\mu}^{(\nu)}|$ stets unter einer endlichen Zahl g, so stellen die Ausdrücke:

$$(27) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)} & (\mu = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

$$(28) \qquad \lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)},$$

durchweg bestimmte Zahlen vor, und es besteht die Beziehung:

$$(29) \qquad \lim_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \left(\lim_{\mu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty} \left(\lim_{\nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right).$$

Beweis. Es sei etwa die Zahlenfolge $(a_{\mu}^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende, so dass also durchweg:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0.$$

Alsdann hat man insbesondere:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu)} - a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$
$$a_{\mu}^{(\nu+\sigma)} - a_{\mu}^{(\nu)} \geqq 0 \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

d. h. die einzelnen Zeilen und Colonnen des Schema's (1) bilden gleichfalls niemals abnehmende und zwar einfach unendliche Zahlenfolgen. Daraus ergiebt sich zunächst, wegen $|a_{\mu}^{(\nu)}| < g$, nach einem bekannten Satze die Bestimmtheit der Grenzwerthe (27).

Digitized by Google

Wäre nun der Grenzwerth (28) nicht gleichfalls endlich und bestimmt, so müsste, wie gross auch μ, ν angenommen werden, zu dem Terme $a_\mu^{(\nu)}$ stets ein Term $a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}$ existiren, so dass

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq a,$$

wo a eine — möglicherweise sehr kleine — aber bestimmte positive Zahl bedeutet. Man könnte darnach aus der Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ eine unbegrenzt fortsetzbare Folge von Termen: $a_\mu^{(\nu)}$, $a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)}$, . . . $a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)}$, . . . herausheben, so dass

$$\begin{aligned}
a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} - a_\mu^{(\nu)} &\geqq a \\
a_{\mu+\varrho_2}^{(\nu+\sigma_2)} - a_{\mu+\varrho_1}^{(\nu+\sigma_1)} &\geqq a \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_{\mu+\varrho_{\varkappa-1}}^{(\nu+\sigma_{\varkappa-1})} &\geqq a
\end{aligned}$$

und daher für jedes noch so grosse $\varkappa$:

$$a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq \varkappa \cdot a \quad \text{d. h.} \quad a_{\mu+\varrho_\varkappa}^{(\nu+\sigma_\varkappa)} > a_\mu^{(\nu)} + \varkappa \cdot a,$$

was der Voraussetzung widerspräche, dass durchweg: $|a_\mu^{(\nu)}| < g$.

Es muss somit $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine bestimmte Zahl sein. Daraus folgt dann schliesslich mit Benützung des Satzes in Art. 3 (Gl. (8)) die Existenz der Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$, $\lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right)$ und ihre Uebereinstimmung mit $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$.

Das analoge Resultat ergiebt sich ohne weiteres für eine niemals zunehmende Folge $(a_\mu^{(\nu)})$, wenn man beachtet, dass in diesem Falle die Folge $(-a_\mu^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende und $\lim(-a_\mu^{(\nu)}) = -\lim(a_\mu^{(\nu)})$ ist.

Als Corollar zu dem eben bewiesenen Satze kann man noch folgendes aussprechen:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

$$(30) \quad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A, \quad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A, \quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right) = A$$

die beiden anderen nach sich.

Digitized by Google

Denn aus jeder dieser drei Gleichungen würde für jedes beliebige (μ, ν) folgen:

$$a_0^{(0)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals abnehmen: und:

$$a_0^{(0)} \geqq a_\mu^{(\nu)} \geqq A,$$

falls die $a_\mu^{(\nu)}$ niemals zunehmen. In jedem Falle müssen also die $|a_\mu^{(\nu)}|$ durchweg unter einer endlichen Zahl bleiben, so dass die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung aus dem unmittelbar zuvor bewiesenen Satze hervorgeht.

Ferner ergiebt sich noch:

Ist die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ **monoton** und:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)} = A$$

so hat man auch:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A.$$

Denn bedeutet n die grössere der beiden Zahlen μ, ν, so hat man stets:

$$a_\mu^{(\nu)} \leqq a_n^{(n)} \leqq A.$$

Daraus folgt aber die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit die Beziehung

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}. \tag{31}$$

5. Bleiben die absoluten Beträge einer monotonen Zahlenfolge $(a_\mu^{(\nu)})$ nicht unter einer festen Grenze, giebt es also zu jeder noch so grossen positiven Zahl G Werthepaare (μ, ν), für welche $|a_\mu^{(\nu)}| > G$, so können nur die folgenden zwei Fälle eintreten:

Entweder die Folge $(a_\mu^{(\nu)})$ ist eine niemals abnehmende. Dann müssen die $a_\mu^{(\nu)}$ für hinlänglich grosse Werthe von μ und ν durchweg positiv werden, so dass also geradezu $a_\mu^{(\nu)} > G$, d. h.:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} + = \infty. \tag{32}$$

Digitized by Google

und, wie leicht zu sehen, auch:

$$(33) \qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right) = +\infty.$$

Oder die Folge $(a_{\mu}^{(\nu)})$ ist eine niemals zunehmende. Dann bilden wiederum die Terme $(-a_{\mu}^{(\nu)})$ eine niemals abnehmende Folge, so dass zunächst:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} (-a_{\mu}^{(\nu)}) = +\infty,$$

und daher schliesslich:

$$(34) \quad \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right) = \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} a_{\mu}^{(\nu)}\right) = -\infty.$$

Man kann dieses Resultat auch in folgender Form aussprechen:

Ist die Folge $(a_{\mu}^{(\nu)})$ **monoton**, so zieht **jede** der drei Gleichungen (30) **die beiden anderen** nach sich, auch wenn A die Bedeutung von $+\infty$ oder $-\infty$ hat.

§ 2. Unendliche Doppelreihen: Convergenz und Divergenz. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der Reihe der Zeilen- bezw. Colonnen-Summen.

1. Setzt man:

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_{\mu}^{(0)} \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_{\mu}^{(1)} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_{\mu}^{(\nu)} \end{array}\right\} = S_{\mu}^{(\nu)}.$$

so heisst die unendliche Doppelreihe:

$$(2) \qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_{\mu}^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_{\mu}^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_{\mu}^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

convergent, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_{\mu}^{(\nu)}$ (in dem § 1, Art. 1 definirten Sinne) einen bestimmten Werth besitzt.

Digitized by Google

Ist etwa:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S, \tag{3}$$

so heisst S die Summe der unendlichen Doppelreihe (2). Zur abgekürzten Bezeichnung der in Gl. (1) und (3) enthaltenen Aussagen dient die Schreibweise:

$$\sum_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S. \tag{4}$$

In jedem anderen Falle heisst die Doppelreihe (1) divergent, und zwar eigentlich divergent, wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = +\infty \text{ bezw. } = -\infty; \tag{5}$$

uneigentlich divergent oder oscillirend (unbestimmt), wenn überhaupt kein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ existirt.

Wir bedienen uns in diesen Fällen gelegentlich der zwar nicht ganz correcten, aber bequemen und zu Missverständnissen keinen Anlass bietenden Bezeichnung: die Summe der Doppelreihe (1), in Zeichen: $\sum\limits_0^\infty{}^{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$, sei unendlich gross bezw. unbestimmt.

2. Wie ein Blick auf das Schema (1) lehrt, hat man:

$$\left\{\begin{aligned} &u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} \\ &u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} \quad (\nu > 1). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Ebenso:

$$\left\{\begin{aligned} &u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + \ldots + u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} \\ &u_\mu^{(0)} + u_\mu^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu)} \quad (\mu > 1). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Daraus folgt weiter:

$$\left\{\begin{aligned} &\text{(a) } u_0^{(0)} = S_0^{(0)},\ u_\mu^{(0)} = S_\mu^{(0)} - S_{\mu-1}^{(0)}\ (\mu \geqq 1),\ u_0^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}\ (\nu \geqq 1), \\ &\qquad u_\mu^{(\nu)} = S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)}) \\ &\text{(b)} \qquad\quad = S_{\mu-1}^{(\nu-1)} + S_\mu^{(\nu)} - (S_\mu^{(\nu-1)} + S_{\mu-1}^{(\nu)}) \qquad (\mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Digitized by Google

Die letzte Gleichung zeigt, dass:

$$\lim_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} u_\mu^{(\nu)} = 0 \tag{9}$$

sein muss, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ ist, d. h. wenn die Doppelreihe convergirt. Insbesondere ist also bei einer convergenten Doppelreihe stets:

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu^{(\nu)} = 0, \tag{10}$$

d. h. die Terme der Haupt-Diagonale (Schema (2)) müssen schliesslich gegen Null convergiren. Da andererseits die Existenz eines bestimmten $\lim\limits_{\mu=\infty,\ \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nach Art. 2 der vorigen Paragraphen keineswegs diejenige von:

$\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für irgend einen endlichen Werth von ν

$\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ " " " " " " μ

involvirt, so lehren die Gleichungen (8), dass selbst bei einer convergenten Doppelreihe

$\lim\limits_{\mu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ für keinen einzigen endlichen Werth von ν

$\lim\limits_{\nu=\infty} u_\mu^{(\nu)}$ " " " " " " μ

zu verschwinden braucht. Mit andern Worten: Eine Doppelreihe kann sehr wohl convergiren, ohne dass die Terme einer einzigen Zeile bezw. Colonne mit unbegrenzt wachsendem Stellenzeiger der Null zustreben.

Beispiel. Man setze:

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)} \cdot \left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right) \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wo $a > 1$, und daher nach Gl. (8):

$$\left\{\begin{array}{c} u_0^{(0)} = \dfrac{1}{a+1} \\ u_\mu^{(0)} = \dfrac{(-1)^\mu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{2}{a+1}\right),\ u_0^{(\nu)} = \dfrac{(-1)^\nu}{2}\left(\dfrac{1}{a^\nu} + \dfrac{2}{a+1}\right) \\ u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\dfrac{1}{a^\mu} + \dfrac{1}{a^\nu}\right) \end{array}\right\} (\mu \geqq 1, \nu \geqq 1) \tag{12}$$

Digitized by Google

Die Doppelreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, u_{\mu}^{(\nu)}$ ist alsdann convergent, denn es ergiebt sich:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_{\mu}^{(\nu)} = 0. \tag{13}$$

Nichtsdestoweniger hat man:

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_{\mu}^{(0)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, \quad \lim\limits_{\mu=\infty} \left| u_{\mu}^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^{\nu}} \; (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_{0}^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a+1}, \quad \lim\limits_{\nu=\infty} \left| u_{\mu}^{(\nu)} \right| = \dfrac{1}{a^{\mu}} \; (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \end{array}\right. \tag{14}$$

sodass also die Terme jeder einzelnen Zeile und Colonne durchweg von Null verschieden bleiben.

3. Ist:

$$\lim_{\mu=\infty} S_{\mu}^{(\nu)} = S^{(\nu)} \text{ für: } \nu = 0, 1, 2, \ldots n, \tag{15}$$

so folgt aus Gl. (6), dass:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{0}^{\infty} u_{\mu}^{(0)} = S^{(0)} \\ \sum\limits_{0}^{\infty} u_{\mu}^{(\nu)} = S^{(\nu)} - S^{(\nu-1)} \; (\nu = 1, 2, \ldots n) \end{array}\right. \tag{16}$$

d. h. fallen die Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_{\mu}^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots n$ endlich aus, so bildet die 1te, 2te, ... $(n+1)^{\text{te}}$ Zeile je eine convergente Reihe.

Umgekehrt hat man:

$$S_{m}^{(\nu)} = \sum_{0}^{m}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(0)} + \sum_{0}^{m}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(1)} + \ldots + \sum_{0}^{m}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(\nu)} \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

und daher:

$$\lim_{\mu=\infty} S_{\mu}^{(\nu)} = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(0)} + \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(1)} + \ldots + \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, u_{\mu}^{(\nu)} \; (\nu = 0, 1, 2, \ldots n), \tag{18}$$

falls die rechts stehenden Reihen, d. h. die 1te, 2te, ... $(n+1)^{\text{te}}$ Zeile sämmtlich convergiren.

Hieraus folgt also:

Digitized by Google

Die Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ist **identisch** mit der Convergenz aller einzelnen Zeilen.

Die analoge Beziehung besteht dann offenbar zwischen der Existenz endlicher Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ für $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ und der Convergenz aller einzelnen Colonnen.

4. Mit Benützung dieses Resultates liefern aber die im vorigen Paragraphen gewonnenen Ergebnisse über die Grenzwerthe zweifach unendlicher Zahlenfolgen ohne weiteres die folgenden Sätze:

I. Eine Doppelreihe kann **convergiren**, ohne dass eine einzige Zeile oder Colonne eine **convergente** Reihe bildet. Es kann dann aber immer nur eine **endliche** Anzahl von Zeilen bezw. Colonnen **eigentlich** divergiren oder ein **unendliches** Unbestimmtheits-Intervall besitzen; und es muss das Unbestimmtheits-Intervall aller Zeilen und Colonnen von einer bestimmten an **beliebig klein** werden.

Dies folgt aus § 1, Art. 2. Ein Beispiel einer Doppelreihe, bei welcher sicher keine einzige Zeile und Colonne convergirt (denn die unendlich entfernten Glieder hatten ja nicht einmal den Grenzwerth Null) wurde bereits am Schlusse des Art. 2 gegeben. Hier war (Gl. (11)):

$$S_\mu^{(\nu)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^\mu} + \frac{1}{a^\nu}\right)$$

also:

$$S_\mu^{(0)} = \frac{(-1)^\mu}{2(a+1)}\left(\frac{1}{a^\mu} + 1\right)$$

$$S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} = \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{2(a+1)}\left(\frac{2}{a^\mu} + \frac{a+1}{a^\nu}\right) \quad (\nu \geq 1),$$

sodass also die 1te Zeile in den Grenzen $\pm \frac{1}{2(a+1)}$, die

Digitized by Google

$(\nu+1)^{\text{te}}$ (wo $\nu \geqq 1$) in den Grenzen $\pm \frac{1}{2a^\nu}$ oscillirt. Das analoge gilt bezüglich der Colonnen. Um ferner convergente Doppelreihen herzustellen, in denen eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) eigentlich divergirt oder ein unendliches Unbestimmtheits-Intervall besitzt, braucht man nur in irgend einer convergenten Doppelreihe eine beliebige endliche Anzahl von Zeilen (Colonnen) durch die Terme irgendwelcher eigentlich divergenten oder unendlich-unbestimmten Reihen, ebensoviele andere Zeilen (Colonnen) durch die nämlichen Terme mit entgegengesetztem Vorzeichen zu ersetzen.

II. Ist ausser der **Doppelreihe:** $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S$ jede einzelne **Zeile:** $\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ oder jede einzelne **Colonne:** $\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}$ **convergent,** so **convergirt** auch die Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die Summe S, d. h. man hat:

$$(19) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S.^{1)}$$

---

[1]) Das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)},$$

ausführlicher geschrieben:

$$\sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}\right),$$

hat allemal die Bedeutung von:

$$\lim_{n=\infty}\left(\lim_{m=\infty} \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}\right)$$

d. h. von:

$$\lim_{n=\infty}\left(\lim_{m=\infty} S_m^{(n)}\right).$$

(Fortsetzung auf der nächsten Seite!)

Digitized by Google

Denn nach § 1, Art. 3 hat die Annahme: $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S$ und die Existenz der Grenzwerthe $\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezw. $\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ stets zur Folge, dass:

$$(20) \qquad \lim_{\nu=\infty}(\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S \text{ bezw. } \lim_{\mu=\infty}(\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}) = S.$$

Man kann den Inhalt des Satzes II auch folgendermaassen aussprechen:

Die Summation einer **convergenten**[1]) Doppelreihe mit **convergenten Zeilen** oder **Colonnen** kann auf zwei successive auszuführende einfache Summationen zurückgeführt werden, nämlich:

$$(21) \quad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \left(\sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)}\right) \text{ bezw. } \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}\right).$$

Man bemerke schliesslich, dass der Satz II mutatis mutandis auch richtig bleibt, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl S tritt, da die Gleichung (20) auch in diesem Falle Geltung behält (s. § 1, Art. 3, Gl. (8); also:

III. Ist die **Doppelreihe** der $u_\mu^{(\nu)}$ mit **convergenten Zeilen** bezw. **Colonnen eigentlich** divergent, so gilt das gleiche von der Reihe der **Zeilen-Summen** bezw. **Colonnen-Summen.**

Das analoge gilt für das Symbol:

$$\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)}.$$

Man könnte ein solches Symbol, zum Unterschiede von demjenigen der Doppelreihe: $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$, passend als iterirte Reihe bezeichnen, ein Ausdruck, dessen Analogon zur Vermeidung von Zweideutigkeiten sich auch für die Theorie der bestimmten Integrale empfehlen dürfte.

[1]) Die Convergenz der Doppelreihe, d. h. die Existenz eines endlichen $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ muss a priori feststehen, sonst ist der Satz unrichtig, wie Satz IV zeigt.

Digitized by Google

Mit Berücksichtigung dieses Satzes und der weiteren Betrachtungen in § 1, Art. 3 ergiebt sich sodann:

IV. Auch wenn alle **Zeilen und Colonnen convergente** Reihen bilden, und wenn sowohl die Reihe der **Zeilen-Summen,** als auch diejenige der **Colonnen-Summen** gegen die **nämliche** Summe S **convergirt,** so **kann** die betreffende **Doppelreihe** nichtsdestoweniger **divergiren** und zwar (nach Satz III) allemal **uneigentlich.** Dieses **muss** der Fall sein, wenn die Reihe der **Zeilen-Summen** und diejenige der **Colonnen-Summen** gegen **verschiedene** Werthe convergiren.

Um Beispiele derartiger divergenter Doppelreihen zu gewinnen, hat man lediglich für $S_\mu^{(\nu)}$ einen jener Ausdrücke $a_\mu^{(\nu)}$ zu wählen, welche in § 1, Art. 3 näher untersucht wurden, und sodann die Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ vermittelst der Gleichungen (8) entsprechend darzustellen. Setzt man z. B. (s. § 1, Gl. (16) (19) (22) (25)):

$$(22)\quad S_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2},\ \frac{\mu\nu}{1+\mu^2+\nu^2},\ \left(\frac{2}{1+(\mu-\nu)^2}\right)^{\nu+1},\ \frac{\mu^2\nu^2}{1+\mu^3+\nu^3},$$

so hat man:

$$(23)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = 0 \quad \begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix} \\ \lim\limits_{\nu=\infty}\left(\lim\limits_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = \lim\limits_{\mu=\infty}\left(\lim\limits_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0, \end{cases}$$

während $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ nicht existirt. Es convergirt dann also jede Zeile und jede Colonne gegen die Summe 0, desgleichen die Reihe aller Zeilen-Summen, wie auch aller Colonnen-Summen gegen die Gesammtsumme 0, während die betreffende Doppelreihe oscillirt.

Nimmt man ferner für $S_\mu^{(\nu)}$ einen der folgenden Ausdrücke (s. § 1, Gl. (12)):

$$(24)\qquad S_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu+1}{\mu+\nu+1},\ 2^{-\frac{\nu+1}{\mu+1}},\ \left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1},$$

so ist:

Digitized by Google

$$(25) \qquad \lim_{\nu=\infty}\left(\lim_{\mu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 1, \quad \lim_{\mu=\infty}\left(\lim_{\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}\right) = 0,$$

sodass also die Reihe der Zeilen-Summen gegen die Summe 1, diejenige der Colonnen-Summen gegen die Summe 0 convergirt. Eine verhältnissmässig einfache Form der Reihenglieder $u_\mu^{(\nu)}$ liefert übrigens der letzte der Ausdrücke (24), nämlich:

$$(26) \quad u_0^{(0)} = \tfrac{1}{2}, \text{ im übrigen: } u_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu+1}\cdot\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu - \frac{1}{\mu+2}\cdot\left(\frac{\mu+1}{\mu+2}\right)^{\nu+1}.$$ [1]

5. Hat man durchweg $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so bilden die $S_\mu^{(\nu)}$ allemal eine monotone (nämlich niemals abnehmende) Folge positiver Zahlen. Daraus ergeben sich aber sofort mit Rücksicht auf § 1, Art. 4 die folgenden Sätze:

V. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ und bleibt $S_\mu^{(\nu)}$ unter einer endlichen Zahl g, so convergirt die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ gegen eine bestimmte Summe S. Zugleich convergirt jede **Zeile** und jede **Colonne,** und die Reihe der **Zeilen-** bezw. **Colonnen-Summen** convergirt gleichfalls gegen die Summe S.

VI. Ist $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$, so zieht **jede** der drei Gleichungen:

$$(27) \qquad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S$$

die beiden anderen nach sich. Dies gilt auch noch, wenn $+\infty$ an die Stelle der bestimmten positiven Zahl S tritt.

Die Sätze V und VI bleiben selbstverständlich in Kraft, wenn unter den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ negative Zahlen in endlicher Anzahl vorkommen.

---

[1]) Es ist dies im wesentlichen das von F. Arndt herrührende Beispiel (Grunert's Archiv, Bd. 11, S. 319) Beispiel (s. Stolz, Allg. Arithmetik. Bd. I, S. 246).

Digitized by Google

§ 3. Beziehungen zwischen einer Doppelreihe und der aus den Diagonal-Summen gebildeten einfachen Reihe.

1. Formt man das zweifach unendliche Schema:

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(1)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

in eine einfach unendliche Reihe um, indem man die Terme $u_\mu^{(\nu)}$ nach „Diagonalen" ordnet, d. h. indem man bildet:

$$(2)\qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu, \text{ wo: } w_\nu = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-1}^{(1)} + u_\nu^{(0)},$$

so besteht zwischen der Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und der einfach-unendlichen Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ eine vollkommene Aequivalenz, sobald $u_\mu^{(\nu)} \geqq 0$.

Es gilt dann nämlich, wie das Schema:

$$\begin{array}{l} u_0^{(0)} + \ldots + u_n^{(0)} + \ldots + u_{2n}^{(0)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_0^{(n)} + \ldots + u_n^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_0^{(2n)} \end{array}$$

ohne weiteres zeigt, die doppelte Ungleichung:

$$(3)\qquad \sum_0^n{}_\nu\, w_\nu \leqq S_n^{(n)} \leqq \sum_0^{2n}{}_\nu\, w_\nu.$$

Wenn nun die Doppelreihe gegen die Summe S convergirt, so hat man speciell $\lim\limits_{n=\infty} S_n^{(n)} = S$, also:

$$\sum_0^n{}_\nu\, w_\nu \leqq S,$$

Digitized by Google

und daraus folgt zunächst wegen $w_\nu \geqq 0$, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Bringt man sodann Ungl. (3) auf die Form:

$$(4) \qquad 0 \leqq S_n^{(n)} - \sum_0^n{}_\nu\, w_\nu \leqq \sum_{n+1}^{2n}{}_\nu\, w_\nu,$$

so erkennt man unmittelbar, dass: $\lim_{n=\infty} (S_n^{(n)} - \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu) = 0$, und somit:

$$(5) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S.$$

Umgekehrt: Wenn $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ gegen die Summe S convergirt, so lehrt die Ungleichung (4), dass auch:

$$(6) \qquad \lim_{n=\infty} S_n^{(n)} = S,$$

und somit nach § 1. Gl. (31) auch allgemein:

$$(7) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = S.$$

Daraus folgt weiter, dass die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ und die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ auch allemal gleichzeitig divergiren, falls eine der beiden divergirt.

Fasst man dieses Resultat mit dem Satz VI des vorigen Paragraphen zusammen, so ergiebt sich an dessen Stelle der folgende etwas allgemeinere:

Ist $u_\mu^{(\nu)} > 0$, so zieht jede der **vier** Gleichungen:

$$(8) \quad \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S,\ \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S$$

die drei anderen nach sich, gleichgültig, ob S endlich oder unendlich gross ist.

Digitized by Google

2. Um die Beziehung zwischen einer beliebigen Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ und der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ festzustellen, schicken wir zunächst den folgenden Hülfssatz voraus, welcher eine Verallgemeinerung eines bekannten Canchy'schen[1]) Satzes darstellt:

Bleiben die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ $\begin{pmatrix}\mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$ numerisch unter einer endlichen Zahl g, und ist:

$$\lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a, \tag{9}$$

(wo a eine bestimmte Zahl incl. Null vorstellt), so wird:

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_0^{(n)} + a_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}^{(1)} + a_n^{(0)}}{n+1} = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} = a. \tag{10}$$

Beweis. Man hat zunächst identisch:

$$\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1) \cdot a = \sum_0^n{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a). \tag{11}$$

In Folge der Voraussetzung (9) kann man nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Zahl ε eine Zahl m so fixiren, dass:

$$|a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m,\ n - \nu \geqq m. \tag{12}$$

Nimmt man jetzt $n > 2m$ an (also: $n - m > m$) und schreibt Gl. (11) folgendermaassen:

$$\begin{aligned} &\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\, a \\ &= \sum_0^m{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{m+1}^{n-m}{}_\nu\, (a_\nu^{(n-\nu)} - a) + \sum_{n-m+1}^{n}{}_\nu\, (a^{(n-\nu)} - a), \end{aligned} \tag{13}$$

so wird in der zweiten Summe der rechten Seite durchweg: $|a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq \varepsilon$, in der ersten und dritten zum mindesten: $|a_\nu^{(n-\nu)} - a| \leqq |a^{(n-\nu)}| + |a| < g + |a|$, und daher:

---

[1]) Analyse algébrique. p. 54.

Digitized by Google

$$(14)\quad \left|\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - (n+1)\,a\right| < (2m+1)\cdot(g+|a|) + (n-2m)\cdot\varepsilon$$

oder:

$$(15)\quad \left|\frac{1}{n+1}\cdot\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - a\right| < \frac{2m+1}{n+1}\cdot(g+|a|) + \left(1-\frac{2m+1}{n+1}\right)\cdot\varepsilon.$$

Lässt man hier n in's Unendliche wachsen, so wird:

$$(16)\quad \lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{n+1}\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)} - a\right| < \varepsilon.$$

also schliesslich:

$$(17)\quad \lim_{n=\infty}\left|\frac{1}{n+1}\cdot\sum_0^n{}_\nu\, a_\nu^{(n-\nu)}\right| = a.$$

3. Nunmehr können wir den folgenden Satz beweisen:

Besitzt die **convergente** Doppelreihe:

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)} = S$$

die Eigenschaft, dass die einzelnen Zeilen und Colonnen **convergiren** oder innerhalb **endlicher Grenzen oscilliren,** so kann die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ nur **convergiren** oder **oscilliren.**[1]) Im **ersteren** Falle ist dann auch:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass in Folge der gemachten Voraussetzungen $|S_\mu^{(\nu)}|$ für alle möglichen μ, ν unter einer festen Zahl g bleiben muss.

Wegen der Convergenz der Doppelreihe gegen die Summe S lassen sich jeder positiven Zahl ε zwei Zahlen m, n zuordnen, so dass:

---

[1]) Sie kann also niemals eigentlich divergiren. Dagegen können ihre Unbestimmtsgrenzen auch $\pm\infty$ werden (s. das Beispiel in Art. 4).

Digitized by Google

$$|S_\mu^{(\nu)} - S| < \varepsilon \quad \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

also:

$$S - \varepsilon < S_\mu^{(\nu)} < S + \varepsilon,$$

und somit:

$$(18) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < |S| + \varepsilon \quad (\mu \geqq m,\ \nu \geqq n).$$

Betrachtet man jetzt die ersten n Zeilen der Doppelreihe, so bleibt nach Voraussetzung die Summe jeder einzelnen, wieviele Glieder man auch summiren mag, numerisch unter einer endlichen Grenze. Dasselbe gilt also auch für diejenigen Summen, welche entstehen, wenn man die ersten 2, 3, ... n Zeilen addirt, sodass man setzen kann:

$$(19) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < g' \quad \text{für: } \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.},\ \nu < n,$$

wo g' eine bestimmte positive Zahl bedeutet.

Analog ergiebt sich durch Betrachtung der ersten m Colonnen:

$$(20) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < g'' \quad \text{für: } \mu < m,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.}$$

Bedeutet jetzt g eine Zahl, die von keiner der drei Zahlen $|S| + \varepsilon$, g', g'' überstiegen wird, so bestehen alle drei Beziehungen (18) (19) (20) gleichzeitig, sobald man jene drei Zahlen durch g ersetzt, d. h. es ergiebt sich schliesslich:

$$(21) \qquad |S_\mu^{(\nu)}| < g \quad \text{für: } \begin{cases} \mu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \text{ in inf.} \end{cases}$$

Nun werde gesetzt:

$$(22) \qquad w_0 + w_1 + \ldots + w_\nu = W_\nu,$$

so hat man für $\nu \geqq 1$:

$$\begin{aligned} W_\nu = {} & u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(0)} + u_{\nu-1}^{(0)} + u_\nu^{(0)} = S_\nu^{(0)} \\ & + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(1)} + u_{\nu-1}^{(1)} \qquad + (S_{\nu-1}^{(1)} - S_{\nu-1}^{(0)}) \\ & + u_0^{(2)} + u_1^{(2)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} \qquad + (S_{\nu-2}^{(2)} - S_{\nu-2}^{(1)}) \\ & + \ldots\ldots \qquad + \ldots\ldots \\ & + u_0^{(\nu)} \qquad + (S_0^{(\nu)} - S_0^{(\nu-1)}) \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

Digitized by Google

$$(23)\quad W_r = S_r^{(0)} + S_{r-1}^{(1)} + \ldots + S_1^{(r-1)} + S_0^{(r)} - \left\{S_{r-1}^{(0)} + S_{r-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(r-1)}\right\}$$

Substituirt man hier der Reihe nach $r = 1, 2, 3, \ldots n$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
W_1 &= S_1^{(0)} + S_0^{(1)} - S_0^{(0)} \\
W_2 &= S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)} - \left\{S_1^{(0)} + S_0^{(1)}\right\} \\
W_3 &= S_3^{(0)} + S_2^{(1)} + S_1^{(2)} + S_0^{(3)} - \left\{S_2^{(0)} + S_1^{(1)} + S_0^{(2)}\right\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
W_n &= S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)} - \left\{S_{n-1}^{(0)} + S_{n-2}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n-1)}\right\},
\end{aligned}$$

und wenn man diese n Gleichungen zu der folgenden addirt:

$$W_0 = S_0^{(0)}$$

so resultirt nach Hinzufügung des Factors $\frac{1}{n+1}$:

$$(24)\qquad \frac{1}{n+1}\sum_0^n{}_r\, W_r = \frac{S_n^{(0)} + S_{n-1}^{(1)} + \ldots + S_0^{(n)}}{n+1}.$$

Hieraus folgt aber für $\lim n = \infty$, mit Berücksichtigung der Beziehung $\lim\limits_{\mu = \infty,\, r = \infty} S_\mu^{(r)} = S$ und des unmittelbar zuvor bewiesenen Hilfssatzes:

$$(25)\qquad \lim_{n = \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_r\, W_n = S.$$

Wenn nun $\sum\limits_0^\infty{}_r\, w_r$ convergirt und etwa:

$$(26)\qquad \sum_0^\infty{}_r\, w_r = \lim_{n = \infty} W_n = W$$

ist, so ist, nach dem im vorigen Artikel citirten Cauchy'schen Satze, auch:

$$(27)\qquad \lim_{n = \infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_r\, W_r = W,$$

so dass sich aus der Verbindung der Gleichungen (25)—(27) ergiebt:

Digitized by Google

$$(28) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = S.$$

Wäre nun andererseits $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ eigentlich divergent, also $\lim\limits_{n=\infty} = +\infty$ bezw. $= -\infty$, so müsste wiederum nach jenem Cauchy'schen Satze:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \sum_0^n{}_\nu\, W_\nu = +\infty \text{ bezw. } = -\infty$$

sein, was der Gleichung (25) widerspräche. Daraus folgt mit Nothwendigkeit, dass die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$, falls sie nicht convergirt, jedenfalls nur oscilliren kann.

4. Um an einigen einfachen Beispielen zu zeigen, dass die beiden im vorigen Satze hervorgehobenen Möglichkeiten auch wirkich eintreten können, werde gesetzt:

$$(29) \qquad u_\mu^{(\nu)} = v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1},$$

wo $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$ als (bedingt oder unbedingt) convergent angenommen wird. Die auf diese Weise definirte Doppelreihe wird durch das Schema dargestellt:

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} (v_0 - v_1) + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \ldots + (v_\mu - v_{\mu+1}) + \ldots \\ + (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + \ldots + (v_{\mu+1} - v_{\mu+2}) + \ldots \\ + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_4) + (v_4 - v_5) + \ldots + (v_{\mu+2} - v_{\mu+3}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + (v_\nu - v_{\nu+1}) + (v_{\nu+1} - v_{\nu+2}) + (v_{\nu+2} - v_{\nu+3}) + \ldots + (v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Dasselbe ist offenbar convergent und besitzt die Summe: $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$. Denn man hat:

$$(31) \qquad S_m^{(n)} = \sum_0^n{}_\nu\, v_\nu - \sum_{m+1}^{m+n+1}{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^m{}_\nu\, v_\nu - \sum_{n+1}^{m+n+1}{}_\nu\, v_\nu.$$

Digitized by Google

Die einzelnen Zeilen und Colonnen sind gleichfalls convergent und ihre Summen der Reihe nach $= v_0, v_1, v_2, \ldots$

Andererseits hat man offenbar:

$$w_\nu = (\nu + 1) \cdot (v_\nu - v_{\nu+1}) \tag{32}$$

und daher:

$$\sum_0^{n-1}{}_\nu\, w_\nu = (v_0 - v_1) + 2\,(v_1 - v_2) + 3\,(v_2 - v_3) + \ldots + n\,(v_{n-1} - v_n)$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu\, v_\nu - n \cdot v_n. \tag{33}$$

Diese Gleichung lehrt, dass $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ dann und nur dann convergirt, wenn $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n$ eine bestimmte Zahl ist. Letzteres ist aber nur in der Weise möglich, dass:

$$\lim_{n=\infty} n \cdot v_n = 0. \tag{34}$$

Denn die Beziehung $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n = a$, wo $|a| > 0$, würde ja die Divergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$ zur Folge haben. Hieraus folgt also, dass in der That:

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu \text{ d. h. } = \sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\,(v_{\mu+\nu} - v_{\mu+\nu+1}) \tag{35}$$

wird, wenn $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ überhaupt convergirt. Um Beispiele dieser Art zu gewinnen hat man also nur v_ν der Bedingung (34) gemäss zu wählen (z. B. $v_\nu = \frac{1}{(\nu+1)^2}$, $v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{(\nu+2)\lg(\nu+2)}$).

Da $\lim_{n=\infty} n \cdot v_n$ auch nicht $= +\infty$ bezw. $= -\infty$ sein kann (weil sonst wiederum $\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu$ divergiren müsste), so erkennt man zunächst aus Gl. (33), dass $\sum_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ in keinem Falle eigentlich divergiren kann.

Digitized by Google

Im übrigen bleibt nur noch die Möglichkeit offen, dass $\liminf\limits_{n=\infty} n \cdot v_n$ und $\limsup\limits_{n=\infty} n \cdot v_n$ verschieden ausfallen. In diesem Falle oscillirt dann die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ nach Gl. (33) in den Grenzen:

$$(36) \qquad \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \limsup_{n=\infty} n \cdot v_n \text{ und: } \sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu - \liminf_{n=\infty} n \cdot v_n.$$

(Beispiele. Man setze:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu+1}, \text{ also: } u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu+\nu+1} + \frac{1}{\mu+\nu+2}\right).$$

Alsdann wird:

$$\liminf_{n=\infty} n \cdot v_n = -1, \quad \limsup_{n=\infty} n \cdot v_n = +1, \text{ und da:}$$

$$\sum_0^\infty{}_\nu\, v_\nu = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu+1} = \lg 2,$$

so ergeben sich: $(\lg 2 - 1)$ und $(\lg 2 + 1)$ als Unbestimmtheitsgrenzen von $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$.

Setzt man dagegen:

$$v_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu+1}}, \text{ also: } u_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+1}} + \frac{1}{\sqrt{\mu+\nu+2}}\right),$$

so wird: $\liminf\limits_{n=\infty} n \cdot v_n = -\infty$, $\limsup\limits_{n=\infty} n \cdot v_n = +\infty$, und die Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, w_\nu$ oscillirt somit in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$).

5. Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, dass die bei der Formulirung des Satzes in Art. 3 gemachte Einschränkung, welche sich auf die Endlichkeit der Zeilen- und Colonnen-Summen bezieht, nicht etwa lediglich der Beweisführung zu Liebe eingeführt wurde: dieselbe bildet vielmehr eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit jenes Satzes, d. h. der letztere kann thatsächlich hinfällig werden, wenn die fragliche Bedingung nicht erfüllt ist.

Digitized by Google

Man kann dies in sehr einfacher Weise aus der folgenden Ueberlegung ersehen. Es sei $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, u_{\mu}^{(\nu)} = S$ irgend eine convergente Doppelreihe, für welche die Beziehung besteht: $\sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, w_{\nu} = S$. Man bilde nun aus dieser Doppelreihe eine neue, indem man die Terme der ersten Zeile, also die $u_{\mu}^{(0)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, durch $u_{\mu}^{(0)} + v_{\mu}$, die der zweiten, also die $u_{\mu}^{(1)}$, durch $u_{\mu}^{(1)} - v_{\mu}$ ersetzt, wo die v_{μ} $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$ eine nach Belieben zu wählende Zahlenfolge bedeuten. Man erhält auf diese Weise das folgende Schema:

$$(37)\quad \begin{cases} (u_0^{(0)} + v_0) + (u_1^{(0)} + v_1) + \ldots + (u_{\nu-1}^{(0)} + v_{\nu-1}) + (u_{\nu}^{(0)} + v_{\nu}) + \ldots \\ + (u_0^{(1)} - v_0) + (u_1^{(1)} - v_1) + \ldots + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) + (u_{\nu}^{(1)} - v_{\nu}) + \ldots \\ + u_0^{(2)} \quad + u_1^{(2)} \quad + \ldots + u_{\nu-1}^{(2)} \quad + u_{\nu}^{(2)} \quad + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} \quad + u_1^{(\nu)} \quad + \ldots + u_{\nu-1}^{(\nu)} \quad + u_{\nu}^{(\nu)} \quad + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

und erkennt unmittelbar, dass auch diese Doppelreihe gegen die Summe S convergirt.

Bezeichnet man sodann die Diagonal-Summen dieses Schema's mit w'_{ν} $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, so wird:

$$(38)\quad \begin{cases} w'_0 = u_0^{(0)} + v_0 \\ w'_{\nu} = u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_{\nu-2}^{(2)} + (u_{\nu-1}^{(1)} - v_{\nu-1}) + (u_{\nu}^{(0)} + v_{\nu}) \quad (\nu \geqq 1) \\ \quad = w_{\nu} - v_{\nu-1} + v_{\nu} \end{cases}$$

und daher:

$$(39)\qquad \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, w'_{\nu} = \sum_{0}^{n}{}_{\nu}\, w_{\nu} + v_n.$$

Ist nun $\lim\limits_{n=\infty} v_n = v$ endlich und von Null verschieden, so wird nach Gl. (34):

$$(40)\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_{\nu}\, w'_{\nu} = S + v,$$

Digitized by Google

d. h. die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu w'_\nu$ bleibt zwar convergent, ihre Summe ist aber verschieden von derjenigen der betreffenden Doppelreihe. (Beispiel: $v_\nu = 1$).

Ist dagegen $\lim_{n=\infty} v_n = +\infty$ oder $= -\infty$, so lehrt Gl. (34), dass die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu w'_\nu$ eigentlich divergent wird. (Beispiel: $v_\nu = \nu$).

Die Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu w'_\nu$ verliert also hier thatsächlich jene Eigenschaften, welche ihr nach dem Satze des Art. 3 zukommen, falls die Zeilen- und Colonnen-Summen durchweg endlich bleiben.

§ 4. Absolut convergente Doppelreihen. — Identität zwischen absoluter und unbedingter Convergenz.

1. Die aus den Termen $u_\mu^{(\nu)} \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$ gebildete Doppelreihe heisst absolut convergent, wenn die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt.

Um vor allem nachzuweisen, dass eine in diesem Sinne absolut convergente Doppelreihe überhaupt convergirt, werde gesetzt:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \quad |u_0^{(0)}| + |u_1^{(0)}| + \ldots + |u_\mu^{(0)}| \\ \pm |u_0^{(1)}| + |u_1^{(1)}| + \ldots + |u_\mu^{(1)}| \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + |u_0^{(\nu)}| + |u_1^{(\nu)}| + \ldots + |u_\mu^{(\nu)}| \end{array} \right\} = S_\mu^{(\nu)},$$

während $S_\mu^{(\nu)}$ wiederum die entsprechende Summe der $u_\mu^{(\nu)}$ bezeichnen mag. Da allgemein:

$$|\Sigma u_\mu^{(\nu)}| \leq \Sigma |u_\mu^{(\nu)}|$$

(wobei sich die Summation links und rechts über die nämlichen Werthe von μ, ν zu erstrecken hat), so hat man:

Digitized by Google

(2) $$\left| S_{m+\varrho}^{(n+0)} - S_m^{(n)} \right| \leqq \overline{S}_{m+\varrho}^{(n+0)} - \overline{S}_m^{(n)},$$

sodass gleichzeitig mit $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} \overline{S}_m^{(n)}$ stets auch $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} S_m^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, also mit der Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ stets auch diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ convergirt.

2. Solche absolut convergente zeigen ein ganz analoges Verhalten, wie convergente Doppelreihen mit positiven Gliedern. Insbesondere gilt der Satz:

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **absolut** convergent und:

(3) $$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S,$$

so convergirt auch jede einzelne Zeile (Colonne) und die Reihe der Zeilen-Summen (Colonnen-Summen) **absolut,** und man hat:

(4) $$\sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Zeilen-Summen)}$$

(5) $$\sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S \quad \text{(Reihe der Colonnen-Summen).}$$

Ebenso convergirt die Reihe der Diagonalen **absolut** und zwar auch dann, wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst, und man hat:

(6) $$\sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \quad \text{(Reihe der Diagonalen).}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergirt, so convergirt in dem Schema der $|u_\mu^{(\nu)}|$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- und der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen. In Folge dessen ist aber in dem Schema der $u_\mu^{(\nu)}$ jede Zeile und Colonne, die Reihe der Zeilen- uud der Colonnen-Summen und die Reihe der Diagonalen **absolut** convergent (auch wenn man durchweg die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst).

Digitized by Google

Es handelt sich also nur noch darum zu zeigen, dass die betreffenden Reihen sämmtlich die Summe S besitzen. Für die Reihe der Diagonalen (Gl. (6)) folgt dies aber unmittelbar aus dem Satze in Art. 3 des vorigen Paragraphen.

Die Gültigkeit der Gleichungen (4) und (5) ergiebt sich dann schliesslich, indem man einen bekannten Satz[1]) über absolut convergente einfach-unendliche Reihen auf die Reihe (6) anwendet, nämlich: Vertheilt man die Glieder einer absolut convergenten Reihe mit der Summe S in unendlich viele Reihen, so ist jede derselben (absolut) convergent und die aus ihren Summen gebildete Reihe convergirt gleichfalls gegen die Summe S.

3. Der im vorigen Artikel bewiesene Satz lässt sich ohne weiteres in folgender Weise umkehren bezw. verallgemeinern:

Von den **vier** Gleichungen:

$$(7)\quad \begin{cases} \sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum\limits_0^\infty{}_\nu \sum\limits_0^\infty{}_\mu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \quad \sum\limits_0^\infty{}_\mu \sum\limits_0^\infty{}_\nu\, u_\mu^{(\nu)} = S, \\ \qquad \sum\limits_0^\infty{}_\nu\, (u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}) = S \end{cases}$$

zieht **jede** einzelne **die drei anderen** nach sich, wenn die in der **Voraussetzung** auftretende Reihe bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen convergent bleibt.

Aus der letzteren Annahme folgt nämlich (nach dem Satze am Schlusse von § 3, Art. 1), dass die Doppelreihe der $|u_\mu^{(\nu)}|$ convergent, also diejenige der $u_\mu^{(\nu)}$ absolut convergent ist. Sodann ergiebt sich aber alles weitere aus dem Satze des vorigen Artikels.

In diesem Satze ist offenbar der folgende von Cauchy herrührende[2]), als Theil enthalten, nämlich:

---

[1]) s. z. B. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. 1, S. 242.

[2]) Analyse algébrique, p. 541.

Digitized by Google

Convergiren alle **Zahlen** des Schema's:

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad u_0^{(0)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + u_0^{(1)} + u_1^{(1)} + \ldots + u_\mu^{(0)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu)} + \ldots + u_\mu^{(\nu)} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

und bilden die **Zeilen-Summen** eine convergente Reihe mit der Summe S, so gilt das Gleiche von den einzelnen **Colonnen** und der Reihe der **Colonnen-Summen**, falls die vorausgesetzten Convergenz-Eigenschaften bei Vertauschung der $u_\mu^{(\nu)}$ mit ihren absoluten Beträgen erhalten bleiben.

4. Eine convergente Doppelreihe heisst **unbedingt** convergent, wenn jede durch Umordnung der Glieder daraus hervorgehende Doppelreihe gegen dieselbe Summe convergirt, wie die ursprüngliche. Dabei betrachten wir die Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, v_\mu^{(\nu)}$ dann und nur dann als durch „Umordnung" aus der Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, u_\mu^{(\nu)}$ hervorgegangen, wenn jedem Terme $u_\mu^{(\nu)}$ ein ihm gleicher $v_\varrho^{(\sigma)}$ entspricht und umgekehrt. Es muss also jeder Term, der in dem Schema:

$$\begin{array}{cccc} u_0^{(0)} & u_1^{(0)} & u_2^{(0)} & \ldots \\ u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \ldots \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

an einer bestimmten endlichen Stelle erscheint, auch in dem Schema:

$$\begin{array}{cccc} v_0^{(0)} & v_1^{(0)} & v_2^{(0)} & \ldots \\ v_0^{(1)} & v_1^{(1)} & v_2^{(1)} & \ldots \\ v_0^{(2)} & v_1^{(2)} & v_2^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

eine bestimmt endliche Stelle innehaben und umgekehrt.

Digitized by Google

Alsdann gilt der Satz:

Jede **absolut** convergente Doppelreihe ist **unbedingt** convergent.

Beweis. Es werde das allgemeine Glied der ursprünglichen Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, ihre Summe mit S, dasjenige der umgeordneten mit $v_\mu^{(\nu)}$ bezeichnet. Dann folgt zunächst, dass auch die Doppelreihe der $v_\mu^{(\nu)}$ convergirt und zwar absolut. Denn setzt man etwa: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |u_\mu^{(\nu)}| = S$, so muss jede begrenzte Doppelsumme, welche aus den Termen $|v_\mu^{(\nu)}|$ gebildet wird, unterhalb S bleiben, sodass also $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} |v_\mu^{(\nu)}|$ convergirt und $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} v_\mu^{(\nu)}$ absolut convergirt. Bezeichnet man die Summe der letzteren Doppelreihe mit T, so wird nach dem Satze des Art. 2 (Gl. (6)):

$$(9)\qquad \begin{cases} \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)}\right) = S \\ \sum_0^\infty{}_\nu \left(u_0^{(\nu)} + v_1^{(\nu-1)} + \ldots + v_\nu^{(0)}\right) = T \end{cases}$$

Jede dieser einfach-unendlichen Reihen ist absolut convergent, auch wenn man die einzelnen Terme $u_\mu^{(\nu)}$ bezw. $v_\mu^{(\nu)}$ als Reihenglieder auffasst. Die zweite stellt dann aber lediglich eine Umordnung der ersten dar, und somit ergiebt sich:

$$(10)\qquad T = S,$$

womit die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist.

5. Um auch die Umkehrung des letzten Satzes beweisen zu können, schicken wir die folgende Bemerkung voraus. Eine einfach-unendliche Zahlenfolge:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots$$

lässt sich auf unendlich viele Arten als zweifach-unendliche Folge anordnen, am einfachsten etwa in folgender Weise:

Digitized by Google

man theile jene Folge in Gruppen, welche der Reihe nach aus $1, 3, 5, \ldots (2\nu + 1), \ldots$ Termen bestehen, sodass also die ersten ν Gruppen zusammen $(\nu + 1)^2$ Terme enthalten, und ordne sodann diese Gruppe zu einem unbegrenzt fortsetzbaren quadratischen Schema, wie folgt:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{c|cccccc}
(1) \rightarrow & u_1 & u_4 & u_9 & \cdots & u_{(\nu+1)^2} & \cdots \\
 & & \uparrow & \uparrow & \cdots & \uparrow & \cdots \\
(2) \rightarrow & u_2 \rightarrow & u_3 & u_8 & \cdots & & \cdots \\
 & & & \uparrow & \cdots & & \cdots \\
(3) \rightarrow & u_5 \rightarrow & u_6 \rightarrow & u_7 & \cdots & & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
 & & & & & \uparrow & \cdots \\
(\nu+1) \rightarrow & u_{\nu^2+1} \rightarrow & u_{\nu^2+2} \rightarrow & u_{\nu^2+3} \rightarrow & \cdots & u_{\nu^2+\nu+1} & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right.$$

Bezeichnet man jetzt mit $s_\mu^{(\nu)}$ die Summe aller derjenigen Terme, welche den ersten ν Zeilen und μ Colonnen dieses Schema's angehören, so hat man speciell:

$$(11)\qquad s_n^{(n)} = \sum_1^{n^2} {}^{\nu}\, \mu_\nu$$

Wenn nun $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)}$ einen bestimmten Werth besitzt, so folgt daraus freilich noch nicht das gleiche für $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} s_m^{(n)}$: d. h. man kann hieraus noch keinen Schluss auf die Convergenz derjenigen Doppelreihe ziehen, welche durch das Schema (10) definirt wird.

Wenn dagegen $\lim\limits_{n=\infty} s_n^{(n)} = \pm\infty$ ist, oder wenn $\liminf\limits_{n=\infty} s_n^{(n)}$ und $\limsup\limits_{n=\infty} s_n^{(n)}$ verschieden ausfallen, so folgt mit Sicherheit, dass kein bestimmter $\lim\limits_{m=\infty, n=\infty} s_m^{(n)}$ existirt, und dass somit die Doppelreihe (10) unter keinen Umständen convergiren kann.

Digitized by Google

6. Mit Benützung dieser Bemerkung und des nämlichen Grundgedankens, welchen Riemann beim Beweise eines bekannten Satzes über die bedingte Convergenz einer nicht-absolut convergenten (einfachen) Reihe verwendet hat, können wir jetzt den folgenden Satz beweisen:

Eine convergente Doppelreihe, welche **nicht absolut** convergirt, lässt sich stets durch Umordnung **divergent** machen. Sie kann also **keinesfalls unbedingt** convergiren.

Beweis. Bezeichnet man wiederum das allgemeine Glied der betrachteten Doppelreihe mit $u_\mu^{(\nu)}$, so lässt sich die Gesammtheit dieser Glieder durch Anordnung nach „Diagonalen" in Form der einfach-unendlichen Reihe anschreiben:

$$(12) \quad u_0^{(0)} + u_0^{(1)} + u_1^{(0)} + \ldots + u_0^{(\nu)} + u_1^{(\nu-1)} + \ldots + u_\nu^{(0)} + \ldots$$

Alsdann folgt zunächst aus der Voraussetzung, dass diese Reihe sowohl positive, als negative Glieder in unbegrenzter Anzahl enthalten muss, und dass die Reihe der positiven und diejenige der negativen Terme einzeln divergiren: denn in jedem anderen Falle würde die vorgelegte Doppelreihe, wie leicht zu sehen, absolut convergiren oder eigentlich divergiren. Es werde die Reihe der in (12) enthaltenen positiven Glieder mit:

$$a_1, \; a_2, \; a_3, \; \ldots \qquad (A),$$

die der negativen mit:

$$-b_1, \; -b_2, \; -b_3, \; \ldots \qquad (B)$$

bezeichnet. Nun entnehme man zunächst der Reihe (A) so viele positive Glieder, dass ihre Summe $\geqq 1$ ausfüllt, und füge nöthigenfalls noch so viele ebensolche Glieder hinzu, dass ihre Gesammt-Anzahl eine Quadratzahl: n_1^2 wird. Ordnet man dann diese n_1^2 Glieder nach dem zuvor angegebenen Verfahren zu einem quadratischen Schema, so gilt also für dasselbe die Beziehung:

$$(13) \qquad s_{n_1}^{(n_1)} \geqq 1.$$

Digitized by Google

Jetzt füge man zu der Summe $s_{n_1}^{(n_1)}$ so viele negative Glieder aus der Reihe (B), dass die Gesammt-Summe $\leqq -1$ wird, und nöthigenfalls weitere negative Glieder, bis die Gesammt-Anzahl wiederum eine Quadratzahl: n_2^2 wird (wo also $n_2 \geqq n_1 + 1$). Durch entsprechende Anreihung dieser Terme kann man das quadratische Schema zu einem solchen von n_2^2 Gliedern vergrössern und hat sodann:

$$s_{n_2}^{(n_2)} \leqq -1. \tag{14}$$

In analoger Weise bringe man dasselbe durch Hinzufügung von positiven Termen auf n_3^2 Glieder, sodass:

$$s_{n_3}^{(n_3)} \geqq 2, \tag{15}$$

alsdann durch Hinzufügung von negativen Termen auf n_4^2 Glieder, so dass:

$$s_{n_4}^{(n_4)} \leqq -2. \tag{16}$$

Dieses Verfahren lässt sich in der Weise fortsetzen, dass nach $(2\nu - 1)$ solchen Operationen ein quadratisches Schema von $n_{2\nu-1}^2$ Gliedern mit der Summe resultirt:

$$s_{n_{2\nu-1}}^{(n_{2\nu-1})} \geqq \nu, \tag{17}$$

nach der nächsten ($(2\nu)^{\text{ten}}$) Operation ein solches von $n_{2\nu}^2$ Gliedern mit der Summe:

$$s_{n_{2\nu}}^{(n_{2\nu})} \leqq -\nu. \tag{18}$$

Bei unbegrenzter Fortsetzung dieser Methode entsteht also aus den Termen $u_\mu^{(\nu)}$ eine Doppelreihe, deren Summe in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ oscillirt.

7. Aus dem eben bewiesenen Satze geht aber ohne weiteres der folgende hervor:

Jede **unbedingt** convergente Doppelreihe ist auch **absolut** convergent.

Und es ergiebt sich sodann mit Berücksichtigung von Art. 2:

Digitized by Google

Ist die Doppelreihe der $u_\mu^{(\nu)}$ **unbedingt** convergent, so convergirt auch jede **Zeile (Colonne)**, desgleichen die aus den **Zeilen-Summen (Colonnen-Summen)** gebildete Reihe, und die Summe der letzteren ist gleich der Summe der Doppelreihe, d. h. man hat:

$$(19) \qquad \sum_{\mu,\nu} u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\nu \sum_0^\infty{}_\mu u_\mu^{(\nu)} = \sum_0^\infty{}_\mu \sum_0^\infty{}_\nu u_\mu^{(\nu)}.$$

Absolute und unbedingte Convergenz erweisen sich also schliesslich als völlig gleichwerthig.

8. Eine Doppelreihe, welche convergirt, ohne **absolut** zu convergiren, ist also nur **bedingt** convergent: sie kann, wie der Beweis in Art. 6 zeigt, durch blosse Umordnung der Terme stets in eine divergente Doppelreihe verwandelt werden. Zu den nur bedingt convergirenden Doppelreihen gehören z. B. eo ipso alle diejenigen, bei denen irgend eine Zeile oder Colonne divergirt; ferner die in § 3, Art. 4 betrachteten, bei denen die Reihe der Diagonalen divergirt: denn bei einer unbedingt, als absolut convergenten Doppelreihe, muss ja die Reihe der Diagonalen gleichfalls convergiren (s. Art. 2). Andere Beispiele bedingt convergenter Doppelreihen giebt Herr Stolz in dem oben citirten Aufsatze.[1])

Man bemerke, dass auch bei einer nur bedingt convergirenden Doppelreihe, der Ausdruck $\lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ bei jedem beliebigen simultanen Grenzübergange $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ eine einzige bestimmte Zahl vorstellt, und dass dieser Grenzwerth bezw. seine Existenz nur dadurch alterirt werden kann, dass die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ von vornherein in eine andere Anordnung gebracht werden.

Es erschien mir nützlich, diesen Punkt nochmals ausdrücklich hervorzuheben, da über den Begriff der bedingten Convergenz einer Doppelreihe noch keineswegs durchweg vollständige Klarheit herrscht.

---

[1]) a. a. O. p. 160. 161.

Digitized by Google

So kommt z. B. C. Jordan in der neuen Auflage seines Cours d'analyse[1]) auf Grund einer, wie mir scheint, durchaus unzulänglichen Definition der Convergenz einer Doppelreihe zu dem paradoxen Ergebnisse, dass es überhaupt ausschliesslich **absolut** convergente Doppelreihen giebt,[2]) und er erblickt darin einen fundamentalen Unterschied zwischen den einfach- und den mehrfah-unendlichen Reihen.[3])

Auf der anderen Seite hat man den Begriff der bedingten Convergenz und damit überhaupt denjenigen der Convergenz einer Doppelreihe auch häufig zu weit gefasst, indem man eine Doppelreihe schon als (bedingt) convergent bezeichnete, wenn $S_\mu^{(\nu)}$ bei irgend einem speciellen Grenzübergange (etwa für $\mu = \varphi(\varrho)$, $\nu = \psi(\varrho)$ und $\lim\limits_{\varrho=\infty} \varphi(\varrho) = \infty$, $\lim\limits_{\varrho=\infty} \psi(\varrho) = \infty$) einen bestimmten Grenzwerth besitzt.[4]) Diese an und für sich offenbar zulässige Erweiterung des Convergenz-Begriffes einer Doppelreihe erweist sich schon aus dem Grunde als wenig empfehlenswerth, weil bei derselben die Möglichkeit, eine Doppelreihe durch ein einfaches Symbol von der Form $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ zu bezeichnen, ausgeschlossen erscheint und somit eine der wesentlichsten Analogien zwischen einer Doppelreihe und einer einfachen Reihe verloren gehen würde. Im übrigen handelt es sich in dem angedeuteten Falle lediglich um die Existenz eines **ein**fachen Grenzwerthes von der Form:

---

[1]) Paris 1893—96.

[2]) a. a. O. T. I. p. 302.

[3]) T. II. p. 88. Ueberträgt man die viel zu enge Jordan'sche Definition der Convergenz einer Doppelreihe mutatis mutandis auf einfache Reihen, so gelangt man vielmehr naturgemäss zu dem Schlusse, dass auch eine einfache Reihe nicht anders als absolut convergiren kann!

[4]) vgl. z. B. Eisenstein, Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. — Crelle's Journal, Bd. 35, p. 172 ff.

Digitized by Google

$$\lim_{\varrho=\infty} \sum_0^{\psi(\varrho)}{}_\nu \sum_0^{\varphi(\varrho)}{}_\mu a_\mu^{(\nu)},$$

also schliesslich gar nicht um die Convergenz einer Doppelreihe, sondern nur um diejenige einer aus den Termen $a_\mu^{(\nu)}$ in bestimmter Ordnung zu bildenden einfach-unendlichen Reihe.

§ 5. Convergenz- und Divergenz-Kriterien für Doppelreihen mit positiven Gliedern.

1. Nach dem bisher gesagten erfordert die Feststellung der unbedingten Convergenz einer beliebigen Doppelreihe lediglich die Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz einer aus lauter Termen $a_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ gebildeten Doppelreihe. Hierzu könnte man die letztere nach Diagonalen ordnen und auf diese Weise die fragliche Untersuchung auf diejenige der einfach-unendlichen Reihe: $\sum_0^\infty{}_\nu (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ zurückführen (dabei würde es noch freistehen, entweder die Diagonal-Summen $(a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ oder die einzelnen $a_\mu^{(\nu)}$ als Glieder dieser Reihe aufzufassen).

In der Praxis gestaltet sich aber dieses Verfahren nicht nur verhältnissmässig umständlich, sondern es ist zumeist überhaupt nicht möglich, jener Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu (a_0^{(\nu)} + a_1^{(\nu-1)} + \ldots + a_\nu^{(0)})$ mit Hülfe der gewöhnlichen Convergenz- und Divergenz-Kriterien beizukommen. Hiernach erscheint es wünschenswerth, Kriterien zu besitzen, welche gestatten, unmittelbar aus der Beschaffenheit der Reihenglieder $a_\mu^{(\nu)}$ auf die Convergenz oder Divergenz der Doppelreihe zu schliessen.

Bezeichnet man mit $c_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ bezw. $d_\mu^{(\nu)} \geqq 0$ das allgemeine Glied einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe, so ist leicht zu ersehen, dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_{\mu,\nu} a_\mu^{(\nu)}$ (wo: $a_\mu^{(\nu)} \geqq 0$) allemal

Digitized by Google

$$(1)\begin{cases}\text{convergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G\cdot c_\mu^{(\nu)} \\ \text{divergirt, wenn: } a_\mu^{(\nu)} \geqq g\cdot d_\mu^{(\nu)}\end{cases} \text{für: } \begin{pmatrix}\mu \geqq m, \nu = 0,1,2,\ldots \\ \nu > n, \mu = 0,1,2,\ldots\end{pmatrix}$$

wo m, n irgend zwei feste ganze Zahlen (incl. Null), g und G zwei beliebige positive Zahlen bedeuten. Denn, setzt man:

$$(2) \qquad \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu a_\mu^{(\nu)} = s_m^{(n)}.$$

so ist im ersten Falle:

$$(3a) \qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \leqq G\cdot\left\{\sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu c_\mu^{(\nu)}\right\}.$$

im zweiten:

$$(3b) \qquad s_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} - s_m^{(n)} \geqq g\cdot\left\{\sum_0^{n+\sigma}{}_\nu \sum_0^{m+\varrho}{}_\mu c_\mu^{(\nu)} - \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu c_\mu^{(\nu)}\right\}.$$

woraus die Richtigkeit der obigen Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

2. Es kommt somit lediglich darauf an, die nöthigen $c_\mu^{(\nu)}$ bezw. $d_\mu^{(\nu)}$ zur Verfügung zu haben. Um sich solche in beliebiger Anzahl zu verschaffen, könnte man davon ausgehen, dass sich das allgemeine Glied $u_\mu^{(\nu)}$ jeder beliebigen Doppelreihe in die Form setzen lässt (§ 2, Gl. (8)):

$$(4) \qquad u_\mu^{(\nu)} = (S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)}) - (S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)})$$

und dass hierbei die $u_\mu^{(\nu)}$ durchweg positiv ausfallen, wenn:

1) $S_\mu^{(\nu)}$ mit μ, ν monoton zunimmt:

2) $S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)} > S_{\mu-1}^{(\nu)} - S_{\mu-1}^{(\nu-1)}$,

(d. h. es müssen auch die Differenzen $(S_\mu^{(\nu)} - S_\mu^{(\nu-1)})$ bei wachsenden Werthen von μ monoton zunehmen).

Wird im übrigen $S_\mu^{(\nu)}$ so angenommen, dass $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)}$ einen bestimmten Werth hat, so ist dann $u_\mu^{(\nu)}$ das allgemeine Glied einer convergenten Doppelreihe, dagegen dasjenige einer divergenten, wenn $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} S_\mu^{(\nu)} = \infty$.

Digitized by Google

Da es sich indessen hier nicht darum handelt, die allgemeinsten Formen der aus Ungl. (1) resultirenden Convergenz- und Divergenz-Kriterien aufzustellen, sondern lediglich darum, brauchbare Kriterien von einiger Allgemeinheit zu gewinnen, so erscheint es einfacher, mit Benützung bekannter Sätze aus der Convergenz-Theorie der einfach-unendlichen Reihen einen der folgenden beiden Wege einzuschlagen: nämlich entweder aus einfach-unendlichen Reihen von bekannter Convergenz bezw. Divergenz durch Multiplication Doppelreihen mit gleichfalls unmittelbar zu erkennender Convergenz bezw. Divergenz zu bilden; oder jene einfach-unendlichen Reihen durch passende Methoden in Doppelreihen umzuformen.

3. Die erste der eben angedeuteten Methoden beruht auf der Identität:

$$(5) \qquad \sum_0^m{}_\mu\, b_\mu \cdot \sum_0^n{}_\nu\, b'_\nu = \sum_0^m{}_\nu \sum_0^n{}_\mu\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^{\mu,\nu}{}_{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu$$

Versteht man hier unter b_μ, b'_ν irgend welche positive Zahlen, so hat man also:

$$(6) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} \sum_0^{m,n}{}_{\mu,\nu}\, b_\mu \cdot b'_\nu = \sum_0^\infty{}_\mu\, b_\mu \cdot \sum_0^\infty{}_\nu\, b'_\nu,$$

und daraus folgt, dass die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $(b_\mu \cdot b'_\nu)$ convergirt, wenn die Reihen $\sum_0^\infty{}_\mu\, b_\mu$, $\sum_0^\infty{}_\nu\, b'_\nu$ beide convergiren; dass dieselbe dagegen divergirt, wenn mindestens eine jener beiden Reihen divergirt.

Bezeichnet man also mit c_ν das allgemeine Glied einer convergenten, mit d_ν dasjenige einer divergenten einfach-unendlichen Reihe (mit positiven Gliedern), so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Ungl. (1), dass eine beliebig vorgelegte Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Gliedern) allemal

Digitized by Google

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{convergirt,} & \text{wenn: } a_\mu^{(\nu)} \leqq G \cdot c_\mu \cdot c_\nu \\ \text{divergirt,} & \text{wenn: } a_\mu^{\nu} \geqq g \cdot c_\mu \cdot d_\nu \text{ oder: } \geqq g \cdot d_\mu \cdot c_\nu \end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \left(\begin{array}{l} \mu \geqq m,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right)$$

Oder anders geschrieben, wenn man $c_\mu = C_\mu^{-1}$, $d_\nu = D_\nu^{-1}$ setzt: Die Doppelreihe der $a_\mu^{(\nu)}$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{convergirt,} & \text{wenn: } C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G \\ \text{divergirt,} & \text{wenn: } C_\mu \cdot D_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \text{ oder: } D_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \end{array}\right\}$$

$$\text{für: } \left(\begin{array}{l} \mu \geqq m,\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \geqq n,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \end{array}\right)$$

Um zunächst das vorstehende Convergenz-Kriterium noch auf eine andere Form zu bringen, zerlegen wir die betreffende Bedingung in die folgenden drei Theil-Bedingungen:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{ll} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\nu} & \text{für: } \mu \geqq m,\ \nu < n, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{G}{C_\mu} & \quad\text{,}\quad \mu < m,\ \nu \geqq n, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq G & \quad\text{,}\quad \mu \geqq m,\ \nu \geqq n. \end{array}\right.$$

Da man hier offenbar m, n auch durch jedes beliebige Zahlenpaar $m' > m$, $n' > n$ ersetzen darf, so ziehen diese drei Ungleichungen stets die folgenden nach sich:

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim\limits_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty^{1)} & \text{für jedes endliche } \nu, \\ \text{(b)} \lim\limits_{\nu=\infty} C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty & \text{für jedes endliche } \mu, \\ \text{(c)} \lim\limits_{\mu=\infty,\nu=\infty} C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. & \end{array}\right.$$

---

[1]) Abgekürzte Schreibweise für:

$$\limsup_{\mu=\infty} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq A,$$

wo A eine endliche Zahl bedeutet.

Digitized by Google

Umgekehrt würde aus diesen letzteren Ungleichungen zunächst folgen, dass:

$$(11)\quad \begin{cases} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g^{(\nu)} \text{ etwa für: } \mu \geqq m_1, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g_\mu \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \nu \geqq n_1, \ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \mu \geqq m_2, \ \nu \geqq n_2, \end{cases}$$

wo $g^{(\nu)}$, g_μ, g bestimmte positive Zahlen bedeuten. Bezeichnet man nun mit m bezw. n die grössere der beiden Zahlen m_1 und m_2, bezw. n_1 und n_2, so folgt a fortiori:

$$(12)\quad \begin{cases} C_\mu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g^{(\nu)} \cdot C_\nu}{C_\nu} \quad \text{für: } \mu \geqq m, \ \nu < n, \\ C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq \dfrac{g_\mu \cdot C_\mu}{C_\mu} \quad \text{„} \quad \mu < m, \ \nu \geqq n, \\ C_\mu \cdot C_\nu \cdot a_\mu^{(\nu)} \leqq g \quad \text{„} \quad \mu \geqq m, \ \nu \geqq n, \end{cases}$$

und diese Ungleichungen gehen unmittelbar in die Bedingungen (9) über, wenn man mit G die grösste der Zahlen $g^{(\nu)} \cdot C_\nu$ $(\nu = 0, 1, \ldots n-1)$, $g_\mu \cdot C_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots m-1)$ und g bezeichnet.

Hienach erweisen sich auch die Bedingungen (10) als hinreichend für die Convergenz der Doppelreihe $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$. Dieselbe ist also beispielsweise convergent, wenn bei irgend einem positiven Werthe von ϱ:

$$(13)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \mu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \text{ für jedes endliche } \nu, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} \nu^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty \text{ für jedes endliche } \mu, \\ \lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} (\mu\nu)^{1+\varrho} \cdot a_\mu^{(\nu)} < \infty. \end{cases}$$

Beachtet man, dass die Bedingungen (10a) und (10b) offenbar nichts anderes enthalten als die Convergenz jeder einzelnen Zeile und Colonne, und dass andererseits die Convergenz jeder Zeile und Colonne eine nothwendige Bedingung für die Convergenz einer Doppelreihe mit nicht-

Digitized by Google

negativen Gliedern bildet, so kann man dem Kriterium (10) auch die folgende Form geben:

Erfüllt die Doppelreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, a_{\mu}^{(\nu)}$ (mit nicht-negativen Termen) die **nothwendige** Convergenz-Bedingung, dass jede einzelne Zeile und Colonne convergirt, so ist für deren Convergenz **hinreichend,** wenn:

$$\lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} C_{\mu}\cdot C_{\nu}\cdot a_{\mu}^{(\nu)} < \infty. \tag{14}$$

4. Während die auf diesem Wege gewonnenen Convergenz-Kriterien durch passende Wahl der C_{μ} sich beliebig verschärfen lassen und die analoge Leistungsfähigkeit besitzen, wie die entsprechenden Kriterien für einfach-unendliche Reihen, so erweisen sich die aus Ungl. (7) bezw. (8) resultirenden Divergenz-Kriterien bei näherer Betrachtung als völlig unzulänglich. Die zum Vergleiche herangezogenen Doppelreihen:

$$(15)\quad \begin{cases} c_0 d_0 + c_1 d_0 + \ldots + c_{\mu} d_0 + \ldots & c_0 d_0 + c_0 d_1 + \ldots + c_0 d_{\mu} + \ldots \\ + c_0 d_1 + c_1 d_1 + \ldots + c_{\mu} d_1 + \ldots & + c_1 d_0 + c_1 d_1 + \ldots + c_1 d_{\mu} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + c_0 d_{\nu} + c_1 d_{\nu} + \ldots + c_{\mu} d_{\nu} + \ldots & + c_{\nu} d_0 + c_{\nu} d_1 + \ldots + c_{\nu} d_{\mu} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

besitzen nämlich offenbar die Eigenschaft, dass alle Colonnen **oder** alle Zeilen divergente Reihen bilden.[1]) Nun ist es aber für die Divergenz einer Doppelreihe mit nicht-negativen Termen schon vollständig hinreichend, wenn auch nur eine einzige Zeile oder Colonne divergirt, wenn also:

$$(16)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} D_{\mu}\cdot a_{\mu}^{(\nu)} > 0 \text{ für irgend einen bestimmten Werth } \nu \\ \text{oder:} \\ \lim\limits_{\nu=\infty} D_{\nu}\cdot a_{\mu}^{(\nu)} > 0 \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mu. \end{cases}$$

[1]) Bei einer Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $d_{\mu}\cdot d_{\nu}$ würden sogar alle Zeilen **und** Colonnen divergiren.

Digitized by Google

Diese Art von Divergenz ist aber im Grunde genommen gar keine Eigenschaft, welche für eine Doppelreihe als solche charakteristisch ist, und zu ihrer etwaigen Feststellung genügen die zur Untersuchung einfach-unendlichen Reihen dienlichen Hülfsmittel.

Der einer Doppelreihe specifisch eigenthümliche Fall von Divergenz tritt vielmehr dann ein, wenn die Doppelreihe divergirt, während alle möglichen Zeilen und Colonnen convergente Reihen bilden. Um sich zunächst von der wirklichen Existenz solcher divergenten Doppelreihen zu überzeugen, betrachte man z. B. die folgende:

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{llll} (d_0-d_1) & +(d_1-d_2) & +\ldots+(d_\mu-d_{\mu+1}) & +\ldots \\ +(d_1-d_2) & +(d_2-d_3) & +\ldots+(d_{\mu+1}-d_{\mu+2}) & +\ldots \\ + \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ +(d_\nu-d_{\nu+1}) & +(d_{\nu+1}-d_{\nu+2}) & +\ldots+(d_{\mu+\nu}-d_{\mu+\nu+1}) & +\ldots \\ + \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}\right.$$

wo $d_\nu \geqq d_{\nu+1}$, $\lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu = 0$. Hier besitzen die einzelnen Zeilen und Colonnen der Reihe nach die Summen $d_0, d_1, d_2, \ldots$, während die Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu\, d_\nu$ divergirt.

Alle divergenten Doppelreihen dieser Art werden offenbar durch kein Kriterium von der Form (16) getroffen. Um hier möglicherweise-wirksame Divergenz-Kriterien zu erhalten, ist es vor allem erforderlich, Vergleichs-Doppelreihen herzustellen, welche selbst den fraglichen Divergenz-Charakter besitzen.

5. Solche Vergleichs-Doppelreihen mit übrigens beliebig-langsamer Divergenz könnte man sich offenbar bei passender Wahl der d_ν auf Grund des Schema's (17) verschaffen. Für den fraglichen Zweck erscheint es indessen noch einfacher, den folgenden Weg vorzuschlagen.

Digitized by Google

Es bedeute (b_ν) eine beliebige positive Zahlenfolge, so liefert das Schema:

$$(18)\left\{\begin{array}{l}
\quad \frac{b_0}{1} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \ldots + \frac{b_\mu}{\mu+1} + \ldots \\
+ \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \ldots + \frac{b_{\mu+1}}{\mu+2} + \ldots \\
+ \frac{b_2}{3} + \frac{b_3}{4} + \frac{b_4}{5} + \ldots + \frac{b_{\mu+2}}{\mu+3} + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \frac{b_\nu}{\nu+1} + \frac{b_{\nu+1}}{\nu+2} + \frac{b_{\nu+2}}{\nu+3} + \ldots + \frac{b_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1} + \ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

als Diagonal-Summen der Reihe nach die Zahlen: $b_0, b_1, b_2, \ldots$, so dass also die durch das Schema (18) definirte Doppelreihe gleichzeitig mit der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu\, b_\nu$ convergirt bezw. divergirt. Anders ausgesprochen:

Von den beiden Doppelreihen: $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{c_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$, $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu+1}$ convergirt die erste gegen die Summe: $\sum_0^\infty{}_\nu\, c_\nu$, während die zweite divergirt.

Dabei wird offenbar in dem zweiten Falle jede einzelne Zeile und Colonne noch convergiren, wenn nur die d_ν so angenommen werden, dass $\frac{d_\nu}{\nu+1}$ convergirt.

(Beispiel. Man hat für $\varrho > 0$:

$$\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^{2+\varrho}} = \sum_0^\infty{}_\nu \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varrho}} \text{ (convergent).}$$

während $\sum_0^\infty{}_{\mu,\nu} \frac{1}{(\mu+\nu+1)^2}$ divergirt).

Digitized by Google

6. Das eben gewonnene Resultat könnte selbstverständlich auch zur Bildung neuer Formen von Convergenz-Kriterien dienen. Da dieselben aber, wie leicht erkannt wird, gegenüber den in Art. 3 abgeleiteten keine besondere Vortheile bieten, so mag hier davon abgesehen werden.

Bezüglich der Divergenz bemerke man zunächst, dass offenbar die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede $\frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu}$ a fortiori divergirt und dass dieselbe auch nach Weglassung der ersten n Zeilen und m Colonnen divergent bleibt. Denn summirt man das Schema:

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{d_{m+n}}{m+n} + \frac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \ldots + \frac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \ldots \\ + \frac{d_{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{d_{m+n+2}}{m+n+2} + \ldots + \frac{d_{m+n+\nu+1}}{m+n+\nu+1} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{d_{m+n+\nu}}{m+n+\nu} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

nach Diagonalen, so resultirt die Reihe:

$$(20)\quad \frac{1}{m+n}\cdot d_{m+n} + \frac{2}{m+n+1}\cdot d_{m+n+1} + \ldots + \frac{\nu+1}{m+n+\nu}\cdot d_{m+n+\nu} + \ldots,$$

welche offenbar divergirt, da $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{\nu+1}{m+n+\nu} = 1$.

Hieraus folgt aber, dass die Doppelreihe $\sum\limits_0^\infty{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$ sicher divergirt, wenn:

$$(21)\qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq g\cdot\frac{d_{\mu+\nu}}{\mu+\nu} \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n,$$

oder, anders geschrieben:

$$(22)\qquad (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq g \text{ für: } \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

Digitized by Google

(wo m, n zwei beliebige positive Zahlen bedeuten). Und diese Bedingung ist sicher erfüllt, wenn:

$$(23) \qquad \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} (\mu+\nu)\cdot D_{\mu+\nu}\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0.$$

Man hat also z. B. Divergenz, wenn

$$(24) \quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \\ \text{oder:} \quad \lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} (\mu+\nu)^2\cdot \lg(\mu+\nu)\cdot a_\mu^{(\nu)} > 0 \quad \text{u. s. f.} \end{cases}$$

7. Als Beispiel für die Anwendung der gewonnenen Regeln wollen wir die Doppelreihe mit dem allgemeinen Gliede:

$$(25) \quad a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)^\sigma} \quad \begin{pmatrix} \mu=0,1,2,\ldots, \\ \nu=0,1,2,\ldots, \end{pmatrix} a_0^{(0)}=0\Big)$$

untersuchen, wo $(a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2)$ eine sog. positive quadratische Form mit negativer Determinante sein soll, d. h. wo:

(26) $a>0$, $c>0$, $b^2-ac=-A<0$ (b beliebig, eventuell auch $=0$).

Da sodann:

$$(27) \quad \begin{aligned} a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 &= \frac{1}{a}\left\{(a^2\cdot\mu^2+2ab\cdot\mu\nu+b^2\cdot\nu^2)+(ac-b^2)\nu^2\right\} \\ &= \frac{1}{a}\left\{(a\mu+b\nu)^2+A\cdot\nu^2\right\}, \end{aligned}$$

so fällt dieser Ausdruck nach Ausschluss des einen Werthepaares ($\mu=0$, $\nu=0$) stets wesentlich positiv aus, sodass die betreffende Doppelreihe aus lauter wohl definirten positiven Termen besteht.

Bedeutet nun A eine positive Zahl, die von keiner der drei Zahlen a, $|b|$, c überstiegen wird, so ist:

$$(28) \qquad a\mu^2+2b\mu\nu+c\nu^2 \leqq A(\mu+\nu)^2$$

und daher:

$$(29) \qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{(\mu+\nu)^{2\sigma}}$$

und:

Digitized by Google

$$(30) \qquad (\mu+\nu)^2 \cdot a_\mu^{(\nu)} \geqq \frac{1}{A} \cdot (\mu+\nu)^{2(1-\sigma)},$$

woraus sofort die Divergenz der fraglichen Doppelreihe für $\sigma \leqq 1$ hervorgeht (s. Ungl. (24)).

Andererseits hat man neben Gl. (27) die folgende analog gebildete:

$$(31) \qquad a\mu^2 + 2b\nu\mu + c\nu^2 = \frac{1}{c}\left\{(b\mu + c\nu)^2 + \Delta \cdot \mu^2\right\},$$

also:

$$(32) \qquad a\mu^2 + 2b\mu\nu + c\nu^2 \begin{cases} \geqq \dfrac{\Delta}{a} \cdot \nu^2 \\ \geqq \dfrac{\Delta}{c} \cdot \mu^2 \end{cases}$$

und daher:

$$(33) \qquad a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} \leqq \left(\dfrac{a}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \dfrac{1}{\nu^{2\sigma}} \text{ für jedes } \mu \text{ und } \nu \geqq 1, \\ \leqq \left(\dfrac{c}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \dfrac{1}{\mu^{2\sigma}} \text{ für jedes } \nu \text{ und } \mu \geqq 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass jede Zeile und jede Colonne der betrachteten Doppelreihe schon convergirt, wenn nur $\sigma > \frac{1}{2}$.

Schliesst man sodann für den Augenblick die Werthe $\mu = 0$, $\nu = 0$ von der Betrachtung aus, so folgt durch Multiplication der beiden Ungleichungen (33):

$$(34) \qquad a_\mu^{(\nu)} \leqq \left(\frac{\sqrt{ac}}{\Delta}\right)^\sigma \cdot \frac{1}{(\mu\nu)^\sigma} \quad (\mu \geqq 1,\ \nu \geqq 1),$$

und hieraus ergiebt sich nach Ungl. (7) $\left(\text{für: } c_\nu = \frac{1}{\nu^\sigma}\right)$ die Convergenz der Doppelreihe $\sum_{1}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, a_\mu^{(\nu)}$, sobald $\sigma > 1$ ist. Fügt man zu derselben noch die (schon für $\sigma > \frac{1}{2}$) convergente Zeile und Colonne: $\sum_{0}^{\infty}{}_\mu\, a_\mu^{(0)}$, $\sum_{1}^{\infty}{}_\nu\, a_0^{(\nu)}$, so erkennt man schliess-

Digitized by Google

lich, dass die vorgelegte Doppelreihe $\sum_{0}^{\infty}{}_{\mu,\nu}\, a_{\mu}^{(\nu)}$ gleichfalls für $\sigma > 1$ convergirt.

8. Statt die Reihen-Glieder $a_{\mu}^{(\nu)}$ direkt mit denjenigen einer bereits als convergent bezw. divergent erkannten Doppelreihe $\sum c_{\mu}^{(\nu)}$ bezw. $\sum d_{\mu}^{(\nu)}$ zu vergleichen, kann man auch, analog wie bei der Kriterien-Bildung für einfach-unendliche Reihen, die Quotienten $\frac{a_{\mu}^{(\nu)}}{a_{\mu+1}^{(\nu)}}$, $\frac{a_{\mu}^{(\nu)}}{a_{\mu}^{(\nu+1)}}$ mit den entsprechenden Quotienten der $c_{\mu}^{(\nu)}$ bezw. $d_{\mu}^{(\nu)}$ vergleichen und auf diese Weise auch Convergenz- und Divergenz-Kriterien zweiter Art herstellen. Dieselben erscheinen jedoch von untergeordneter Wichtigkeit, weshalb hier nicht näher darauf eingegangen werden soll.[1])

---

[1]) Das einfachste derselben, welches dem Cauchy'schen Fundamental-Kriterium entspricht, findet sich in der oben citirten, soeben publicirten Arbeit von Herrn Biermann: a. a. O. p. 123.

In meinem Aufsatze „Ueber die sogenannte Grenze und die Grenzgebiete zwischen Convergenz und Divergenz", welcher im vorigen Bande dieser Sitzungsberichte abgedruckt ist, findet sich die Angabe (a. a. O. p. 605, Fussnote), dass Du Bois Reymond die in Aussicht gestellte genauere Discussion seiner Function $\tau(a)$ meines Wissens nicht geliefert habe. Da ich inzwischen bemerkt habe, dass dies thatsächlich doch der Fall gewesen ist (in dem Aufsatze: Ueber die Paradoxen des Infinitärcalcüls, Math. Ann. XXI p. 158), so werde ich demnächst auf den fraglichen Gegenstand nochmals zurückkommen.

Digitized by Google

Sitzung vom 6. März 1897.

1. Herr Karl v. Orff macht eine Mittheilung: „Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendelbestimmungen."

2. Herr Eugen v. Lommel legt zwei Arbeiten des Herrn Privatdozenten an der hiesigen Universität, Dr. Arthur Korn, vor:

a) über Molekular-Funktionen;

b) ein Modell zur hydrodynamischen Theorie der Gravitation.

3. Herr Richard Hertwig bespricht und überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Franz Werner, Assistent am zoologischen Museum in Wien: „Ueber einige neue oder seltene Reptilien und Frösche der zoologischen Sammlung des Staates in München."

4. Herr Ferdinand Lindemann verliest einen an ihn gelangten Brief des auswärtigen Mitgliedes, des Mathematikers Charles Hermite in Paris, worin er seinen Dank für die Uebersendung der gesammelten Werke Otto Hesse's ausspricht und zugleich die Verdienste desselben um die Wissenschaft in höchst anerkennender Weise schildert.

Digitized by Google

Bemerkungen über die Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen und Bericht über die in Bayern begonnenen Pendelbestimmungen.

Von **Karl von Orff.**

(Eingelaufen 6. März.)

Seit den durch von Sterneck ausgeführten zahlreichen Pendelmessungen, welche für einen grossen Theil der österreichischen Monarchie ein engmaschiges Netz von Schwerebestimmungen ergaben, und seit der Publication der für die Verwerthung der Pendelbeobachtungen so wichtigen Schrift Helmert's: „Die Schwerkraft im Hochgebirge", hat sich das Interesse an diesen Arbeiten wesentlich gesteigert und namentlich bei den Vertretern der geologischen Wissenschaft den lebhaften Wunsch nach umfassender Ausführung von Schwerebestimmungen hervorgerufen. Derartige absolute Messungen bieten bekanntlich nicht unbedeutende Schwierigkeiten und zeigen die bisher auf diesem Wege erlangten Resultate trotz aller auf dieselben verwendeten Zeit und Mühe immer noch ganz erhebliche Divergenzen[1]); man kann indessen das zunächst vorliegende Ziel, für eine grosse Anzahl von Punkten der Erdoberfläche Schwerebestimmungen zu gewinnen, auch durch Ausführung relativer Messungen erreichen, wobei es sich

[1]) Siehe G. R. Putnam: „Results of a transcontinental series of Gravity measurements" im XIII. Bande der Bulletins der Philos. Society of Washington.

Digitized by Google

blos darum handelt, das Verhältniss der Schwerkraft verschiedener Orte zu der Schwere an einer bestimmten Centralstation zu ermitteln. Dieses Verfahren wurde schon zu Anfang unseres Jahrhunderts von den englischen Beobachtern Hall, Foster, Sabine u. A. eingeschlagen, schien aber, als man sich in der zweiten Hälfte des Jahrhunderts fast ausschliesslich den absoluten Messungen zugewendet hatte, in Vergessenheit gerathen zu sein. Es ist das Verdienst von Sterneck's, welcher einen zu relativen Messungen besonders geeigneten, einfachen und leicht transportablen Apparat construirt hatte, dass relative Messungen im Laufe des letzten Decenniums in ausgedehnterem Maasse zur Ausführung gelangten.

Auch die K. Bayerische Commission für die Internationale Erdmessung hat, veranlasst durch die von Seite der deutschen Akademien und der Wiener Akademie ausgesprochenen Wünsche, der Frage der Schweremessungen ihre besondere Aufmerksamkeit zugewendet. Im Mai des vorigen Jahres wurde von der Firma E. Schneider in Wien ein Pendelapparat Sterneck'scher Construction bezogen, dessen Constanten unter gütiger Leitung des Herrn Oberst von Sterneck von dem vormaligen Observator unserer bayer. Commission, Herrn Dr. Oertel und dem k. k. Marinelieutenant Herrn von Filz gelegentlich der Uebernahme des Apparates in dem Pendelobservatorium des k. und k. militärgeographischen Institutes zu Wien bestimmt wurden. Nachdem dann der nunmehrige Observator der Commission, Herr Dr. Anding, sich in dem Beobachtungsverfahren gehörig eingeübt und im Laufe der Monate August und September mehrere Serien von Pendelmessungen auf der k. Sternwarte Bogenhausen ausgeführt hatte und nachdem inzwischen auch die von Herrn Ingenieur Riefler gefertigte Sekundenpendeluhr zur Ablieferung gekommen war, konnten noch die beiden auswärtigen Stationen Dachau und Pfaffenhofen a. d. Ilm abgefertigt werden.

Der im Nachfolgenden mitgetheilte Bericht des Herrn Dr. Anding gibt die Resultate der von ihm ausgeführten Beobachtungen, und erläutert den zur Erlangung derselben eingeschlagenen Rechnungsgang. —

Digitized by Google

Vorläufiger Bericht über die Resultate der in Bayern begonnenen Pendelmessungen

1.

Die Pendelbeobachtungen der k. Bayerischen Commission für die internationale Erdmessung werden nach der Sterneck'schen Methode ausgeführt, an deren Princip nur kurz erinnert werden möge.

Eine Secundenuhr dient dazu, bei jeder Pendelschwingung auf einen kurzen Moment einen Strom zu unterbrechen, in welchen eine Vorrichtung, der „Coincidenzapparat", eingeschaltet ist, welcher diese Unterbrechungen dem Auge sichtbar macht. Es wird nämlich vermöge eines Elektromagneten entsprechend den Unterbrechungen ein Anker in Bewegung versetzt derart, dass bei jeder Bewegung durch momentanes Ueberdecken zwei länglicher, einseitig beleuchteter Oeffnungen dem anderseitig beobachtenden Auge ein Lichtblitz erscheint.

Diese Lichtblitze werden jedoch nicht direct beobachtet, sondern durch einen Spiegel reflectirt, welcher mit dem Pendel, dessen Schwingungsdauer gemessen werden soll, fest verbunden ist und an seinen Bewegungen Theil nimmt; und diese reflectirten Blitze sind es, welche durch ein Fernrohr mit Horizontalfaden beobachtet werden. Da bei jedem Secundenschlag der Beobachtungsuhr, also bei jedem Lichtblitz, das zu beobachtende Pendel, welches nicht genau halbe Secunden schwingt, in einer etwas anderen Phase steht, so werden die Lichtblitze wegen der veränderten Stellung des Spiegels in etwas veränderter Richtung reflectirt; sie werden also im Gesichtsfeld des Fernrohrs regelmässig fortrücken. Zwischen beiden Apparaten, der Uhr und dem Pendel findet nun eine Coincidenz statt, so oft beispielsweise der Blitz den Mittelfaden des Fernrohrs durchschreitet, und dieser Moment kann ebenso genau bestimmt werden, wie ein Fadenantritt beim Passageninstrument. — Die Schwingungsdauer des Pendels ist also auf die anderweitig bekannte Schwingungsdauer der Uhr zurückgeführt.

Digitized by Google

2.

Die Pendel, die Stative, sowie der Coincidenzapparat sind von der Firma Schneider in Wien hergestellt. Die Pendel tragen die Nummern

89 90 91

und besitzen für das Münchener Beobachtungslocal die Schwingungsdauer in Sternzeit

0ˢ.5078481 0ˢ.5077747 0ˢ.5077195

so dass man in Verbindung mit einer Sternzeituhr nach etwas über 30 Secunden je eine Coincidenz zu erwarten hat.

Unter den zwei beigegebenen Stativen, einem Wand- und einem Pfeilerstativ, ist bis jetzt nur das erstere verwendet worden. Die Festigkeit der Mauer wurde durch das Wippverfahren, die Festigkeit des Stativs durch regelmässiges Anziehen geprüft, wodurch sich stets ergab, dass die Schwingungsdauer des Pendels durch das Mitschwingen der Träger nur unmerklich beeinflusst wird. (10maliges Wippen mit je 6 kg Kraft ergab stets nur einen Ausschlag von 0ᵖ.05 = 0″.20 = 12″ d. h. pro 1 kg = 0″.2.)

Als Beobachtungsuhr diente bis zum 22. September die Hauptuhr Riefler I der Sternwarte. Dieselbe war, zunächst für die Zwecke der Meridianbeobachtungen, von Herrn Ingenieur Riefler mit einem Contact versehen worden, derart, dass die Axe des Steigrades noch ein weiteres Rad trägt, dessen Zähne bei jeder Bewegung den einen Arm eines Hebels einen kurzen Moment heben. Der Strom, welcher durch die Drehungsaxe des Hebels und den zweiten Hebelarm, nicht aber durch das Räderwerk der Uhr geht, wird also bei jeder Bewegung des Steigrades am Ende des zweiten Hebelarmes auf kurze Zeit unterbrochen, indem der Hebel von einem Stift abgehoben wird, durch dessen höhere oder tiefere Stellung man die Dauer der Unterbrechung reguliren kann. Der Contact steht also mit dem Pendel in gar keiner, mit dem Steigrad nur in mechanischer Berührung; da sich aber das Steigrad nur in dem-

Digitized by Google

jenigen Moment bewegt, wo das Pendel durch die Mittellage schwingt, mithin der negative Impuls den kleinsten Einfluss auf die Schwingungsdauer hat, so übt der Contact auch keinen mechanischen Einfluss.

Nach dem 22. September wurde eine andere Uhr desselben Systems, Riefler 25, verwendet, welche von Herrn Ingenieur Riefler eigens für die auswärtigen Beobachtungen construirt worden ist. Es sind daher Vorrichtungen angebracht worden, die Pendelfeder wie die Aufhängung derselben für die Reise festzuklemmen. Ferner ist die Lücke, welche an Stelle des sechzigsten Zahnes des Contactrades die vollen Minuten markirte, ausgefüllt geblieben, weil sie bei Pendelmessungen stören kann. Endlich sind in den Consolen des Werkträgers beiderseits Schrauben angebracht worden, welche mit ihren Stirnflächen auf den unteren Zapfen der Mauerplatte gestützt sind, und welche dazu dienen, die Uhr auf beiderseits gleichmässigen Abfall bequem einzustellen.

Diese Einstellung ist erforderlich, weil bei ungleichem Abfall die Wege, welche im Fernrohr von den Lichtblitzen im Lauf einer Secunde beschrieben werden, abwechselnd gross und klein, eventuell sogar vor- und rückläufig werden müssen. Man hat daher in den Lichtblitzen ein Hilfsmittel, Ungleichheiten im Abfall der Uhr auch dann noch deutlich zu erkennen, wenn das Ohr längst keinen Unterschied mehr wahrnimmt; umgekehrt muss, wenn es sich um Pendelmessungen handelt, um so mehr Sorgfalt auf diese Einstellung verwendet werden, weil bei Bewegung der Schrauben das Uhrwerk sammt Träger und Kasten mitbewegt werden und weil durch nachträgliche Ausgleichung der entstandenen Spannungen die Einstellung sich wieder verändern kann.

3.

Die Anordnung der Messungen ist dieselbe wie anderwärts. Es werden bei jedem Pendel die 1. bis 11., dann die 61. bis 71. Coincidenz beobachtet; vor Beginn und nach Schluss jeder Messung wird das Magazinthermometer und ein Controlthermo-

Digitized by Google

meter, ferner das Barometer mit der gehörigen Temperatur, sowie auch die Amplitude des schwingenden Pendels abgelesen. Das Mittel beider Ablesungen wird zur Reduction verwendet.

Die einzelnen Pendel werden am Vormittag in der Reihenfolge Nr. 89, 90, 91, am Nachmittag in der Reihenfolge 91, 90, 89 erledigt.

Die Coincidenzdauer c wird nach der Formel

$$s = \frac{c}{2c - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4c - 2}$$

in Schwingungsdauer s verwandelt. Dies geschieht durch Benützung von Tafeln, welche für die 3 hiesigen Pendel das zweite Glied des obigen Ausdrucks mit dem Argument c nachweisen. Solche Tafeln brauchen nur einen geringen Umfang zu besitzen, da die Coincidenzdauer in Uhrsecunden an jedem Ort sogar vollständig die gleiche bleiben würde, wenn nicht die Beobachtungsuhr bei erneutem Aufstellen ohnedies kleine Veränderungen ihres Ganges erlitte. Wollte man dagegen eiu Chronometer als Beobachtungsuhr verwenden, so müsste man innerhalb Bayerns das Argument auf einen Spielraum von $^1/_2$ Secunde ausdehnen.

Die Schwingungsdauern werden dann auf die Temperatur 0^0 reducirt durch die Correction

$$-48.2 \cdot t^0,$$

auf den luftleeren Raum mit

$$-542 \text{ Luftdichte} = -542 \cdot \frac{b - 0.377 \cdot r \cdot E(t)}{760\ (1 + 0.00367 \cdot t)}$$

(b = Barometerstand, r = relative Feuchtigkeit, $E(t)$ = Maximalspannkraft bei der Temperatur t), endlich auf die Amplitude 0 mit

$$-\frac{1}{4} \sin^2 \frac{A}{2} \cdot \text{Schwingungsdauer.}$$

Jeder dieser Ausdrücke ist in Tafeln gebracht. Da jedoch die Tafel für den Einfluss der Luftdichte unbequem werden

Digitized by Google

würde, weil sie nach 2 Argumenten fortschreitet, so würde der Ausdruck in 3 Theilen tabulirt, wovon der erste nur von der Temperatur, der zweite nur vom Barometer abhängig ist, während der dritte allerdings beide Argumente enthält, jedoch wegen seiner Kleinheit nur in sehr weiten Intervallen tabulirt zu werden braucht.

Die Constanten 48.2 und 542 (in Einheiten der 7 Decimale der Schwingungsdauer) sind nach den in Wien unter Leitung des Herrn Obersten von Sterneck ausgeführten Beobachtungen ermittelt worden. Der Ausdehnungscoefficient der Luft 0.00367 ist nach Régnault und das specifische Gewicht des Wasserdampfes 0.623 (für $0.377 = 1 - 0.623$) ist nach Wüllner angesetzt; für r wurde der Mittelwerth 0.7 verwendet; endlich $E(t)$ ist den ausgeglichenen Régnault'schen Spannkrafttabellen entnommen werden.

Die Correction der Barometerablesung wegen Ausdehnung des Quecksilbers und des Glases wurde den etwaigen Tafelwerthen nicht einverleibt, sondern eigens tabulirt, damit eventuell auch Aneroide verwendet werden könnten, was vom 2. September ab auch thatsächlich geschah.

4.

Die Zeit wird an die auswärtigen Stationen auf telegraphischem Wege übertragen. Hierzu steht am Morgen wie am Abend je 20 Minuten lang die Hauptuhr (zeitweilig, für dienstliche Mittheilungen, auch der Telegraphenapparat) der Münchener Sternwarte in directer Verbindung mit dem Telegraphenapparat desjenigen Postamts, in dessen Nähe sich das Observatorium befindet. Man hat also den Vortheil, sich auf eine Uhr zu beziehen, deren Gang möglichst sicher bestimmt ist.

Die Uebertragung der Zeit von der Poststation (wo, soweit auf der Linie Ruhestrom zur Verwendung kommt, stets der erste Schlag des Rélais' aufgefasst wird) zur Beobachtungsuhr im Observatorium geschah mit Hilfe des nach mittlerer Zeit gehenden Chronometers Delolme 861 in der Weise, dass die Vergleichung im Observatorium morgens nach, abends vor

Digitized by Google

der anderen auf der Poststation stattfand. Wegen dieser Reihenfolge, dann aber auch, weil zwischen beiden Vergleichungen eine geraume Zeit vergeht (theilweise über 1 Stunde, da am Morgen meistens inzwischen das erste Pendel eingehängt wurde und da bei der Uhrvergleichung stets möglichst viele Coincidenzen genommen wurden) musste man den Gang der Uebertragungsuhr ziemlich genau bestimmen. Es stellte sich aber heraus, dass dieselbe bei Tag und bei Nacht verschiedenen Gang hat. Für jetzt wurde das Mittel aus beiden Gängen verwendet; nicht als ob demselben eine grössere Berechtigung deshalb beigelegt würde, weil die Uebertragung nahe der Grenzscheide zwischen Tag und Nacht stattfand, sondern weil der Fehler halbirt wird. Für die Zukunft jedoch sollen Morgens wie Abends im Observatorium doppelte Vergleichungen gemacht werden, nämlich vor und nach der telegraphischen Vergleichung. Dabei ist auch der noch wichtigere Zweck ins Auge gefasst, Unregelmässigkeiten zu constatiren, welche durch das Tragen des Chronometers entstehen. Eine solche ist bis jetzt, ohne dieses Hilfsmittel, nur einmal wahrgenommen worden.

Auf den äusseren Stationen wurde ferner täglich 3 mal, nämlich morgens, abends und zwischen beiden Pendelserien, die Beobachtungsuhr mit Hilfe des Delolme mit dem Sternzeitchronometer Bröcking 898 verglichen, um eventuell das letztere, wenn auch mit geringerem Gewicht, als Beobachtungsuhr zu substituieren. Die Rechnungen ergaben jedoch, wenn diese übrigens gut gehende Uhr eingeführt würde, keine nennenswerthe Verbesserung der Resultate. Ueberhaupt ist auf die Reduction der Uhrgänge viel Sorgfalt verwendet worden.

5.

Ohne auf Einzelheiten weiter einzugehen, theile ich nachstehend die Resultate mit und zwar gleich die Mittelwerthe aus Vor- und Nachmittagsbeobachtungen. Die zwei ersten Münchener Pendeltage sind von Herrn Dr. Oertel, alle folgenden von mir beobachtet. Unter München sind auch unge-

Digitized by Google

trennt die Anschlussbeobachtungen mit aufgeführt, welche zwischen und nach den auswärtigen Beobachtungen stattfanden. Mit Weglassung der drei ersten Decimalen 0ᵖ507 ergab sich für die Schwingungszeiten der Pendel

München.

Epoche	89	90	91	Abw. vom Mittel 89	90	91	Mittel der Pendel	Abw. vom Mittel
11. Juni	8501	7794	7205	+ 20	+ 47	+ 10	7833	+ 26
4. Juli	8491	7772	7231	+ 10	+ 25	+ 36	7831	+ 24
13. August	8473	7774	7201	— 8	+ 27	+ 6	7816	+ 9
21. August	8515	7741	7193	+ 34	— 6	— 2	7816	+ 9
2. Sept.	8507	7747	7188	+ 26	0	— 7	7814	+ 7
15. Sept.	8471	7737	7200	— 10	— 10	+ 5	7803	— 4
9.5 Okt.	8457	7725	7191	— 24	— 22	— 4	7791	— 16
12. Okt.	8473	7732	7187	— 8	— 15	— 8	7797	— 10
29. Okt.	8475	7744	7190	— 6	— 3	— 5	7803	— 4
30. Okt.	8443	7703	7165	— 38	— 44	— 30	7770	— 37
Mittel	8481	7747	7195				7807	

Dachau.

29. Sept.	8393	7675	7133	— 1	— 9	+ 5	7728	— 2
30. Sept.	8391	7661	7114	— 3	— 5	— 14	7722	— 8
2. Okt.	8394	7669	7129	0	+ 3	+ 1	7731	+ 1
4. Okt.	8399	7676	7138	+ 5	+ 10	+ 10	7738	+ 8
1.25 Okt.	8394	7666	7128				7730	

Pfaffenhofen.

16. Okt.	8285	7534	6982	+ 6	+ 7	— 3	7600	+ 3
17. Okt.	8297	7525	6999	+ 18	— 2	+ 14	7607	+ 10
19. Okt.	8291	7535	6989	+ 12	+ 8	+ 4	7605	+ 8
20. Okt.	8257	7529	6993	— 22	+ 2	+ 8	7593	— 4
21. Okt.	8270	7513	6963	— 9	— 14	— 22	7582	— 15
22. Okt.	8275	7529	6984	— 4	+ 2	— 1	7596	— 1
19.17 Okt.	8279	7527	6985				7597	

Digitized by Google

Die Zahlen der letzten Columne, als Beobachtungsfehler aufgefasst, ergaben die mittleren Fehler eines Tagesmittels:

in München	± 19
Dachau	± 7
Pfaffenhofen	± 9

also bei München einen auffallend grossen Werth. Dazu kommt aber, dass jene Zahlen geradehin einen ganz bestimmten Gang zeigen. Offenbar haben sich also die Schwingungszeiten der Pendel im Laufe der Beobachtungsperiode verkürzt.

Um dies weiter zu verfolgen, wurden jene Zahlen nach der Methode der kleinsten Quadrate durch die Formel

$$0.4 - 35.4 \cdot t$$

dargestellt, wobei t vom 5. September gezählt und in Einheiten von 100 Tagen gemessen ist; dann ergab sich

Beob.	Rechn.	Beob.-Rechn.
+ 26	+ 31	− 5
+ 24	+ 23	+ 1
+ 9	+ 9	0
+ 9	+ 6	+ 3
+ 7	+ 2	+ 5
− 4	− 3	− 1
− 16	− 12	− 4
− 10	− 13	+ 3
− 4	− 19	+ 15
− 37	− 19	− 18

und hiedurch ist in der That der mittlere Fehler auf ± 9 herabgesunken.

Diese Formel wurde verwendet, um diejenigen Schwingungsdauern zu bestimmen, welche die Pendel in München in dem Zeitpunkt gehabt hätten, als die auswärtigen Beobachtungen stattfanden. Hiernach erhält das Mittel der Münchener Beobachtungen

Digitized by Google

für Dachau (Epoche = 1.25 Oktbr.) die Correction — 9
für Pfaffenhofen (Epoche = 19.17 Oktbr.) die Correction — 15

Es ist nicht ohne Werth, zu sehen, wie sich gegenüber diesem Erfolg die Pendel einzeln verhalten. Hierzu wurden aus den entsprechenden Abweichungen S. 163 nach der Methode der kleinsten Quadrate die Formeln abgeleitet

89	90	91
$-0.4 - 30.8 \cdot t$	$-0.1 - 48.9 \cdot t$	$+0.1 - 26.6 \cdot t$;

durch welche die mittleren Fehler der Beobachtungen

von	23	29	17
auf	17	13	11

herabgemindert wurden. Jedenfalls zeigt sich, dass alle Pendel sich im gleichen Sinne verändert haben, allerdings in verschiedenem Grade; am wenigsten das Pendel 91, welches jedoch seinerzeit beim Transport von Wien nach München eine plötzliche Verkürzung erfahren hatte.

6.

Es bleibt noch übrig, die Resultate festzustellen.

Die Stelle, wo bei auswärtigen Beobachtungen der Pendelapparat angebracht war, wird in die Steuerpläne des k. Katasterbureaus eingetragen und ihre Coordinaten gegen den nächsten trigonometrischen Punkt mit dem Zirkel am Massstab abgemessen; hieraus erhält man zunächst die Soldner'schen Coordinaten des Punktes, aus welchen dann nach den Vorschriften der „Bayer. Landesvermessung" die geographischen Coordinaten berechnet werden. Eine genauere Zeichnung im Beobachtungsheft soll dienen, den Punkt wieder auffinden zu können.

Die Höhe des Observatoriums wird barometrisch bestimmt, nämlich durch Anschluss an den nächsten Höhenpunkt (des Präcisionsnivellements, des Eisenbahnnivellements oder der Höhenangaben des topographischen Bureaus). Hierbei kann man allerdings um etwa 1—2 Meter fehlen, was jedoch erst etwa 1 Einheit der 7 Decimale der Schwingungsdauer ausmacht.

Digitized by Google

So ergab sich

	Länge von Greenwich			Breite			Höhe
München:	11°	36′	32″	48°	8′	45″	525^m
Dachau:	11	26	0	48	15	37	501
Pfaffenhofen:	11	30	25	48	31	50	428

Die theoretische Zunahme der Schwere mit der geographischen Breite wurde nach Helmert angesetzt und die Abhängigkeit der Schwere von der Meereshöhe nach der Bouguer'schen Formel (Beobachter im Centrum der oberen Grundfläche eines Kreiscylinders) berechnet. Für die ganze Ausdehnung Bayerns ist es hinreichend genau, eine Differentialformel zu benützen, welche die Differenz von g gegen die Schwere in München zu

$$\Delta g^{mm} = + 51.93 \cdot \Delta \sin^2 \varphi - 0.0021754 \cdot \Delta h^m \text{ ergibt} \qquad a)$$

welche auf den Werthen beruht: $g = 9.808812^m$, für den Erdradius $= 6374000^m$, Dichte des Terrains unter der Station $= 2.15^m$, mittlere Erddichte $= 5.5$.

Andererseits berechnet sich für die drei Münchener Pendel aus den beobachteten Zunahmen der Schwingungsdauer in Einheiten der 7 Decimale Δt die Zunahme der beobachteten Schwere nach der Formel

$$\Delta g^{mm} = 0.0038634 \cdot \Delta t. \qquad b)$$

Von München bis Dachau, bezw. bis Pfaffenhofen findet sich nach a) die theoretische Zunahme der Schwere

$$0.15^{mm} \text{ bez. } 0.56^{mm}$$

und nach b) die beobachtete Zunahme

$$0.26^{mm} \text{ bez. } 0.75^{mm}$$

das sind Unterschiede, die bei weitem nicht durch Beobachtungsfehler erklärt werden können.

Um dies zu zeigen, vergleichen wir die den theoretischen Schwerezunahmen entsprechende Zunahme der Schwingungsdauer in Einheiten der 7. Decimale

$$40 \text{ bez. } 144$$

Digitized by Google

mit den thatsächlich beobachteten Zunahmen

68 bez. 195

die Beobachtungen müssten also um

28 bez. 51

Einheiten der 7. Decimale falsch sein, während die mittleren Fehler des Resultats nur

3 bez. 4

betrugen.

Man kann auch so sagen: Infolge der theoretischen Schwerezunahme würde eine von München nach Dachau bezw. Pfaffenhofen transportirte Uhr täglich um

0.68^{sec} bez. 2.45^{sec}

vorgehen; bei der thatsächlichen Schwerezunahme müsste dagegen ceteris paribus eine Beschleunigung von

1.16 bez. 3.32

eintreten. Das gibt Unterschiede

0.48 bez. 0.87

wie sie bei Uhrvergleichungen wie bei Zeitbestimmungen gar nicht denkbar sind.

Schliesslich seien noch die Werthe γ der Helmert'schen Formel mit den beobachteten aber auf den Meeresspiegel reducirten Werthen verglichen, wobei für München der Sterneck'sche Werth 9807.35^{mm} bei 529^{m} Höhe zu Grunde gelegt ist:

	g mm	γ mm	$g-\gamma$ mm
München	9808.50	9808.80	− 0.31
Dachau	9808.76	9808.97	− 0.21
Pfaffenhofen	9809.25	9809.37	− 0.12

mit welchen man die früheren Zahlen verificieren kann.

Dr. E. Anding.

Digitized by Google

Die in Wien ausgeführten Messungen geben Gelegenheit zu einer wiederholten Bestimmung der Intensität der Schwere für die Sternwarte Bogenhausen. Es können jedoch hiezu nur die beiden Pendel Nr. 89 und Nr. 90 verwendet werden, da die zunächst nach den Wiener Beobachtungen am 11. Juni und 4. Juli in Bogenhausen ausgeführten Messungen eine die Grenzen der Beobachtungsfehler wesentlich überschreitende Verkürzung des Pendels Nr. 91 ausgewiesen haben, welche wahrscheinlich während des Transportes von Wien nach München eingetreten sein dürfte.

Seit der Ankunft in München, sowie während der Beobachtungen auf der Sternwarte und auf den beiden auswärtigen Stationen haben sich die drei Pendel — wie obiger Bericht ausweist — nur um geringere und zwar mit der Zeit proportional fortschreitende Beträge verkürzt. Aehnliche Wahrnehmungen wurden in den letzten Jahren auch von andern Pendelbeobachtern gemacht, ohne dass es gelungen wäre, eine befriedigende Erklärung dieser Erscheinung zu geben.[1])

Die reducirten Schwingungszeiten wurden in Wien, wie folgt beobachtet:

5. Mai 1896	Nr. 89 $T = 0^s.5078188$;	Nr. 90 $T = 0^s.5077460$
5. „ „	8172	7451
7. „ „	8203	7479
8. „ „	8198	7504
9. „ „	8184	7460
10. „ „	8187	7496

Mittelwerth: Nr. 89 $T = 0^s.5078189$; Nr. 90 $T = 0^s.5077475$ für die Epoche 7. Mai.

Die oben vorgetragenen, während des Sommers und Herbstes ausgeführten Messungen ergaben für die Schwingungszeiten dieser beiden Pendel:

[1]) Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts" XIV. Band und „Bestimmung der Polhöhe und der Intensität der Schwerkraft auf 22 Stationen von der Ostsee bei Kolberg bis zur Schneekoppe." Berlin 1896. (Veröffentl. d. K. Preuss. Geodät. Instituts).

Digitized by Google

Für Nr. 89 $T = 0^s.5078480.6 - 0.308\,t$ (Einheiten der 7. Decimale)
„ Nr. 90 $T = 0^s.5077746.9 - 0.489\,t$ („ „ „ „)
wobei t die seit der Epoche — 5. September — verflossene Zeit, in Tagen ausgedrückt, bedeutet; hiemit erhält man für die Epoche der Wiener Beobachtungen (7. Mai 1896):

für Nr. 89: $T = 0^s.5078518$ und für Nr. 90: $T = 0^s.5077806$

Mit diesen Daten und unter Zugrundelegung des von von Sterneck angenommenen Werthes der Schwerkraft in Wien (Milit.-geograph. Institut) $g = 9.80876^m$ [1]) ergibt sich für die Schwerkraft auf der Sternwarte Bogenhausen (Pendelobservatorium im Keller des Refraktorgebäudes):

nach Pendel Nr. 89: $g = 9.807477^m$;
„ „ Nr. 90: $g = 9{,}807469^m$.

Der Mittelwerth dieser beiden in bemerkenswerther Weise übereinstimmenden Resultate ist demnach $g = 9.80747^m$.

Im Jahre 1877 habe ich in der k. Sternwarte Bogenhausen mit Hülfe des dem Oesterreichischen Gradmessungs-Büreau gehörigen Reversionspendel-Apparates eine absolute Bestimmung der Länge des einfachen Pendels von 1^s (mittlere Zeit) Schwingungdauer ausgeführt [2]); diese Beobachtungen ergaben für den ovalen Mittelpfeiler im Meridiansaale der Sternwarte die Länge des einfachen Sekundenpendels $L = 0.9936937^m$ und den entsprechenden Werth für die Beschleunigung der Schwerkraft $g = 9.807362^m$.

Nachdem nun bei diesen Messungen der Schwerpunkt des Reversionspendels sich 4^m über jenen der im Kellerraum des Refraktorgebäudes schwingenden Pendel Nr. 89 und Nr. 90 befunden hatte, so ist behufs strenger Vergleichung das 1877 erhaltene Resultat noch um $+ 0.012^{mm}$ zu vergrössern, wodurch sich dasselbe zu $g = 9.807374^m$ ergibt.

---

[1]) Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts" XI. Band.

[2]) Siehe „Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wissensch." II. Cl. XIV. Band, III. Abth.

Digitized by Google

Ferner hat Herr Oberst von Sterneck im Sommer des Jahres 1891 die Schwerkraft auf der Sternwarte von Bogenhausen mit der in Wien (Milit.-geograph. Institut) stattfindenden durch 4 Beobachtungsreihen mit je 4 Pendeln verglichen und für ersteren Punkt erhalten: $g = 9.80735^{m}$ [1]); bringt man hier die oben erwähnte Reduktion auf den Kellerraum des Refraktorgebäudes an, so ergibt sich $g = 9.80736^{m}$.

Die Differenz der Resultate von 1891 und 1896 beträgt 0.11^{mm}; eine der Ursachen dieser Differenz glaubt Herr Oberst von Sterneck in einem minimalen Gleiten seines Pendelstativs auf der ziemlich glatten Oberfläche des ovalen Steinpfeilers im Meridiansaale der Sternwarte erblicken zu sollen; es dürfte ferner auch auf eine kleine Unsicherheit in dem Uhrgange hinzuweisen sein, da die schlechte Witterung in der Zeit vom 5. mit 10. Mai 1896 nicht eine einzige gute Zeitbestimmung ermöglichte, so dass der Uhrgang für die Beobachtungszeit nur aus der Vergleichung von vier allerdings sehr gut gehenden Uhren ermittelt werden konnte. Indessen ist nicht zu übersehen, dass nach einer Schätzung Helmert's[2]) der mittlere Fehler einer relativen Schweremessung von Sterneck's selbst bei sehr sicherer Kenntniss des Uhrgangs immerhin zu $\Delta(g) = \pm 0.05^{mm}$ zu veranschlagen sein dürfte: die Differenz zwischen den relativen Bestimmungen von 1891 und 1895, — nämlich $0{,}11^{mm}$, — überschreitet also den zu erwartenden mittleren Fehler nur um etwa 0.04^{mm}. Man wird also vorläufig den Werth der Beschleunigung der Schwere für das Pendelobservatorium auf der Sternwarte zu Bogenhausen zu $g = 9.80741^{mm}$ anzunehmen haben, welchem Werthe ein mittlerer Fehler von $\pm 0.05^{mm}$ entsprechen würde. Hoffentlich wird in diesem oder im nächsten Jahre eine wiederholte Vergleichung der Intensität der Schwere in München mit jener in Wien eine neue Controlle dieses Werthes bieten. Vor der Hand wird es sich jedoch empfehlen, eine Reihe von Beobachtungen auf der

[1]) Siehe „Mittheilungen des k. und k. milit.-geograph. Instituts" XI. Band.

[2]) Siehe Helmert „Die Schwerkraft im Hochgebirge" pag. 16 u. 17.

Digitized by Google

Linie Innsbruck—München—Coburg zur Ausführung zu bringen, um auf diese Weise im Süden an die Messungen von Sterneck's in Tyrol und im Norden an die vom k. Preussischen Geodätischen Institute auf der Linie Hadersleben—Coburg ausgeführte Pendeloperation anzuschliessen. Eine solche circa 335 km lange, Bayern in nahezu meridionaler Richtung durchschneidende Linie, welche 18 Pendelstationen mit einem durchschnittlichen gegenseitigen Abstande von 18—22 km enthält und an welche sich sodann noch weitere Messungen im Bayerischen Walde, im Fichtelgebirge sowie im Spessart- und Rhön-Gebiete anzuschliessen hätten, wird nicht nur einen entsprechenden allgemeinen Ueberblick über den Verlauf der Schwerkraft innerhalb des bayerischen Territoriums gewähren, sondern auch Fingerzeige darbieten, nach welchen weitere specielle Untersuchungen für einzelne Gegenden anzuordnen wären.

Man hat in neuerer Zeit vielfach versucht, die Resultate der Schweremessungen im Dienste geologischer Speculation als Grundlage von Schlüssen auf die Struktur der Erdrinde zu verwerthen. Wenn Helmert in seiner schon oben citirten, geistvollen Schrift: „Die Schwerkraft im Hochgebirge" zu dem Schlusse gelangt: „Es besteht hiernach unterhalb der Tyroler Alpen zwischen Innsbruck, Landeck, Stilfserjoch und Bozen ein relativer Massendefekt in der Erdrinde, der einer auf's Meeresniveau condensirten Schicht von 1200^{m} Dicke und — 2.4 Dichtigkeit äquivalent ist," — so scheint dieser Ausspruch wohl den Ausgangspunkt einschlägiger, geologischer Combinationen gebildet zu haben. Man dürfte aber dabei den unmittelbar folgenden Passus: „Wie dieser Defekt in Wirklichkeit sich in dem Erdkörper vertheilt, ist nicht genau angebbar, da aus der Potentialwirkung ausserhalb eben nur die gleichwirkende Störungsschicht in der Oberfläche ermittelt werden kann," — vielfach unbeachtet gelassen haben.

Nimmt man an, der nahezu die Kugelgestalt besitzende Erdkörper bestehe aus einer Reihe von übereinander gelagerten, homogenen Schichten, deren Dichtigkeit eine Funktion des Abstandes vom Erdcentrum ist, so wird die Schwerkraft im

Digitized by Google

Meeresniveau bekanntlich durch die Formel $g = G(1 + \beta \sin^2 \varphi)$ als Funktion der geographischen Breite φ bestimmt; die numerischen Werthe der Constanten G und β wurden von Helmert aus einer grösseren Reihe von älteren und neueren, sorgfältig ausgewählten Pendelbeobachtungen zu $G = 9.7800^m$ und $\beta = 0.005310$ ermittelt.[1]) Vergleicht man nun die an einem Orte aus Pendelbeobachtungen gefolgerte, nach der bekannten Regel von Bouguer auf das Meeresniveau reducirte Schwere mit der aus vorstehender Formel berechneten und stellt sich hiebei eine Abweichung heraus, welche durch die mittleren, oder je nach der Güte der Beobachtung überhaupt noch möglichen Beobachtungsfehler nicht erklärt werden kann, so findet für den betreffenden Ort eine Störung des regelmässigen Verlaufes der Schwerkraft statt. Ueber die Ursache dieser Störung, d. h. über Art, Grösse und Form der störenden Massen, lassen sich genauere Angaben nicht erreichen; — die Aufgabe ist eine vollkommen unbestimmte. —

Es ist nicht schwierig, sich in einzelnen speciellen Fällen von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Um zunächst den einfachsten Fall zu erwähnen, genügt es an den bekannten Satz zu erinnern, nach welchem eine aus homogenen Schichten, deren Dichte eine beliebige Funktion des Radius ist, zusammengesetzte Kugel an ihrer Oberfläche wie im ganzen äussern Raum dieselbe anziehende Wirkung ausübt, als wenn die gesammte Masse in ihrem Mittelpunkte concentrirt wäre. Man kann also bei einer so constituirten Kugel die Dichte einer beliebigen Schichte ganz willkürlich vermehren oder vermindern, wenn man gleichzeitig die Dichte irgend einer andern Schichte so vermindert bezw. vermehrt, dass die Gesammtmasse der Kugel unverändert bleibt, welcher Anforderung auf unendlich viele Arten entsprochen werden kann.

In ganz allgemeiner Weise beweist dagegen Gauss in seiner tiefsinnigen Abhandlung: „Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfer-

---

[1]) Siehe Helmert „Höhere Geodäsie" II. Bd. pag. 241.

Digitized by Google

nungen wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte" den Satz,[1]) dass eine gegebene Vertheilung von Massen im Innern eines durch eine in sich geschlossene Fläche begrenzten Raumes stets nur durch einen einzigen Modus der Vertheilung dieser Massen auf der Oberfläche dieses Raumes ersetzt werden könne, so dass die anziehende Wirkung dieses Flächenbelages in den Punkten sowohl der Oberfläche wie des äussern Raumes genau dieselbe ist, wie jene der im Innern der Fläche befindlichen Gesammtmasse.

Hält man dieses wichtige und schöne Theorem mit dem obigen, für die Kugel gültigen, elementaren Satze zusammen, so ergibt sich das Resultat, dass man einer gegebenen Massenvertheilung im Innern des Erdkörpers, welcher also eine bestimmte Wirkung an der Oberfläche und im äussern Raum entspricht, sofort eine unendliche Zahl von andern Massenvertheilungen substituiren kann, welche genau die gleiche Wirkung nach Aussen ergeben wie die ursprüngliche Anordnung. Man braucht zu diesem Ende nur beliebig viele in sich homogene Theile der ursprünglichen Massenanordnung in concentrisch geschichtete Kugelschaalen auseinander zu ziehen oder zu concentriren, welches Verfahren in successiven Wiederholungen zur Darstellung einer unendlichen Anzahl bezüglich der Wirkung nach Aussen äquivalenter Arten der Massenvertheilung führt.

Das Gauss'sche Theorem wurde später auch von Riemann auf einem von dem Gauss'schen Entwicklungsgange verschiedenen Wege in direktem Anschluss an den bekannten Green'schen Satz bewiesen.[2]) — Die vorstehend erwähnten Theoreme so hervorragender Mathematiker begründen in ganz allgemeiner Weise die Ueberzeugung, dass eine Erkenntniss der Constitution des Erdinnern auf dem Wege der Schweremessungen nicht erreicht werden kann; nur wenn anderweitige Anhaltspunkte auf Grund mehr oder weniger hypothetischer Annahmen hinzu-

[1]) Siehe § 31 bis 37.

[2]) Siehe „Schwere, Elektricität und Magnetismus." Nach den Vorlesungen von Riemann bearbeitet von Hattendorff (§§ 21, 22, 34 u. 79).

Digitized by Google

treten, wird man im Stande sein, wenigstens einigermassen plausible oder wahrscheinliche Folgerungen zu ziehen. Kann dagegen eine geologische Hypothese wenigstens annähernde Angaben über Ort, Grösse und Ausdehnung störender Massen im Erdinnern bieten, dann ist man im Stande, den störenden Einfluss auf die Intensität der Schwerkraft an der Erdoberfläche zu berechnen und aus der Vergleichung mit den Ergebnissen der Beobachtung einen Rückschluss auf die Möglichkeit der zu Grunde gelegten Hypothese zu machen. —

Es ist vielleicht nicht ohne Nutzen specielle Beispiele in Betracht zu ziehen und an der Hand derselben zu untersuchen, in wie weit die Pendelbeobachtungen den hiebei sich ergebenden Anforderungen genügen können. Nimmt man an, in einer Tiefe t unter einem Stationspunkte befinde sich die obere Fläche einer cylindrischen Masse von der Dicke h, deren Radius der Grundfläche r ist, während deren Dichte die durchschnittliche Dichte der festen Erdrinde um $\pm \delta$ übersteigt; setzt man ferner voraus, die Station befinde sich in der Verlängerung der Cylinderaxe und bezeichnet mit k die Attraktions-Constante, mit R (= 6470 km) und G (= 9.8^{m}) die durchschnittlichen Werthe des Erdradius und der Beschleunigung der Schwere, endlich aber mit Δ (= 5.6) die mittlere Dichte des gesammten Erdkörpers, so ergibt sich für die Schwerestörung S in der Station der Ausdruck

$$S = 2\pi k \delta \left[h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h+t)^2}\right]$$

und da hinreichend genau $g = \frac{4}{3}\pi k \Delta R$ ist:

$$S = \frac{3}{2}\frac{\delta}{\Delta} \cdot \frac{g}{R}\left[h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h+t)^2}\right]$$

$$= 0.406^{mm}\,\delta\left[h + \sqrt{r^2 + t^2} - \sqrt{r^2 + (h+t)^2}\right]$$

Mit $h = 0.5$ km, $r = 1$ km bezw. $h = 0.5$ km, $r = 2$ km ergibt sich hieraus:

Digitized by Google

für $t = 0.0$ km:	$S = \pm 0.155\,\delta$ mm	bezw.	$S = \pm 0.178\,\delta$ mm
„ $t = 0.2$ „	$\pm 0.121\,\delta$		$\pm 0.159\,\delta$
„ $t = 0.4$ „	$\pm 0.094\,\delta$		$\pm 0.141\,\delta$
„ $t = 0.6$ „	$\pm 0.073\,\delta$		$\pm 0.124\,\delta$
„ $t = 0.8$ „	$\pm 0.057\,\delta$		$\pm 0.109\,\delta$
„ $t = 1.0$ „	$\pm 0.045\,\delta$		$\pm 0.096\,\delta$
„ $t = 2.0$ „	$\pm 0.017\,\delta$		$\pm 0.051\,\delta$
„ $t = 3.0$ „	$\pm 0.009\,\delta$		$\pm 0.030\,\delta$

Wird der Durchschnittswerth der Dichte der auf dem Festlande unterhalb des Meeresniveau's liegenden Theile der Erdrinde zu 2.4 angenommen und bedenkt man, dass die Dichten der die verschiedenen geologischen Formationen darstellenden Massen, — wenn man einzelne Erz führende Blöcke, sowie mit Wasser oder Gas gefüllte Hohlräume, welche jedoch schon mit Rücksicht auf die absolute Festigkeit der dieselbe gewölbeartig einschliessenden Massen nur eine relativ geringere Ausdehnung besitzen können, ausschliesst, — sich von diesem Werthe im positiven wie im negativen Sinne höchstens um $\delta = 0.5$[1]) entfernen, so zeigen obige Zahlen, dass das Auftreten störender Massen von dem für geognostische Detailstudien immerhin nicht unbedeutenden Volumen von mehr als 1.5 (bezw. 6.2) Cubik-Kilometern nur durch Pendelbeobachtungen von hervorragender Präcision und auch nur dann angezeigt werde, wenn dieselben sich höchstens 1 km (bezw. 2 km) unter dem Meeresniveau befinden.

In einer kleinen Notiz, welche Helmert gelegentlich des Zusammentrittes der Permanenten Commission der Internationalen Erdmessung zu Innsbruck (1894) veröffentlicht hat, wird der mittlere Fehler einer Schweremessung zu $\pm 0.00001\,g = 0.10^{mm}$ angenommen;[2]) diese Genauigkeit würde demnach noch nicht

---

[1]) Siehe Annuaire du Bureau de longitude pour l'an 1896 die: Densités de roches diverses" überschriebene Zusammenstellung (pag. 592 und 579).

[2]) Inzwischen ist es bei den durch Anordnung und Ausführung ausgezeichneten Schweremessungen des K. Preuss. Geodät. Institutes auf

Digitized by Google

ausreichen, um Aufschlüsse über das Vorkommen störender Massen von der vorstehend angegebenen Grösse zu ermöglichen. Die im Interesse geognostischer Detailuntersuchungen in der Provinz Hannover bei Freden und Alfeld ausgeführten Pendelbeobachtungen haben in der That auch keine Andeutung über die Existenz vermutheter Dichteungleichheiten ergeben;[1]) die Differenzen der Dichten der treffenden geologischen Formationen sind hiefür zu gering und schwanken überdiess innerhalb einer und derselben Formation um Beträge von 0.10 bis 0.30. —

Es dürfte überhaupt nicht zu übersehen sein, dass die durch Helmert eingeführte Angabe der Dicke einer im Meereshorizont liegenden „ideellen" störenden Massenschichte im Grunde genommen nur ein anderer Ausdruck für die Thatsache ist, dass die Beobachtung an der betreffenden Stelle gegen die aus der Clairaut'schen Formel berechnete Schwereintensität eine mehr oder minder grosse positive oder negative Differenz aufweist; es geht dieses auch aus der approximativen Regel hervor, welche besagt, dass man die in mètres ausgedrückte Dicke einer eine bestimmte Störung von $\pm n$ Mikrons im Schwerewerth g hervorbringenden Wasserschichte findet, wenn man diese Zahl $\pm n$ mit 2.4 (= durchschnittliche Dichte der Oberflächenschichte dsr Erdrinde multiplicirt; es entspricht z. B. einer Differenz von $\pm 0.100^{mm}$ in g eine Dicke der ideellen störenden Wasserschichte von 240^{m}. —

Man ist ferner keineswegs berechtigt, diese ideelle störende Masse in eine gewisse Tiefe senkrecht unter die Station zu verlegen; dass man durch eine derartige Auslegung der Beobachtungsresultate zu Trugschlüssen geführt werden kann, zeigt an einem einfachen Beispiele die nachfolgende Betrach-

---

dem Meridianbogen Kolberg—Schneekoppe gelungen, die Genauigkeit der Resultate wesentlich zu erhöhen und den mittleren Fehler einer Schwerebestimmung auf $0.0000025\,g = 0.025^{mm}$ herabzudrücken, was jedoch augenblicklich noch als eine ausnahmsweise Präcision zu betrachten sein dürfte. —

[1]) Siehe „Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen." (Math.-physik. Klasse 1896 Heft 1). —

Digitized by Google

tung, bei welcher man der Einfachheit halber die störenden Massen als kugelförmig annehmen und von der Krümmung der Erdoberfläche absehen kann. In einer horizontalen Entfernung a von der Pendelstation A befinde sich in der Tiefe t eine störende Masse m senkrecht unterhalb einer zweiten Pendelstation B, dann ergibt sich für diese letztere der Störungsbetrag

$$S_B = \frac{mk}{t^2} \text{ und für } A\text{: } S_A = \frac{mkt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

sohin $S_A = S_B \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$; dieser Betrag hat sein Maximum bei $a = 0$, in welchem Falle A mit B zusammentrifft und nimmt von da an ständig ab, so dass er selbst bei den grössten Werthen ($S_B = 2^{\text{mm}}$), welche auf der Erdoberfläche beobachtet wurden, schon bei $\frac{a}{t} = 5$ für die besten Pendelbeobachtungen unter die Grenze des mittleren Fehlers herabsinkt. Tritt nun zu der unter B liegenden Masse m auf der andern Seite von A unter C eine gleich grosse, symmetrisch gelagerte Masse hinzu, so ergibt sich die Störung in A:

$$S'_A = 2 \cdot \frac{mk}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ und}$$

$$S'_B = \frac{mk}{t^2}\left[1 + \frac{1}{\left(1 + 4\frac{a^2}{t^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Führt man in diesen Ausdrücken Zahlenwerthe ein, indem man z. B. $a = 4$ km, $t = 5$ km setzt und annimmt, senkrecht unter B und C befinden sich zwei kugelförmige Erzlager vom Radius $\varrho = 2$ km und von der Dichte 5,0, welcher Werth die mittlere Oberflächendichte von 2.4 um 2.6 übertrifft, so erhält man $S'_A = 0.214^{\text{mm}}$ und $S'_B = S'_C = 0.259^{\text{mm}}$.

Denkt man sich nun die gegen die mittlere Oberflächendichte überschüssige Masse der beiden Kugeln gleichförmig auf zwei grössere concentrische Kugeln vom Halbmesser 5 km

Digitized by Google

vertheilt, so erhält man zwei die Erdoberfläche bezw. in B und in C tangirende Kugeln von der Dichte 2.57; unterhalb A aber, — da wo die beiden vorgenannten Kugeln theilweise übereinander greifen, — ergibt sich ein linsenförmiger Raum von 2 km Dicke und 6 km Durchmesser, dessen Mitte sich in einer Tiefe von 5 km befindet, welchem die Dichte 2.73 zukommt, während in dem unmittelbar unter A liegenden, nach Abzug der beiden Kugeln und der Linse noch übrig bleibenden Raume die Dichte 2.4 herrscht. Die so erhaltene Massenanordnung ist von der ursprünglich angenommenen der beiden kugelförmigen Erzlager ganz wesentlich verschieden und dennoch ist die Wirkung nach Aussen, welche wir durch genaue Pendelbeobachtungen messen können, in beiden Fällen ganz die gleiche.

Während man den Schweremessungen bisher von mancher Seite vielleicht ein zu grosses Gewicht beigelegt hat, wurde dagegen das zweite Datum, welches die Geodäsie der Forschung nach der Constitution der Erdrinde bietet, nämlich die Kenntniss der Störung in der Richtung der Vertikalen, — die sogenannte Lothablenkung in ihrer Bedeutung häufig unterschätzt. Befindet sich in B senkrecht unter der Erdoberfläche in einer Tiefe t wieder eine störende kugelige Masse m, so wird diese in einer um a auf dem Meridian von B entfernten Station A eine Störung der Lage der Vertikalen bewirken, welche unter Vernachlässigung der bei Entfernungen von einigen hundert Kilometern das Resultat nicht merkbar beeinflussenden Krümmung der mathematischen Erdoberfläche als Breitenstörung s im Betrage von

$$s = \frac{mka}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{g \sin 1''} \text{ (in Sekunden ausgedrückt)}$$

erscheint.

Da nun die den obigen Voraussetzungen entsprechende Schwerestörung in A: $S = \frac{mkt}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist, so ergibt sich:

$$\frac{s}{S} = \frac{a}{t} \cdot \frac{1}{g \sin 1''}$$

Digitized by Google

Mit $g = 9.8^{m}$ ergibt sich, wenn die Schwerestörung S in mm ausgedrückt is: $\frac{s}{S} = 21.047 \frac{a}{t}$

Hält man sich zu der Annahme berechtigt, dass die beiden Störungen s und S von einer einzigen nahezu kugelförmigen Masse bewirkt werden, so liefert diese Gleichung eine Relation zwischen der Entfernung und der Tiefe, in welcher sich die störende Masse befindet, sobald man in einer Station sowohl die Grösse der Lothablenkung als auch die Schwerestörung auf dem Wege der Beobachtung bestimmt hat.

Die Unbestimmtheit der Aufgabe, durch Messungen an der Erdoberfläche die Constitution des Erdinnern zu erforschen, wird indessen auch durch die Kenntniss der Lothablenkungen nur beschränkt aber nicht aufgehoben; um mathematisch bestimmte Lösungen zu erlangen, wird man immer genöthigt sein, Hypothesen in die Rechnung einzuführen. —

Digitized by Google

Ueber Molekular-Funktionen.

Von Dr. **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 6. März.*)

Einleitung. Die Dichtigkeit eines mathematischen Kontinuums ist durch die Formel gegeben:

$$1) \qquad \mu = \lim_{d\tau=0} \frac{dm}{d\tau},$$

wo dm die in dem Raumelement $d\tau$ (x, y, z) vorhandene Masse vorstellt; μ und die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w werden als stetige Funktionen der Zeit t und der Stelle x, y, z angesehen. Für ein solches Kontinuum, welches zur Zeit t den Raum $\mathfrak{A}$ erfüllen möge, gilt das mechanische Grundprincip von D'Alembert in der Form:

$$2) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathfrak{A}} \mu \left(\frac{du}{dt} \delta x + \frac{dv}{dt} \delta y + \frac{dw}{dt} \delta z \right) d\tau \, dt = 0$$

für alle dem System erlaubten Verrückungen δx, δy, δz.

Wenn wir nun in der empirischen Physik von Dichtigkeit sprechen, so können wir die ideale Definition 1) nicht zu grunde legen, wir können hier nur von der Dichtigkeit eines kleinen Raumgebietes dA sprechen und dieselbe durch die Formel definieren:

$$3) \qquad \mu_0 = \frac{dm}{dA},$$

wo dm die in dA vorhandene Masse vorstellt; es ist also:

Digitized by Google

4) $$\mu_0 = \frac{1}{dA} \int_{dA} \mu \, d\tau ,$$

wo μ die ideale, durch die Formel 1) definierte Dichtigkeit ist.

Bei der Untersuchung des Fehlers, welchen man macht, wenn man an Stelle der idealen Dichtigkeit μ in der Gleichung des D'Alembert'schen Princips 2) den durch die Gleichung 4) gegebenen Mittelwert μ_0 setzt,[1]) handelt es sich um die Diskussion von Integralen der folgenden Form:

$$\text{1. Gruppe:} \begin{cases} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0)\, d\tau , \\ \int_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0)\, d\tau , \\ \int_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0)\, d\tau . \end{cases}$$

$$\text{2. Gruppe:} \begin{cases} \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)(x-x_0)^2\, d\tau, & \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)\, 2\,(y-y_0)(z-z_0)\, d\tau, \\ \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)(y-y_0)^2\, d\tau, & \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)\, 2\,(z-z_0)(x-x_0)\, d\tau, \\ \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)(z-z_0)^2\, d\tau, & \frac{1}{1\cdot 2}\int_{dA} (\mu-\mu_0)\, 2\,(x-x_0)(y-y_0)\, d\tau,^{2)} \end{cases}$$

. . . . . .

Sei M der grösste absolute Wert von $\mu - \mu_0$, r die kleinste Entfernung innerhalb dA, so sind die Integrale der 1. Gruppe ihrem absoluten Werte nach

---

[1]) Bei der Voraussetzung, dass μ_0 sich von dem Werte einer stetigen Funktion an einer Stelle x_0, y_0, z_0 innerhalb dA nur um Grössen unterscheide, die gegen die Dichtigkeitseinheit von der Ordnung $\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$ klein sind.

[2]) Wobei x_0, y_0, z_0 irgend einen Punkt innerhalb dA vorstellt.

Digitized by Google

$$< M r \, d A ,$$

die Integrale der 2. Gruppe

$$< M r^2 \, d A ,$$

u. s. f.

Wir setzen nun:

$$5) \quad \begin{cases} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0)\, d\tau = \varkappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_1 , \\ \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0)\, d\tau = \varkappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_2 , \\ \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0)\, d\tau = \varkappa \mu_0 \cdot dA \cdot \xi_3 , \end{cases}$$

$$6) \quad \begin{cases} \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0)^2\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{11} , \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0)^2\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{22} , \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0)^2\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot \xi_{33} , \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)\, 2\, (y - y_0)(z - z_0)\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2\, \xi_{23} , \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)\, 2\, (z - z_0)(x - x_0)\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2\, \xi_{31} , \\ \frac{1}{1 \cdot 2} \int\limits_{dA} (\mu - \mu_0)\, 2\, (x - x_0)(y - y_0)\, d\tau = \varkappa^2 \mu_0 \, dA \cdot 2\, \xi_{12} , \end{cases}$$

u. s. f.

Dabei soll $\varkappa$ einen konstanten Zahlenfaktor vorstellen, der von der Ordnung:

Digitized by Google

$$\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$$

klein ist.

Unter der Voraussetzung, dass bei einer Einteilung des Gebietes $\mathfrak{A}$ in genügend kleine Teile dA

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \xi_{11},\ \xi_{22},\ \xi_{33},\ \xi_{23},\ \xi_{31},\ \xi_{12} \ldots\ldots$$

sich von stetigen Funktionen an einer Stelle x_0, y_0, z_0 innerhalb dA nur um Grössen unterscheiden, die gegen ihre Dimensionseinheiten von der Ordnung $\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$ klein sind, nennen wir:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$$

die Molekular-Funktionen erster Ordnung,

$$\xi_{11},\ \xi_{22},\ \xi_{33},\ \xi_{23},\ \xi_{31},\ \xi_{12}$$

die Molekular-Funktionen zweiter Ordnung des Kontinuums u. s. f.

§ 1. Die wichtigsten Sätze über die Molekular-Funktionen erster Ordnung.

Wir definierten die Molekular-Funktionen erster Ordnung ξ_1 ξ_2 ξ_3 durch die folgenden Gleichungen:

$$\varkappa \mu_0 dA \cdot \xi_1 = \int_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0)\, d\tau,$$

$$\varkappa \mu_0 dA \cdot \xi_2 = \int_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0)\, d\tau,$$

$$\varkappa \mu_0 dA \cdot \xi_3 = \int_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0)\, d\tau.$$

Wir differenzieren die erste dieser Gleichungen nach der Zeit t, dann folgt bei Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf $\varkappa$ von zweiter oder höherer Ordnung klein sind:

Digitized by Google

$$\varkappa \mu_0 \, dA \frac{d\xi_1}{dt} = \int (\mu - \mu_0) \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt} \right) d\tau,$$

$$= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0) \, d\tau$$

$$+ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0) \, d\tau$$

$$+ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0) \, d\tau,$$

$$= \varkappa \mu_0 \, dA \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \xi_2 + \frac{\partial u}{\partial z} \xi_3 \right\}.$$

Dividiert man auf beiden Seiten durch $\varkappa \mu_0 \, dA$, so folgt:

$$7) \qquad \text{analog:} \quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \xi_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y} \xi_2 + \dfrac{\partial u}{\partial z} \xi_3, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \xi_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} \xi_2 + \dfrac{\partial v}{\partial z} \xi_3, \\ \dfrac{d\xi_3}{dt} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \xi_1 + \dfrac{\partial w}{\partial y} \xi_2 + \dfrac{\partial w}{\partial z} \xi_3. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die die Fundamentaleigenschaft der Molekularfunktionen erster Ordnung ausdrücken, spielen in der theoretischen Physik noch an einer anderen Stelle eine hervorragende Rolle. Sie gelten nämlich in jeder inkompressiblen Flüssigkeit für die Wirbelkomponenten:

$$\pi' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\chi' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\varrho' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Wir können in Folge der Gleichungen 7) die drei folgenden Sätze aussprechen[1]):

[1]) Die Sätze I—III gelten natürlich nur so lange, als die von uns gemachten Vernachlässigungen statthaft sind.

Digitized by Google

I. Sind $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ zu einer Anfangszeit t_0 überall in dem Kontinuum gleich null, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t;

II. Ist

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial \xi_3}{\partial z}$$

in einem inkompressiblen Kontinuum zu einer Anfangszeit t_0 überall gleich null, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t;

III. Sind $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ in einem Kontinuum, das sich wie eine inkompressible Flüssigkeit bewegt, zu einer Anfangszeit t_0 überall den Wirbelhomponenten $\pi'\ \chi'\ \varrho'$ proportional, so gilt dasselbe zu jeder beliebigen Zeit t.

§ 2. Das D'Alembert'sche Princip bei Berücksichtigung der Molekular-Funktionen 1. Ordnung.

Wir wollen zunächst der Einfachheit halber annehmen, dass das von unserem Kontinuum erfüllte Gebiet $\mathfrak{A}$ sich so in kleine Gebiete dA zerteilen lasse, dass μ_0 für jedes kleine Gebiet dA denselben Wert habe.[1])

Wir können die Gleichung des D'Alembert'schen Princips so schreiben:

$$8)\qquad \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mathfrak{A}} \int_{dA} \mu \left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z \right) d\tau\, dt = 0,$$

wo die Summe über alle Gebiete dA des Raumes $\mathfrak{A}$ zu erstrecken ist. Nun entwickeln wir:

$$\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z$$

nach dem Taylor'schen Satz:

1) Ist dies zu einer Anfangszeit t_0 möglich, so wird dasselbe zu jeder Zeit t stattfinden, falls $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ von x, y, z unabhängig, also eine blosse Funktion der Zeit t ist.

Digitized by Google

$$\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z = \left|\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right|_{x_0 y_0 z_0}$$

$$+ (x - x_0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0}$$

$$+ (y - y_0)\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0}$$

$$+ (z - z_0)\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo $x_0\, y_0\, z_0$ einen beliebigen Punkt innerhalb des Gebietes dA vorstellt.

Die Formel 8) geht hiedurch in die folgende über:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{\mathfrak{M}} \left[\mu_0 \int_{dA} \left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right) d\tau\right.$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(x - x_0)\, d\tau$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(y - y_0)\, d\tau$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)\right]_{x_0 y_0 z_0} \int_{dA} (\mu - \mu_0)(z - z_0)\, d\tau$$

$$\left. + \ldots\ldots \right] dt = 0,$$

oder bei Einführung der Molekularfunktionen erster Ordnung und unter Vernachlässigung von Grössen, die in Bezug auf $\varkappa$ von zweiter oder höherer Ordnung klein sind:

Digitized by Google

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathfrak{A}} \mu_0 \Big\{ & \frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z \\ & + \varkappa \xi_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt} dz\right) \\ & + \varkappa \xi_2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt} dz\right) \\ & + \varkappa \xi_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt} dz\right) \Big\} d\tau\, dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Wir verstehen unter einem echten Kontinuum ein solches, für das zu einer Anfangszeit t_0 die Molekularfunktionen erster Ordnung $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ null sind; nach Satz I des vorigen Paragraphen gilt dies dann zu jeder Zeit t. Für ein echtes Kontinuum reduziert sich somit das D'Alembert'sche Princip auf die gewöhnliche Form:

$$10)\qquad \int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathfrak{A}} \mu_0 \left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right) d\tau\, dt = 0.$$

Für alle übrigen Kontinua aber, welche wir als unechte Kontinua bezeichnen wollen, müssen wir die Gleichung des D'Alembert'schen Princips in der Form 9) schreiben, und wir dürfen die drei mit $\varkappa$ multiplizierten Glieder nicht fortlassen, ohne die Berechtigung einer solchen Vernachlässigung nachgewiesen zu haben.

Wir haben unsere bisherigen Betrachtungen zunächst nur für den Fall gemacht, dass μ_0 eine Konstante vorstellt, dieselben lassen sich indessen Schritt für Schritt in derselben Weise anstellen, falls wir für die ideale Dichtigkeit μ die Relation annehmen:

$$11)\qquad \mu = \mu_0 + \mathfrak{m},$$

wo für jedes kleine Gebiet dA:

$$12)\qquad \int_{dA} \mathfrak{m}\, d\tau = 0$$

Digitized by Google

und μ_0 eine stetige Funktion von $t\,x\,y\,z$ ist, deren Ableitungen nach $x\,y\,z$:

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mu_0}{\partial z}$$

nicht gegen die Grösse:

$$\frac{\text{Dichtigkeitseinheit}}{\text{Längeneinheit}}$$

von der Ordnung:

$$\frac{\text{Längeneinheit}}{\text{Dimensionen von } dA}$$

gross sind.

Wir brauchen daher die Konstanz von μ_0, welche ja die Unabhängigkeit des Ausdrucks: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ von der Stelle verlangen würde (vergl. Anmerkung 1 pag. 7), nicht als Bedingung zu der Gleichung 9) des D'Alembert'schen Princips hinzuzufügen.

§ 3. Anwendungen der Theorie.

Da die Konstante $\varkappa$ von der Ordnung:

$$\frac{\text{Dimensionen von } dA}{\text{Längeneinheit}}$$

klein ist, so werden die mit $\varkappa$ multiplizierten Glieder in der Gleichung 9) des D'Alembert'schen Princips im allgemeinen dann zu vernachlässigen sein, wenn die Grössen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{du}{dt}\delta x + \frac{dv}{dt}\delta y + \frac{dw}{dt}\delta z\right)$$

gegen ihre Dimensionseinheiten nicht von derselben Ordnung

Digitized by Google

gross sind, wie die Längeneinheit gegen die Dimensionen von dA, also im allgemeinen, wenn wir es mit sogenannten sichtbaren Geschwindigkeiten zu thun haben. Dagegen werden diese accessorischen, mit $\varkappa$ multiplizierten Glieder einen wesentlichen Einfluss gewinnen können, falls wir mit sehr raschen Schwingungsbewegungen zu rechnen haben.

Wir sagen, die Bewegungen an einer Stelle (x, y, z) seien aus sichtbaren und mit der sehr kleinen Zeitperiode T schwingenden Bewegungen zusammengesetzt, falls die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w sich in folgender Weise analytisch darstellen lassen:

$$13)\quad \begin{cases} u = u_0 + \sum\limits_1^\infty j \left(u_{j_1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + u_{j_2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \\ v = v_0 + \sum\limits_1^\infty j \left(v_{j_1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + v_{j_2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \\ w = w_0 + \sum\limits_1^\infty j \left(w_{j_1} \cos j \frac{t}{T} 2\pi + w_{j_2} \sin j \frac{t}{T} 2\pi \right), \end{cases}$$

wo:

$$\left.\begin{matrix} u_0, & v_0, & w_0 \\ u_{j_1}, & v_{j_1}, & w_{j_1} \\ u_{j_2}, & v_{j_2}, & w_{j_2} \end{matrix}\right| \text{ nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit.}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{du_0}{dt} & \frac{dv_0}{dt} & \frac{dw_0}{dt} \\ \frac{du_{j_1}}{dt} & \frac{dv_{j_1}}{dt} & \frac{dw_{j_1}}{dt} \\ \frac{du_{j_2}}{dt} & \frac{dv_{j_2}}{dt} & \frac{dw_{j_2}}{dt} \end{matrix}\right| \text{ nicht gegen die Beschleunigungseinheit}$$

von der Ordnung: $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen; wir bezeichnen dabei $u_0\, v_0\, w_0$ als die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten, die übrigen Teile von $u\, v\, w$ als Schwingungsgeschwindigkeiten mit der Schwingungsdauer T.

Digitized by Google

Gerade bei einer Theorie der elektrischen Erscheinungen auf mechanischer Grundlage wird man es wohl stets mit Geschwindigkeiten zu thun haben, die sich in der eben angegebenen Weise aus sichtbaren und schwingenden Bewegungen zusammensetzen; es können sich daher die Molekular-Funktionen gerade für eine mechanische Theorie der elektrischen Erscheinungen von Nutzen erweisen. Bieten uns doch einzelne rein mechanische Erscheinungen, wie die pulsierenden und oscillierenden Kugeln von Bjerknes, die von einer inkompressiblen Flüssigkeit umströmten Ringe von Kirchhoff Analogien mit elektrischen Erscheinungen dar, von denen man erwarten konnte, dass sie durch geringfügige Modifikationen zu einer mechanischen Theorie der sogenannten elektrischen Fernwirkungen benützt werden könnten. Was liegt nach den obigen Untersuchungen über Molekular-Funktionen näher, als den Versuch zu machen, die gewünschten Modifikationen dadurch herbeizuführen, dass man über die Molekular-Funktionen erster Ordnung, die man gewöhnlich in der Mechanik starrer und flüssiger Körper vernachlässigt, geeignete Annahmen macht?

Wenn wir, um elektrische Fernwirkungen zwischen zwei getrennten Massensystemen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zu erklären, annehmen, dass ausserhalb der beiden Massensysteme der Raum von einer inkompressiblen Flüssigkeit erfüllt wird, welche der Träger der elektrischen Bewegung ist, so kann sich der Einfluss der Molekular-Funktionen erster Ordnung einmal als eine Modifikation der Bewegung der Flüssigkeit, andererseits als eine Modifikation der Bewegung der Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ geltend machen. Wir wollen nun das Zwischenmedium, die inkompressible Flüssigkeit, nicht verändern, weil wir dieselbe bereits für eine hydrodynamische Erklärung der Gravitation gebrauchen; es bleibt somit nur übrig, die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht mehr als echt kontinuierlich anzunehmen, und wir fragen, können wir die Molekular-Funktionen $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ in denselben so annehmen, dass die hydrodynamischen inversen Analogien zu den elektrischen Erscheinungen von Bjerknes und Kirchhoff zu vollkommenen Analogien sich gestalten und so für

Digitized by Google

eine mechanische Erklärung der elektrischen Fernwirkungen geeignet werden?

Es ist, wenn man die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ als starre Körper auffasst und die Bewegungsgleichungen für diesen Fall aufstellt, ohne grosse Schwierigkeit zu übersehen, dass die Einführung der Molekular-Funktionen erster Ordnung, welche Werte man auch denselben innerhalb $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ zuerteilen möge, keinerlei Einfluss auf die sichtbare Bewegung der starren Körper $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ auszuüben vermag, wir können dagegen einen solchen Einfluss und zwar die gewünschte Modifikation der hydrodynamischen Probleme von Bjerknes und Kirchhoff erlangen, wenn wir die Massensysteme $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ nicht als vollkommen starre Körper voraussetzen, sondern nur ihren sichtbaren Bewegungen die Bedingungen der Starrheit vorschreiben, während ihre schwingenden Bewegungen den Bedingungen der Starrheit nicht unterworfen sind. Während bei vollkommen starren Körpern die Geschwindigkeitskomponenten $u\ v\ w$ die Bedingungen erfüllen:

$$u = \xi' + (z - \zeta)\,\chi' - (y - \eta)\,\varrho',$$
$$v = \eta' + (x - \xi)\,\varrho' - (z - \zeta)\,\pi',$$
$$w = \zeta' + (y - \eta)\,\pi' - (x - \xi)\,\chi',$$

wo $\xi\ \eta\ \zeta\ \pi\ \chi\ \varrho$ sechs unabhängige Variabeln vorstellen, machen wir jetzt diese Beschränkungen nur für die sichtbaren Geschwindigkeitskomponenten $u_0\ v_0\ w_0$:

$$14)\qquad \begin{cases} u_0 = \xi' + (z - \zeta)\,\chi' - (y - \eta)\,\varrho', \\ v_0 = \eta' + (x - \xi)\,\varrho' - (z - \zeta)\,\pi', \\ w_0 = \zeta' + (y - \eta)\,\pi' - (x - \xi)\,\chi'; \end{cases}$$

solche Massensysteme bieten dem Auge nichtsdestoweniger die Erscheinung starrer Körper, wenn auch die Schwingungsgeschwindigkeiten nicht mehr den Bedingungen der Starrheit, sondern ganz beliebigen anderen Bedingungen unterworfen sind. Ich habe diesen Massensystemen den Namen „periodisch starre

Digitized by Google

Körper" gegeben, weil in dem Falle, dass die Bewegung derselben sich aus einer sichtbaren Bewegung und einer einfachen Schwingung zusammensetzt, in bestimmten periodisch auf einander folgenden Zeitmomenten die Lage ihrer einzelnen Teilchen genau dieselbe ist, wie bei vollkommen starren Körpern. Wie in der Theorie der vollkommen starren Körper die auf denselben wirkenden Kraftkomponenten und Drehungsmomente (bezogen auf einen Punkt $\xi\ \eta\ \zeta$) durch die folgenden Gleichungen definiert werden:

$$X = \int \mu \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$Y = \int \mu \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$Z = \int \mu \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) d\tau,$$

$$D_x = \int \mu \left\{ (y - \eta) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \right.$$
$$\left. - (z - \zeta) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

$$D_y = \int \mu \left\{ (z - \zeta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \right.$$
$$\left. - (x - \xi) \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

$$D_z = \int \mu \left\{ (x - \xi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \right) \right.$$
$$\left. - (y - \eta) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w \right) \right\} d\tau,$$

so werden die auf den periodisch starren Körper wirkenden Kraftkomponenten und Drehungsmomente (bezogen auf einen Punkt $\xi\ \eta\ \zeta$) durch die folgenden Gleichungen definiert:

Digitized by Google

$$15)\quad \begin{cases} X = \int \mu_0 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \\ Y = \int \mu_0 \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \\ Z = \int \mu_0 \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) d\tau, \end{cases}$$

$$16)\quad \begin{cases} D_x = \int \mu_0 \Big\{ (y-\eta) \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) \\ \qquad - (z-\zeta) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) \Big\} d\tau, \\ D_y = \int \mu_0 \Big\{ (z-\zeta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) \\ \qquad - (x-\xi) \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} + \frac{\partial w_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial w_0}{\partial z} w_0 \right) \Big\} d\tau, \\ D_z = \int \mu_0 \Big\{ (x-\xi) \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial v_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial z} w_0 \right) \\ \qquad - (y-\eta) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial x} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial y} v_0 + \frac{\partial u_0}{\partial z} w_0 \right) \Big\} d\tau. \end{cases}$$

Auf diesen Grundlagen kann man thatsächlich durch den Einfluss der Molekular-Funktionen erster Ordnung die hydrodynamischen inversen Analogien zu vollkommnen Analogien mit den elektrischen Erscheinungen machen und so eine mechanische Theorie der elektrischen Fernwirkungen gewinnen.[1])

Wenn ich auch diese Verwertung der Molekular-Funktionen erster Ordnung für die wichtigste Anwendung unserer Theorie halte, so zweifle ich doch nicht, dass die Einführung dieser Funktionen auch in anderen Gebieten der theoretischen Physik, im besonderen in der Theorie der Krystalle und der Krystall-

---

[1]) In bezug auf die Rechnungen im einzelnen verweise ich auf: A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik, II. Teil I. Abschnitt (F. Dümmler's Verlag, Berlin 1897).

Digitized by Google

optik, vielleicht auch in den Anfangsgründen der theoretischen Chemie von Nutzen sein wird.

Schlussbemerkung. Die obigen Betrachtungen ähneln einigermassen gewissen Untersuchungen in der kinetischen Gastheorie. Wie bei uns von der Dichtigkeit, so wird dort von den Geschwindigkeitskomponenten angenommen, dass die Werte ihrer Differenzen innerhalb sehr kleiner Raumgebiete nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit von derselben Ordnung klein sind, wie die Dimensionen dieser Raumgebiete gegen die Längeneinheit, und man rechnet mit den Mittelwerten gewisser Funtionen der Geschwindigkeitskomponenten, die man als stetige Funktionen der Zeit und der Stelle ansieht.[1]) Dadurch, dass wir diese Voraussetzung nur für die Dichtigkeit, nicht für die Geschwindigkeitskomponenten machen, erhält unsere Theorie eine viel grössere Einfachheit und völlige mathematische Strenge.[2])

Es sei mir noch gestattet, einen analytischen Ausdruck für die lebendige Kraft eines Kontinuums bei Berücksichtigung der Molekular-Funktionen erster Ordnung aufzustellen. Es ist:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int \mu\,(u^2+v^2+w^2)\,d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int \mu_0 \Big\{ u^2+v^2+w^2 + \varkappa\,\xi_1 \frac{\partial}{\partial x}(u^2+v^2+w^2) \\ &\qquad + \varkappa\,\xi_2 \frac{\partial}{\partial y}(u^2+v^2+w^2) \\ &\qquad + \varkappa\,\xi_3 \frac{\partial}{\partial z}(u^2+v^2+w^2) \Big\}\, d\tau, \end{aligned}$$

somit nach 7):

$$17)\quad T = \frac{1}{2}\int \mu_0 \left\{ u^2+v^2+w^2 + \varkappa\left(u\frac{d\xi_1}{dt} + v\frac{d\xi_2}{dt} + w\frac{d\xi_3}{dt}\right)\right\} d\tau.$$

---

[1]) Vgl. u. a.: G. Kirchhoff, Vorl. über die Theorie der Wärme, 15. Vorl. pag. 156 ff.

[2]) Für die Erklärung der Wärmeerscheinungen werden wir natürlich jener Voraussetzungen, auch für die Geschwindigkeitskomponenten, nicht entraten können.

Digitized by Google

Wir können nun, wenn wir die Bewegung des Kontinuums aus sichtbaren und schwingenden Bewegungen zusammengesetzt annehmen, $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ durch Gleichungen von der Form definieren:

$$18)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} = a' + \sum\limits_1^\infty j\ \ U_{j_1} \cos j \dfrac{t}{T} 2\pi + \ \ U_{j_2} \sin j \dfrac{t}{T} 2\pi\Big), \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} = b' + \sum\limits_1^\infty j\ \ V_{j_1} \cos j \dfrac{t}{T} 2\pi + \ \ V_{j_2} \sin j \dfrac{t}{T} 2\pi\Big), \\ \dfrac{d\xi_3}{dt} = c' + \sum\limits_1^\infty j\ W_{j_1} \cos j \dfrac{t}{T} 2\pi + W_{j_2} \sin j \dfrac{t}{T} 2\pi\Big), \end{cases}$$

als ob die $\dfrac{d\xi_1}{dt}, \dfrac{d\xi_2}{dt}, \dfrac{d\xi_3}{dt}$ sich aus sichtbaren Geschwindigkeiten $a'\ b'\ c'$ und schwingenden Geschwindigkeiten zusammensetzten. Sehen wir dies in 17) ein, so ergiebt sich aus dieser Formel die folgende Gleichung:

$$19)\ \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} T dt = \frac{1}{2}\int \mu_0 \Big[(u_0^2+v_0^2+w_0^2) + \frac{1}{2}\sum\limits_1^\infty j(u_{j_1}^2+v_{j_1}^2+w_{j_1}^2+u_{j_2}^2+v_{j_2}^2+w_{j_2}^2)$$

$$+\ \frac{1}{2}\varkappa \sum\limits_1^\infty j(u_{j_1} U_{j_1} + v_{j_1} V_{j_1} + w_{j_1} W_{j_1} + u_{j_2} U_{j_2} + v_{j_2} V_{j_2} + w_{j_2} W_{j_2})\Big] d\tau.\ ^{1)}$$

Auch diese Formel lässt uns den Einfluss erkennen, den die Molekular-Funktionen erster Ordnung auf die Bewegung eines Kontinuums ausüben können, wenn die Geschwindigkeiten $u_{j_1}\ v_{j_1}\ w_{j_1}\ u_{j_2}\ v_{j_2}\ w_{j_2}$ und $U_{j_1}\ V_{j_1}\ W_{j_1}\ U_{j_2}\ V_{j_2}\ W_{j_2}$ sehr gross sind.

---

[1]) Das Glied:

$$\tfrac{1}{2}\mu_0 \varkappa (u_0 a' + v_0 b' + w_0 c')$$

haben wir unter dem Integral, als zu vernachlässigen, fortgelassen, da $u_0\ v_0\ w_0\ a'\ b'\ c'$ als sichtbare Geschwindigkeiten vorausgesetzt sind.

Digitized by Google

Ein Modell zur hydrodynamischen Theorie der Gravitation.

Von Dr. **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 6. März.*)

Hydrodynamische Theorie der Gravitation. Durch die Versuche und Rechnungen von Bjerknes[1]) ist festgestellt worden, dass zwei Kautschuk-Kugeln, welche in Wasser periodische Kompressionen und Dilatationen, sogenannte Pulsationsschwingungen, ausführen, eine ähnliche Wechselwirkung auf einander ausüben, wie zwei elektrische Teilchen; die Theorie ergiebt thatsächlich, dass zwei solche Kugeln auf einander Kräfte ausüben, deren Richtung in der Centraldistanz liegt und deren Stärke dem Quadrat dieser Centraldistanz umgekehrt proportional ist. Die Kräfte sind anziehend oder abstossend, je nachdem die Phase dieser beiden Pulsationen übereinstimmt oder entgegengesetzt ist, d. h. je nachdem die Kontraktionen der einen Kugel mit denen der anderen, die Dilatationen der einen Kugel mit denen der andern Kugel zusammenfallen oder umgekehrt. Dem Bestreben von Bjerknes, auf diese Eigenschaften der pulsierenden Kugeln eine Theorie der elektrischen Erscheinungen zurückzuführen, stellte sich die Schwierigkeit in den Weg, dass das Wechselwirkungsgesetz elektrischer Teilchen (das Gesetz von Coulomb) zwar in bezug auf die absolute Quantität mit dem Wechselwirkungsgesetz pulsierender Kugeln übereinstimmt,

---

[1]) Bjerknes, Forh. Vidensk. Christiania 1863—1875; Gött. Nachr. 1876; C. r. 1879—1881; Jour. de phys. 1880. —

Digitized by Google

nicht aber in bezug auf das Vorzeichen. Hier tritt bei gleichen Phasen Anziehung, dort bei gleichartigen Elektrizitäten Abstossung ein, hier haben wir bei entgegengesetzten Phasen Abstossung, dort bei entgegengesetzten Elektrizitäten Anziehung.

Während daher für die Benutzung des Bjerknes'schen Resultates für eine Theorie der elektrischen Erscheinungen einige Veränderungen in den Voraussetzungen notwendig sind, kann man dieses Resultat zu einer mechanischen Theorie der Gravitation verwerten.

Die nächstliegende Annahme ist die, dass wir uns den ganzen Weltenraum von einem Medium erfüllt denken, welches sich in bezug auf die Fortpflanzung sehr rascher Schwingungen ganz wie eine inkompressible Flüssigkeit verhält, und von den die Eigenschaft der Gravitation zeigenden materiellen Teilchen voraussetzen, dass sie alle Pulsationen mit gleicher Schwingungsdauer und mit gleicher Phase ausführen.

Die bei einer solchen Auffassung zurückbleibende Schwierigkeit für die Anschauung, dass man sich alle Teilchen gewissermassen aus eigenem Antrieb, alle mit derselben Schwingungsdauer und Phase pulsierend denken müsste, habe ich dadurch zu beseitigen gesucht, dass ich nunmehr unser Sonnensystem einem periodischen Drucke ausgesetzt denke, welcher, bei der nahen Inkompressibilität des Zwischenmediums, die Pulsationen der mit viel grösserer Kompressibilität begabten Massenteilchen mit gleicher Schwingungsdauer und Phase begreiflich macht.

Zur Illustration dieser mechanischen Gravitationsauffassung soll das im Folgenden zu beschreibende Modell dienen, welches die früher angestellten theoretischen Rechnungen bestätigt.[1])

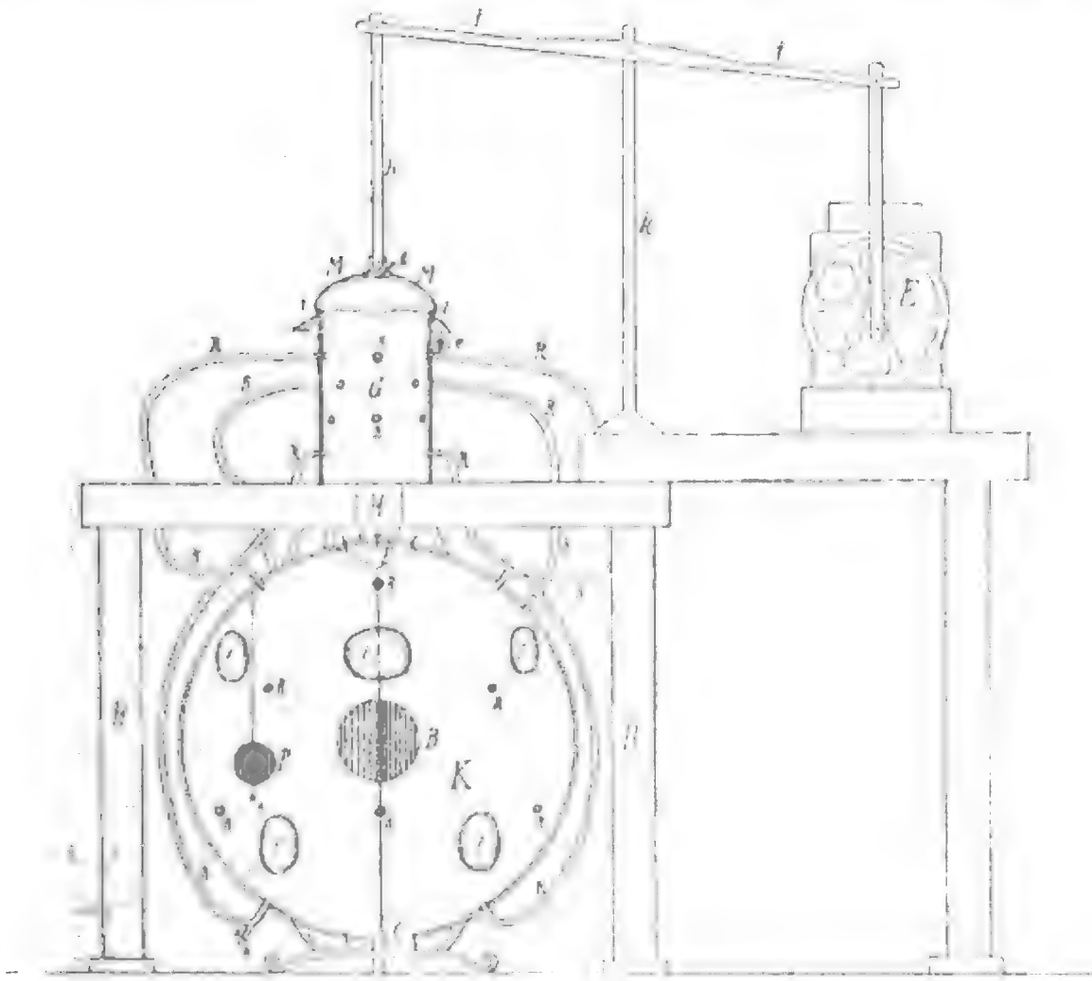
Beschreibung des Modells. Wir haben eine auf einem eisernen Dreifuss aufliegende Kupferkugel K von 62 cm Durchmesser, in welche, teils zu Beleuchtungs- teils zu Beobachtungszwecken, symmetrisch zwölf Glasfenster f (11 cm Durchmesser)

---

[1]) Vergl. A. Korn: Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik. I. Teil. Berlin, Ferdinand Dümmlers Verlag 1896.

Digitized by Google

in Messingfassungen wasserdicht eingeschraubt sind. In der Mitte der Kugel ist ein Kautschukballon B mit Hilfe eines starken Kupferdrahtes oben und unten befestigt. Eine zweite kleinere Kautschukkugel P ist an einem Seidenfaden so aufgehängt, dass ihre Gleichgewichtslage ziemlich in der Mitte zwischen dem Ballon B und der Wandung der Kupferkugel K sich befindet und ihr Centrum eine Kleinigkeit tiefer liegt als



das Centrum des Ballons B. Ein an der Kugel P befestigtes Gewichtchen a ist so gewählt, dass auf die Kugel P, bei dem später auszuhaltenden mittleren Drucke, in Folge der Schwerkraft ein minimaler Zug nach unten ausgeübt wird. In die Kugel führen von einem darüber gelegenen, auf einem Holzgerüst H ruhenden cylindrischen Messinggefäss G (35 × 24 cm) eine grössere Anzahl (20) etwa gleichlange Bleiröhren R (2 cm Durchmesser). Das Messinggefäss ist oben durch eine

Digitized by Google

doppelte Membran *M* von Kautschuk und Leder geschlossen, welche durch einen zusammenschraubbaren Messingreifen *l* von aussen wasserdicht an die Gefässwand angepresst wird. Mit Hilfe eines Elektromotors *E* und eines stählernen Balanciers *i*, welcher auf einer gusseisernen Stütze *k* ruht, und dessen Arm *h* durch ein Charnier mit der Membran *M* verbunden ist, kann die Membran *M* abwechselnd in das Gefäss *G* hineingedrückt, bezw. herausgezogen werden.

Die Kupferkugel *K* und das Messinggefäss *G* werden bei höchster Lage der Membran *M* vollständig mit Wasser gefüllt; die Füllung geht in praktischer Weise so vor sich, dass man zuerst das obere Fenster *F* der Kugel *K* herausschraubt und durch dasselbe solange Wasser einströmen lässt, bis dieselbe nahezu gefüllt ist. Dann schraubt man das Fenster wieder zu und füllt mit Hilfe einer durch einen Hahn verschliessbaren Ansatzröhre *e* des Messinggefässes *G* weiter, bis das Herausströmen des Wassers aus einer mit einer Schraube verschliessbaren Oeffnung *c* des Fensters *F* die vollständige Füllung der Kugel *K* und ihr Freisein von grösseren Luftblasen anzeigt. Nunmehr wird auch die kleine Schraube *c* geschlossen und die Füllung des Messinggefässes mit Hilfe der Ansatzröhre *e* vollendet, bis durch eine kleine Oeffnung *g* im obersten Teile der Membran *M* das Wasser herausströmt und nach Schliessen derselben mit einer Schraube eine geringe Spannung der Membran vorhanden ist. Zur eventuellen Entleerung der Kugel *K* ist in dem unteren Teile derselben ein Abflusshahn *b* angebracht.[1])

Der elementare Versuch. Wenn der Elektromotor in Thätigkeit tritt, so wird durch das Auf- und Niedergehen der Membran *M* das Wasser aus dem Messinggefäss *G* in die Kugel *K* gepresst, resp. aus derselben zurückgesogen. Bei der

---

[1]) Die Kupferkugel wurde von Jak. Allendörfer, Kupferdruckerei in München gefertigt, der Elektromotor war ein Motor der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft für 50 Volt mit einer halben Pferdekraft, die übrigen Teile des Apparates wurden von dem Mechaniker des Physikalischen Institutes hier, Herrn Magnussen, angefertigt.

Digitized by Google

symmetrischen Verteilung der Zuleitungsröhren R kann man also in der That sagen, dass an der Oberfläche der Kupferkugel K ein periodischer Druck herrscht, der bei der Inkompressibilität des Wassers die Kautschukkugeln B und P zwingt, Pulsationen von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Phase auszuführen.

Man beobachtet nun, dass die Kugel P an den grösseren Kautschukballon B thatsächlich angezogen wird, ähnlich wie wir dies in der Natur zwischen zwei die Eigenschaft der Gravitation zeigenden Körpern (etwa der Sonne und einem Planeten) anzunehmen haben.[1])

---

[1]) Der Versuch kann undeutlich werden, wenn man die beiden Kugeln B und P zu oft zu raschen Pulsationen unterwirft; es zeigt sich nämlich, dass nach einiger Zeit die beiden Kautschukkugeln gewissermassen müde werden und den raschen Pulsationen nicht mehr gleichmässig folgen. Wenn man den Apparat einen Tag oder länger ausser Thätigkeit setzt, so gewinnen die Kugeln ihre Elastizität wieder und der Versuch gelingt wie anfangs.

Digitized by Google

Ueber einige neue oder seltene Reptilien und Frösche der zoologischen Sammlung des Staates in München.

Von Dr. **Franz Werner.**

(*Eingelaufen 6. März.*)

Während meines 14tägigen Aufenthaltes in München, der der Neubestimmung und Neuaufstellung der dortigen herpetologischen Sammlung des Staates gewidmet war, kamen mir unter den reichen Kriechthierschätzen dieser Sammlung auch einige Arten in die Hände, welche ich nicht sogleich im System unterzubringen vermochte und die ich deshalb für eine eingehendere Untersuchung zurückstellte. Herr Prof. R. Hertwig hatte die grosse Liebenswürdigkeit, mir diese Arten nach Wien senden zu lassen, wofür ich ihm hiemit den herzlichsten Dank abstatte. Eine ziemliche Anzahl dieser Formen erwies sich bei der gründlichen Nachuntersuchung, die ich in Wien anstellte, als noch unbeschrieben, andere Arten, welche wenig bekannt oder ungenügend beschrieben sind, habe ich möglichst kenntlich zu beschreiben gesucht, von manchen Schlangen wenigstens die Schuppenformel mitgetheilt.

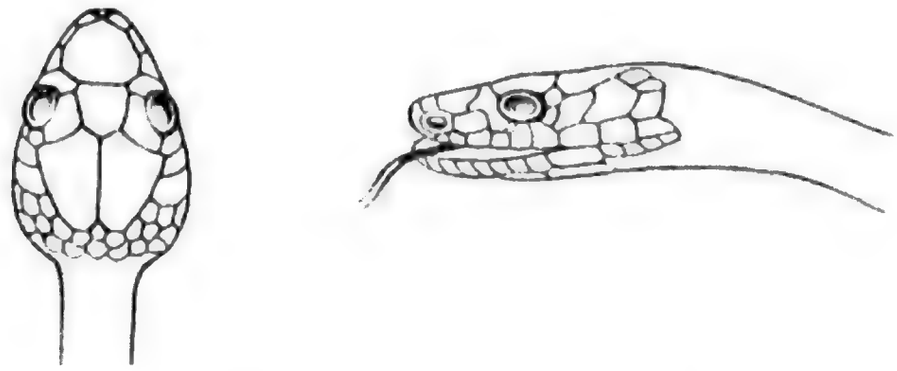
Diaphorolepis Wagneri Jan.

Dieser Name steht auf der Etiquette eines Glases, welches eine anscheinend ganz vergessene und verschollene Schlange enthält. Boulenger erwähnt in seinem grossen Schlangenkatalog weder diesen Namen, noch findet man in diesem Werke eine Schlange beschrieben, die mit der nachstehend beschriebenen zu identificiren wäre. Da ich aber nicht sicher bin, ob nicht

Digitized by Google

Jan doch wirklich in irgendeiner schwer zugänglichen Zeitschrift oder sonst einem selteneren Werke diese Schlange beschrieben hat, so gebe ich meine Beschreibung unter dem obenstehenden Namen.

Diaphorolepis Wagneri bildet ein neuweltliches Seitenstück zu der afrikanischen Calubrinen-Gattung Simocephalus Gthr., von der sie sich aber durch die grossen, halbkugelig vortretenden Augen mit runder Pupille, den seitlich zusammengedrückten Körper und das Fehlen eines ventralen Kieles sofort unterscheiden lässt.



Oberkieferzähne 25, lang, nach hinten an Länge zunehmend. Kopf etwa dem eines Dipsadomorphus ähnlich, Rostrale sechseckig, bedeutend breiter als hoch, von oben nur wenig sichtbar, Internasalia klein, bedeutend breiter als lang, Praefrontale unpaar, ebenso lang, aber doppelt so breit als das Frontale, welches kürzer als sein Abstand von der Schnauzenspitze und beträchtlich kürzer als die Parietalia ist. Das halbmondförmige Nasenloch liegt in einem ungetheilten Nasale, das Frenale ist rechteckig, das grosse Praeoculare bildet mit dem Frontale eine sehr kurze Sutur. Postocularia 2, Temporalia 1 + 1 + 2; auf der linken Seite ist ein kleines Suboculare unter dem Praeoculare vorhanden. Das 5. und 6. der 9 Supralabialia berührt das Auge. Nicht weniger als sieben Sublabialia stehen in Contact mit den vorderen Rinnenschildern, die ebenso lang sind als die hinteren, welche durch drei längliche Schildchen voneinander getrennt sind. Von den in 19 Reihen angeordneten Schuppen sind die der äussersten Reihe

Digitized by Google

jederseits glatt, die übrigen stark gekielt, die sechseckigen Schuppen der Mittelreihe besitzen zwei Längskiele. Schwanz lang. V. 193. A. 1, Sc. $^{98}/_{98}$ + 1. Das vorliegende Exemplar, ein ♀ ist 684 mm lang, wovon der Schwanz 200 mm hinwegnimmt. Die Oberseite ist dunkelgraugrün, die Unterseite gelblich, ebenso die Supralabialen. Die Subcaudalen sind graugrün mit weisslichen Rändern, die Ventralen mit Ausnahme der vordersten besitzen einen grossen grünlichen, unregelmässigen Fleck in der Mitte.

Heimat: Ecuador (M. Wagner Coll.).

Diese Schlange scheint dem von Peracca (Boll. Mus. Torino No. 266, 14. XII. 96. Vol. XI.) beschriebenen Synophis bicolor verwandt zu sein, welcher ein ganz ähnliches unpaares Praefrontale und auch sonst mancherlei Aehnlichkeit besitzt; doch unterscheiden sie die sechseckigen, zweikieligen medianen Dorsalschuppen die zahlreicheren und langen Oberkieferzähne u. a. jedenfalls mit Leichtigkeit von der Gattung Synophis.

Helicops pictiventris n. sp.

Unterscheidet sich von allen bisher bekannten Helicops-Arten durch die constant geringere Zahl von nur 17 Schuppenreihen. Von den nächstverwandten Arten H. carinicauda, modestus und leopardinus, welche in der Färbung theilweise überraschend ähnlich sind, ist die Art auch durch die geringere Anzahl der Ventralen unterscheidbar, die (ich konnte ausser dem Typ-Exemplare später noch eine grössere Anzahl von verschiedenalterigen Individuen der Art untersuchen) höchstens 124 beträgt, meist aber, wie beim Typ.-Exemplar (mit 112 Ventralen) merklich unter dieser Zahl bleibt (V. 112—124, Sc. 47—75). Augendurchmesser halb so gross als die Länge des Frontale. Rostrale von oben sichtbar, mit dem Internasale eine sehr kurze Sutur bildend. Frontale doppelt so lang als breit, mit parallelen Längsseiten, ebenso lang als sein Abstand von der Schnauzenspitze (Typ) oder länger, wenig kürzer als die Parietalia. Frenale trapezförmig, höher als lang, häufig fehlend; ein Praeoculare, zwei Postocularia. Supralabialia 7—8 (bei

Digitized by Google

den übrigen Exemplaren vorwiegend 8) 3. oder 4. das Auge berührend. 4 Sublabialia (seltener 3 oder 5) in Contact mit den vorderen Rinnenschildern, welche etwas länger (seltener ebenso lang) sind als die hinteren. Nackenschuppen glatt, mittlere Rückenschuppen und Schwanzschuppen (mehr weniger) stark, äusserste Schuppenreihe gar nicht gekielt. Das Typ-Exemplar, ein ♂ hat die Schuppenformel: Sq. 17, V. 112, A. $^1/_1$, Sc. $^{75}/_{75} + 1$ und eine Totallänge von 500 m (Schwanz 163), welche wohl der Maximallänge, welche die Art erreicht, nahe kommen dürfte, da ich unter allen kein einziges grösseres Exemplar finden konnte.

Oberseite dunkelgraubraun, mit einem heller braunen undeutlichen Längsstreifen auf der 5. und den anstossenden Hälften der 4. und 6. Schuppenreihe jederseits. Untere Hälfte der Oberlippenschilder und die ganze Unterseite bis zur Mitte der 2. Schuppenreihe jederseits hellgelb. Kehle mit einer schwarzen Querlinie. Eine schwarze breite Längsmittellinie vom 2. Ventrale bis zur Mitte (Ende der ersten Hälfte) des Schwanzes. Eine schmale Zickzack-Linie auf dem Seitenrande der Ventralen (unterem Rande der ersten Schuppenreihe). Dazwischen sind in der hinteren Rumpfhälfte entweder die Ventralen abwechselnd schwarz und gelblich gefärbt oder es ist abwechselnd eine linke und eine rechte Ventralenhälfte schwarz. Diese Färbung des Typ-Exemplares findet sich gerade nicht häufig, bei den anderen Exemplaren, die ich gesehen habe, sind bald nur die lateralen, bald nur der mediane Streifen allein erhalten, bald nur die Streifen, nicht aber auch die Querstreifung und Schachbrettzeichnung der Ventralen, manchmal wieder nur letztere allein, selten fehlt jede Ventralzeichnung. Das Typ-Exemplar der Münchener Sammlung stammt aus Brasilien (Porto Alegre), die anderen wurden mir ohne Fundortsangabe von dem naturhistorischen Institut „Linnaea" zur Bestimmung eingesandt, sind aber, wie aus den übrigen Schlangen hervorgeht, zweifellos auch aus Brasilien.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass diese Art in den Formenkreis von H. leopardinus gehört, doch ist sie durch das längere

Digitized by Google

Frontale und die Anzahl der Schuppenreihen einstweilen ohne Schwierigkeit von ersterer Art zu unterscheiden. Jedenfalls ist bei der Diagnose der Gattung die Angabe der Anzahl der Schuppenreihen auf 17—25 zu erweitern.

Natrix cinnamonea Wagl. Spix, Serp. Bras. p. 20 T. VI. 182—4).

Diese Schlange, welche von Boulenger (Cat. Snakes II. p. 72) mit Bedenken zu Herpetodryas sexcarinatus (Wagl.) gestellt wurde, ist identisch mit Phrynonax fasciatus (Ptrs), wenn das in München aufbewahrte Originalexemplar wirklich noch die von Wagler beschriebene Schlange ist, was aber, trotzdem dieser Forscher die Anzahl der Ventralen (159) und Subcaudalen (100) sehr verschieden von den von mir gefundenen Zahlen angiebt, doch höchst wahrscheinlich ist. Die Schuppenformel des von mir untersuchten Exemplares, dessen Färbung übrigens mit der von N. cinnamonea ganz gut übereinstimmt, ist:

Sq. 23, V. 191, A. 1, Sc. 126. — Das Frontale ist länger als sein Abstand von der Schnauzenspitze, ebenso lang als die Parietalen, mit dem Praeoculare in einem Punkte in Berührung. Supralabialia 9—8 (5. und 6., bezw. 4. und 5. das Auge berührend). Rechts ein kleines Suboculare unter dem Praeoculare. 7—8 Sublabialen in Berührung mit den vorderen Rinnenschildern. — Da die Wagler'sche Beschreibung ganz ungenügend ist, so hat natürlich trotz der Priorität derselben der Peters'sche Name den Vorzug.

Apostolepis nigriceps n. sp.

Schnauze stark vorspringend. Auge sehr klein. Rostrale wie bei A. dorbignyi. Frontale nahezu ebenso lang als breit, sonst wie bei dieser Art. Kein Praeoculare vorhanden, Praefrontale mit dem 2. Supralabiale in Contact. Ein Postoculare; das 4. bis 6. Supralabiale in Contact mit dem Parietale. Symphysiale durch das erste Sublabialenpaar von dem ersten Kinnschilderpaar getrennt, mit dem im Ganzen 4 Sublabialen (das 4. das grösste) in Berührung stehen. Sq. 15, V. 254, A. $^1/_1$, Sc. 19.

Digitized by Google

Rücken roth, ($^1/_2 + 5 + {}^1/_2$ Schuppenreihen), Seiten und Bauch schwarz, Schuppenränder weiss. Kopf oben schwarz, welche Färbung sich auch über die Mundwinkel zu den Halsseiten herab erstreckt. Oberlippe, Kehle und vorderster Abschnitt des Bauches roth.

488 mm lang, Schwanz 25. Fundort: Sao Paulo Brasilien.

Elaps hertwigii n. sp.

Auge halb so gross als sein Abstand vom Mundrand. Frontale fast zweimal so lang als breit. Parietalia bedeutend länger als ihr Abstand von den Internasalen. Praeoculare mässig gross, vom hinteren Nasale getrennt, wie bei E. gravenhorstii Jan, Praefrontalia daher mit dem 3. Supralabiale in Berührung. Zwei Postocularia, 1 + 1 Temporale. 7 Supralabialia, das 1. und 5. in Berührung mit dem Auge. V. 160, A. $^1/_1$, Sc. $^{30}/_{30} + 1$.

Schnauze bis zum Vorderrand des Frontale, Supraoculare und 5. Supralabiale schwarz, Kopf bis zum Hinterrand der Parietalia gelb. 48 + 3 schwarze Ringe, die auf der Ventralseite ebenso breit sind als die hellen dazwischen (3 Ventralen); auf der Dorsalseite jedoch breiter, 4—5 Schuppenreihen, während die hellen (dunkel gefleckten) nur zwei Schuppenreihen breit sind.

Totallänge 67 cm. Heimath: Mittelamerika (M. Wagner coll.).

Schuppenformeln und kurze Bemerkungen über einige Schlangen der zoolog. Sammlung in München.

Tropidonotus rigidus Say.

Sq. 19. V. 136. A. $^1/_1$. Sc. 52.

Internasalia so breit als lang und so lang als Praefrontalia.

Temporalia 1 + 1; Supralabialia 7—8 (3 u. 4., bezw. 4 u. 5. das Auge berührend) 745 mm lang, Schwanz 140.

Fundort: Florida.

Digitized by Google

Lycophidium laterale Hall.

Sq. 17. V. 188. Sc. 35. — Kamerun.

Ganz schwarz bis auf die von Boulenger beschriebene Kopfzeichnung.

Lycophidium semicinctum D. B.

Sq. 17. V. 211. Sc. 38. — Kamerun.

6 Supralabiale in Contact mit Parietale. Schwarz; Schuppen mit schmalen weisslichen Rändern.

Lycophidium fasciatum (Gthr.)

Sq. 17. V. 181. Sc. 44. — Kamerun.

Dunkelbraun mit schwarzen Querbändern.

Hormonotus modestus (D. B.)

Sq. 15. V. 234. Sc. 83. — Kamerun.

Frontale $1^1/_2$ mal so lang als breit; 2 Postocularia; 3 Supralabialia das Auge berührend. Vier Unterlippenschilder in Contact mit den langen vorderen Rinnenschilder, welche die ebenfalls langgestreckten, etwas kürzeren hinteren wie ein Keil bis zur Mitte auseinandertreiben.

Coluber laetus B. G.

Sq. 27. V. 212. A. $^1/_1$. Sc. 68.

(Das Exemplar meiner Sammlung besitzt Sq. 27. V. 243. A. $^1/_1$. Sc. 87.) Fundort: Nordamerica.

Atractus guentheri (Wuch.) var.

Ein kleines Exemplar (183 + 26 = 209 mm lang) dieser Art, wie ich wohl ohne Bedenken annehmen darf, da sich ausser der grösseren Zahl von Ventralen (163) und Subcaudalen (41) sowie der verschiedenen Zeichnung kein wesentlicher Unterschied von der Beschreibung Boulengers finden lässt.

Temp. 1 + 2; 3 Unterlippensch. in Contact mit den Kinnschildern. Der Kopf ist deutlicher vom Rumpfe abgesetzt als bei dem Typus. Oberseite hellbraun mit zackigen Querbinden von dunkelbrauner Farbe und mit helleren Rändern; auf dem Rest der braunen Grundfarbe sind beiderseits vor der Rückenmitte einige Schuppen dunkel gerändert, so dass kurze Längs-

Digitized by Google

striche entstehen. Kopf oben mit dunklen Punkten und Schnörkeln. Fundort: Ecuador.

Atractus torquatus (D. B.)

V. 143. A. 1. Sc. 40.

Atractus occipitoalbus (Jan.)

Das Münchener Exemplar ist zweifellos das Originalexemplar Jan's, da es in jeder Beziehung ganz genau, bis auf Dimensionen und Schuppenformel mit der Originalbeschreibung übereinstimmt.

Atractus quadrivirgatus (Jan.)

V. 139. A. 1/1. Sc. 45.

Rostrale kaum von oben sichtbar. Frontale ebenso lang als breit, so lang als sein Abstand von den Internasalen. Internasalea klein. Fundort: Guatemala.

Atractus favae (Filippi).

Rostrale gut von oben sichtbar. Praefrontalia so breit als lang. Praeoculare vorhanden. V. 185. A. 1. Sc. 64.

Fundort: Brasilien. (?)

Geophis chalybaeus (Wagl.)

V. 150. A. 1. Sc. 35 (♀, 366 + 51 mm lang.)

Fundort: Mexico.

Oxyrhopus doliatus D. B.

V. 195. A. 1. Sc. 86.

24 + 8 auf der Bauchseite unterbrochene Ringe, die etwa ebenso breit sind als die hellen Zwischenräume.

Fundort: Guatemala.

Polemon barthii Jan.

Das Münchener Exemplar ist vermuthlich das Original zu Jan's Beschreibung. V. 226. Sc. 16. Totallänge 505 mm. Schwanz 24 mm. — Guinea.

Lygosoma (Hinulia) compressicaudum n. sp.

Ohröffnung ohne vorspringende Schüppchen. Vier Supraocularia. Frontale mit Frontonasale und dieses mit Rostrale

Digitized by Google

Sutur bildend. Frontoparietalia und Interparietale deutlich. Ein einziges vorderes Frenale. Frontale in Contact mit den zwei ersten Supraocularen. 50 Schuppen um die Rumpfmitte. Entfernung von Schnauzenspitze und Vorderbein anderthalbmal in der von Vorder- und Hinterbein enthalten. Schwanz deutlich seitlich zusammengedrückt, wie bei Egernia whitii, aber noch stärker.

Schnauze lang, 1½ mal so lang als das Auge, dessen Durchmesser seiner Entfernung vom Nasenloch gleich kommt. Zügelgegend nahezu vertical. Nasenloch in einem einzigen Nasale, kein Supranasale. Frontonasale etwas breiter als lang. Frontale länger als Interparietale und Frontoparietalia zusammen. Supraciliaria 4—6. Parietalia bilden eine Sutur hinter dem Interparietale. 5. Oberlippenschild am grössten, unter dem Auge. Ein Paar Nuchalia. Ohröffnung halb so breit als das Auge. Hinterbein erreicht, nach vorn an den Körper angelegt, den Ellenbogen des nach hinten angelegten Vorderbeines. Zehen kurz, 23—25 Lamellen unter der 4. Zehe. Färbung der Oberseite einfarbig graubraun, unten hellbraun.

Dieses ist eine der grössten Lygosoma-Arten, denn sie erreicht 13 cm Kopfrumpf- und 13—20 cm Schwanzlänge; 2½ cm hinter dem After ist der Schwanz 13 mm hoch und 5 mm breit.

Heimath: Australien.

Bufo polycerus n. sp.

Diese schöne Art ist den afrikanischen Arten B. regularis Rss. und tuberosus Gthr. nahe verwandt, von beiden aber durch die sehr kurzen Hinterbeine, die mit dem Tarso-Metatarsalgelenk nur die Schulter erreichen (♀) und durch die geringe Länge des ersten Fingers, welche den zweiten zwar merklich, aber immerhin nur wenig überragt, leicht zu unterscheiden.

Die Schnauze ist nicht länger als der Augendurchmesser, vorn vertical abfallend. Der Interorbitalraum wenig vertieft, etwa ebenso breit als ein oberes Augenlid, Tympanum sehr

Digitized by Google

deutlich, von $^2/_3$ Augendurchmesser. Zehen und Finger mit einfachen, vorspringenden Gelenkhöckern; zwei mässig grosse Metatarsalhöcker; von der 4. Zehe vier, von der 3. und 5. zwei Phalangen frei von der Schwimmhaut. Tarsalfalte vorhanden. Parotoiden länglich-eiförmig, eine Augenlänge hinter und vollkommen über dem Tympanum, deutlich. Die ganze Oberseite mit spitzigen Warzen besetzt; besonders dicht auf den oberen Augenlidern, aber auch auf den Parotoiden und an den Rumpfseiten noch besonders stark entwickelt. Unterseite fein runzelig, mit zahlreichen flachen Warzen auf dem Bauche. Ein grosser äusserer und ein kleiner innerer Metacarpalhöcker.

Oben graubraun mit gelber scharf ausgeprägter Spinallinie und drei Paaren grösserer, symmetrischer, dunkler Flecken; von diesen ein Paar, ein V bildend, zwischen den Augen, das zweite zwischen den Parotoiden, das dritte in der Sacralgegend. Oberlippe mit drei grösseren dunklen Flecken jederseits, Gliedmassen deutlich dunkel gebändert. Seiten des Körpers dunkelbraun marmorirt; ausserdem zahlreiche dunkle Punkte und Schnörkel auf der ganzen Oberseite. Unterseite hellbräunlich, Unterkieferrand dunkel gefleckt.

Totallänge 75 mm.

Habitat: Kamerun.

Bufo laevissimus n. sp.

Diese stattliche Krötenart, von welcher mir zwei Junge und ein erwachsenes ♀ vorlagen, ist durch die vollkommen glatte, nur am Rücken und auf den Oberschenkeln quergerunzelte, aber gänzlich warzenlose Haut der Oberseite ausgezeichnet. Von dem gleichfalls mit glatter Oberseite vorkommenden Bufo superciliosus Blngr. (Proc. zool. Soc. London 1887 p. 565) unterscheidet sich diese jedenfalls nahe verwandte Art durch die kurzen, mit dem Tarso-Metatarsalgelenk nur die Schulter erreichenden Hinterbeine, durch die mächtig entwickelten Parotoiden, die um ein Drittel länger sind, als ihr Abstand vom Nasenloch und durch das vollständige Fehlen einer Dorsolateralfalte. Eine Art von Horn über dem Auge ist auch bei

Digitized by Google

dieser Art in der Anlage vorhanden, indem das obere Augenlid einen mehr oder weniger deutlichen dreieckigen Zipfel ausläuft. Auffallend ist die Länge der Querfortsätze der Rückenwirbel, wodurch eine Art breiter Rückenplatte hergestellt wird; doch ist keinerlei Verknöcherung der darüberliegenden Haut oder ein Anwachsen derselben an diese Rückenplatte zu bemerken.

Schnauze vorn vertical, seitlich ziemlich steil nach aussen abfallend, mit namentlich bei den Jungen deutlicherer, etwas geschweifter Schnauzenkante. Interorbitalraum vollkommen glatt, wenig vertieft, etwa ebenso breit wie eines der etwas gerunzelten oberen Augenlider. Tympanum nicht sehr deutlich, von mehr als halbem Augendurchmesser. Parotoiden, wie schon erwähnt, enorm entwickelt, fast wie bei B. marinus, nach hinten divergirend, schon vorn um ihre doppelte Breite von einander entfernt, mit tiefen Poren. Erster Finger beträchtlich länger als der zweite, der von gleicher Länge wie der vierte ist; der dritte Finger ist der längste. Ein kleinerer innerer und ein grösserer äusserer Metacarpaltuberkel, beide flach. Zehen ziemlich kurz, mit kurzen, aber immerhin deutlichen Schwimmhäuten. Ein mässig grosser innerer und ein schwach entwickelter äusserer Metatarsalhöcker. Gelenkhöcker auf der Unterseite der Finger und Zehen deutlich, durchgehends einfach. Keine Tarsalfalte. Bauch und Unterseite der Oberschenkel mit grösseren flachen, linsenförmigen Warzen besetzt.

Oberseite dunkel (röthlich) braun, bei den Jungen hellbraun; Tibia, Tarsus und Fuss, bei dem erwachsenen Exemplar nur Tarsus und Fuss, mit schmäleren weissen und breiteren dunklen Querbinden. Kopf- und Rumpfseiten bei den Jungen dunkler braun als die Oberseite. Unterseite hellbräunlich, bei den Jungen die Kehle weiss gefleckt.

Totallänge des ♀ 104 mm; Entfernung der beiden hinteren Parotoidenenden voneinander (grösste Breite des Thieres) 54 mm; 1. Finger, vom Tuberkel aus gemessen: 13 mm; 4. Zehe, ebenso gemessen: 31 mm. Kopfbreite zwischen den Mundwinkeln: 40 mm.

Habitat: Kamerun.

Digitized by Google

Westafrika beherbergt demnach folgende 8 Bufo-Arten:

1. Bufo regularis Rss. (Blngr. Cat. Batr. Sal. p. 298.)
2. „ funereus Barb. (ibid. p. 299 u. 475.) Benguela, Fernando Po.
3. „ tuberosus Gthr. (ibid. p. 304.) Gaboon, Fernando Po.
4. „ buchneri Ptrs. (Sitz.-Ber. Ges. naturf. Fr. 1882 p. 147.) Lunda, W.-Afr.
5. „ superciliosus Blngr. (P. Z. S. London 1883 p. 139.) Rio del Rey, Kamerun.
6. „ dombensis Barb. (Journ. Sci. Lisboa 1895 p. 50.) Dombe, Benguela.
7. „ polycerus Werner, Kamerun.
8. „ laevissimus Werner, Kamerun.

Diese Arten sind folgendermassen unterscheidbar:

1. Erster Finger deutlich kürzer als der zweite, Interorbitalraum anderthalbmal so breit als ein oberes Augenlid B. buchneri
   Erster Finger wenigstens etwas länger als der zweite 2
2. Subarticularhöcker wenigstens theilweise doppelt; Tympanum sehr deutlich, von weniger als halbem Augendurchmesser; Interorbitalraum etwas schmäler als ein oberes Augenlid . . . . . B. dombensis
   Subarticularhöcker durchwegs einfach; Interorbitalraum wenigstens ebenso breit als ein oberes Augenlid . 3
3. Eine dorsolaterale drüsige Längsfalte, die Fortsetzung der Parotoide bildend; Tympanum klein und sehr undeutlich. Interorbitalraum etwas schmäler als eines der oberen Augenlider, welche einen winklig vorspringenden, hornartigen Aussenrand besitzen . . . . B. superciliosus
   Keine Dorsolateralfalte; Tympanum von wenigstens halbem Augendurchmesser 4
4. Keine Tarsalfalte 5
   Tarsalfalte vorhanden 7
5. Oberseite glatt . . . . . Bufo laevissimus
   Oberseite mehr oder weniger stark warzig . . . 6

Digitized by Google

6. Erster Finger viel länger als der zweite B. tuberosus
   Erster Finger wenig länger als der zweite B. funereus
7. Erster Finger viel länger als der zweite; Tarsometatarsalgelenk reicht schon beim ♀ wenigstens bis zum Tympanum. B. regularis
   Erster Finger wenig länger als der zweite. Tarsometatarsalgelenk reicht beim ♀ nur bis zur Schulter B. polycerus.

Bemerkungen über einige Hyla-Arten des Zoologischen Museums in München.

1. Hyla phaeota Cope.

Von dieser stattlichen Art befinden sich zwei ♂ von Panama in der Sammluug, die nicht unbedeutend vom Typus abweichen. Ich gebe nachfolgend eine möglichst genaue Beschreibung derselben.

Zunge kreisförmig, schwach gekerbt und hinten frei. Gaumenzähne in einer geraden, unterbrochenen Reihe in der Mitte zwischen den Choanen. Kopf ebenso breit als lang; Schnauze $1^2/_3$ so lang als Augendurchmesser, dieser ebenso lang als der Abstand von Auge und Nasenloch. Schnauzenkante nahezu gerade. Zügelgegend concav. Interorbitalraum etwas breiter als eines der oberen Augenlider. Tympanum sehr deutlich, sein Durchmesser gleich $^3/_4$ des Augendurchmessers. Finger mit $^1/_3$, Zehen mit nahezu ganzen Schwimmhäuten, Die Scheiben derselben sind erheblich kleiner als das Tympanum. Eine deutliche Falte auf der Innenseite des Tarsus. Hinterbein reicht mit dem Tibiotarsalgelenk über die Schnauenspitze hinaus. Eine starke Falte über dem Tympanum. Oben glatt, unten granulirt. Länge des grösseren Exemplars 60 cm.

Trotz der längeren Schwimmhäute glaube ich diese beiden Exemplare zu H. phaeota Cope stellen zu solleu. Ein Exemplar dieser Art in der Schausammlung des Wiener Hofmuseums gleicht den beiden, wenigstens soweit man ohne genauere Untersuchung feststellen kann, ausserordentlich. Von der nahe-

Digitized by Google

stehenden H. bandinii DB. ist die Art durch den unpaaren, grossen Kehlsack des ♂, die längere Schnauze und die längeren Hinterbeine zu unterscheiden.

2. Hyla cadaverina Cope.

Von dieser Art liegt ein ♀ von 44 mm Länge in der Sammlung. Zu der Beschreibung Cope's wäre Folgendes hinzuzusetzen: Die Gaumenzähne stehen in zwei transversen Reihen zwischen den Hinterrändern der Choanen, aber nicht über deren Verbindungslinie hinausreichend. Kopf und Rücken mit kleinen spitzigen Höckerchen. Saugscheiben etwas kleiner als das Tympanum. Tibiotarsalgelenk erreicht das Nasenloch. Eine starke Falte über dem Tympanum. Oberseite trüb olivengrün.

3. Hyla auraria Ptrs.

Das Exemplar des Münchener Museums stimmt in den meisten Beziehungen mit der Beschreibung überein; doch ist der grösste Tympanumdurchmesser nur halb so gross als der des Auges und die Schnauze etwas länger ($1^1/_3$ Augendurchmesser). Saugscheiben ebenso gross als das Tympanum.

4. Hyla bipunctata Spix.

Diese Art ist durch die sehr kurze, abgerundete Schnauze mit nicht concaver Zügelregion sehr auffallend. Der Kopf ist im Vergleich mit dem übrigen Körper sehr kurz und seine Breite ist die grösste des ganzen Thieres.

5. Hyla jerviensis DB.

Ein ♀ von 40 mm Länge in der Münchener Sammlung. Zunge elliptisch, hinten deutlich eingekerbt. Gaumenzähne in zwei schiefen Gruppen auf der Verbindungslinie der Choanen-Vorderränder, über diese nicht hinausragend. Kopf ebenso breit als lang. Zügelgegend concav. Augendurchmesser grösser als Abstand des Auges vom Nasenloch. Saugscheiben der Finger halb so gross als das Tympanum, die der Zehen kleiner. Das Tibiotarsalgelenk erreicht die Schnauzenspitze. Diese Unterschiede dürften wohl genügen, um die grosse Hyla

Digitized by Google

coerula von der vorstehenden Art in allen Fällen auseinanderzuhalten.

6. Hyla strigillata Spix.

Diese Art ist durch ihre lange Schnauze, an welcher die Nasenlöcher sehr der Spitze genähert sind und welche sehr vorstehend, nach unten schief abgestutzt, mit sehr schiefer concaver Zügelgegend versehen ist, sehr ausgezeichnet und dadurch von der bei oberflächlicher Untersuchung sehr ähnlichen H. rubra Daud. leicht zu unterscheiden, bei welcher die Schnauze zwar ebenfalls lang, aber nach unten abgerundet ist und bei welcher die Nasenlöcher von der Schnauzenspitze weiter entfernt sind. Auch ist die Zunge weit stärker ausgerandet als bei rubra. Desgleichen sind die Hinterbeine länger als bei dieser Art.

An dem besterhaltenen Exemplare der Spix'schen Sammlung von Hyla-Arten, welche leider zum grössten Theile sich in sehr schlechter Verfassung befinden, namentlich was die kleineren Arten anbelangt, kann ich noch Folgendes bemerken:

Die Schnauze ist $1^1/_2$—$1^3/_4$ (bei H. rubra $1^1/_2$—2) mal so lang als der Augendurchmesser, breit, flach, oben sogar etwas vertieft in der Mitte, vorn, von oben gesehen, gerade abgestutzt (bei H. rubra abgerundet).

Hyla pardalis Spix.

Wie ich aus dem Vergleiche der zwei Exemplare des Münchener Museums mit zweien von H. maxima Laur. (eines ebendaher, eines aus meiner Sammlung) ersehe, sind beide Arten äusserst nahe verwandt, doch immerhin durch einige Merkmale scharf auseinanderzuhalten. Der wichtigste Unterschied scheint mir danach der zu sein, dass die Oberarm-Falte bei H. pardalis keine Einkerbungen zeigt, während dies bei H. maxima deutlich der Fall ist. Ferner ist die Tarsalfalte bei H. maxima sehr stark, bei H. pardalis schwach oder gar nicht entwickelt; der Fersenanhang ist bei H. maxima ein ansehnlicher dreieckiger Lappen, bei pardalis ein kleines mit der Pincette gerade fassbares Läppchen, welches sogar fehlen kann.

Digitized by Google

Das Tibiotarsalgelenk reicht über die Schnauzenspitze hinaus bei H. pardalis, erreicht die Schnauzenspitze oder das Nasenloch bei maxima. Der Interorbitalraum ist doppelt so breit als ein oberes Augenlid bei H. maxima, ebenso breit oder $1^1/_2$ mal so breit als ein solches bei H. pardalis. Die Schwimmhäute der Finger sind fast ganz bei maxima, ungefähr halb bei pardalis.

Was nun die übrigen Unterschiede anbelangt, welche ich bei den vier Individuen bemerken konnte, so sind sie von keiner systematischen Bedeutung, da sie meist ein Individuum der einen Art von dem zweiten desselben und den beiden der anderen Art trennten, aber nicht die beiden Arten unterscheiden liessen. Ich benenne die vier Thiere: P. I. II; (pardalis) M. I. II (maxima).

Die Zunge ist:

am Hinterrande frei bei P. I. M. I. II.
ebenso mit Ausnahme des ganz angewachsenen Mittelheils bei P. II.
ganzrandig bei P. I. II. M. II.
etwas gekerbt bei M. I.

Die Gaumenzähne liegen gerade zwischen den Choanen bei P. II. M. II., ragen nach vorn nicht über eine, die Mitte der Choanen verbindende Linie hinaus bei P. I. M. I.

Kopf: bei allen vieren ebenso breit als lang.

Schnauzenlänge bei M. I. = 2 Augendurchmesser, sonst = $1^1/_2$ Augendurchmesser.

Augendurchmesser bei M. I. nicht ganz der Distanz vom Nasenloch und vorderem Augenrand gleich; bei den übrigen vollkommen gleich.

Zügelgegend: bei allen vieren schief, concav.

Stirn: flach bei M. I., etwas concav bei den übrigen.

Tympanum: nahezu gleich dem Augendurchmesser bei M. I. II. P. I., gleich $^2/_3$ Augendurchmesser bei P. II.

Digitized by Google

Pollexrudiment: sehr prominent bei P. I., weniger bei M. I. II. sehr wenig bei P. II.

Zehen mit ganzen Schwimmhäuten bei M. I.; nahezu ganzen bei den übrigen.

Saugscheiben der Finger gleich $^2/_3$ Tympanum bei P. I., sonst gleich $^1/_2$ Tympanum.

Oberseite (Rücken) warzig bei P. I., glatt bei P. II. mit mehr oder weniger deutlichen Pusteln bei M. I. II.

Hyla appendiculata Blngr.

Fast ebenso nahe als Hyla pardalis mit H. maxima scheint die vorstehende Art mit H. corticalis Burm. verwandt. Mir lagen drei sehr verschieden aussehende Exemplare vor, von denen zwei der Münchener Sammlung, eines meiner eigenen angehört. Trotz mannigfaltiger Differenzen dieser drei Thiere bin ich doch der Ueberzeugung, dass sie alle drei obgenannter Art angehören, welche sich von H. corticalis namentlich durch das Fehlen der gezähnelten Falte am Vorderarm und Tarsus, sowie durch die Lage der Gaumenzähne zwischen den Choanen unterscheiden lässt. Im Uebrigen unterscheiden sich die drei Exemplare wie folgt.

	I.	II.	III.
Zunge	elliptisch, gekerbt	kreisrund, ganz	herzförmig, gekerbt
Gaumenzähne	über die Verbindungslinie der Mitte der Choanen hinausreichend	über die Verbindungslinie der Mitte der Choanen nicht hinausreichend	die Verbindungslinie die Mitte der Choanen nicht ganz erreichend
Kopf	breiter als lang	ebenso breit als lang	ebenso breit als lang
Schnauzenlänge	$1^1/_3$ Augendurchm.	$1^1/_2$ Augendurchm.	$1^1/_3$ Augendurchm.
Augendurchmesser	gleich der Distanz von Nasenloch und vorderem Augenrand	etwas grösser als die Distanz von Nasenloch und vorderem Augenrand	
Zügelgegend	schief, etwas concav	schief, etwas concav	schief, nicht concav

Digitized by Google

	I.	II.	III.
Stirn	flach	vertieft	etwas vertieft
Interorbitalraum	fast gleich	gleich der doppelten Breite eines oberen Augenlides	
Tympanum	2/3 Augendurchm.	2/3 Augendurchm.	fast gleich dem Augendurchm.
Schwimmhaut der äusseren Finger	halb	fast ganz	zwei Drittel
Schwimmhaut der inneren Finger	ein Viertel	ein Viertel	rudimentär
Schwimmhaut der Zehen	ganz	ganz	fast ganz
Saugscheiben der Finger	gleich 1/3 Tymp.	2/3 Tymp.	1/2 Tymp.
Tibiotarsalgelenk reicht	zwischen Nasenloch und Auge	zum Vorderrand des Auges	über die Schnauze hinaus
Tarsalfalte	vorhanden	vorhanden	kaum merkbar
Fersenanhang	spitz, lang, dreieckig	ziemlich kurz, dreieckig	ziemlich lang, dreieckig
Tympanum	glatt	granulirt	theilweise glatt, theilw. granulirt
Haut der Oberseite	fein granulirt	fein granulirt	fein granulirt

Färbung und Zeichnung sehr variabel, nur bei meinem Exemplar (III) typisch.

Hyla albomarginata Spix.

Bei dem besterhaltenen Exemplar der Sammlung finde ich die Saugscheiben bedeutend kleiner als das Tympanum und den Interorbitalraum doppelt so breit als ein oberes Augenlid.

Hyla granosa Blngr.

Zehen nahezu mit ganzen Schwimmhäuten. Saugscheiben der Finger mehr als halb so gross als das Tympanum. Tibiotarsalgelenk erreicht den Vorderrand des Auges.

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 1. Mai 1897.

1. Herr Eugen v. Lommel legt eine Mittheilung des Herrn Professor Dr. Leo Graetz: „Ein elektrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln" vor.

2. Herr Ferdinand Lindemann legt eine Arbeit des auswärtigen Mitgliedes Professor Dr. Aurel Voss in Würzburg: „Zur Theorie der infinitesimalen Biegungstransformationen einer Fläche" vor.

3) Herr Alfred Pringsheim macht eine Mittheilung: „Ueber die Du Bois-Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen."

Digitized by Google

Ein elektrochemisches Verfahren, um Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln.

Von **L. Graetz.**

(*Eingelaufen 1. Mai.*)

Die Aufgabe, die positiven und die negativen Stromtheile von Wechselströmen zu trennen, und sie entweder getrennt in verschiedenen Leitungen oder gemeinschaftlich in derselben Leitung nach gleicher Richtung zu senden, ist bei wissenschaftlichen Messungen immer dann von Wichtigkeit, wenn man statt der Elektrodynamometer die weit empfindlicheren Galvanometer anwenden will oder muss, z. B. bei einigen Methoden zur Bestimmung der kritischen Geschwindigkeit und bei gewissen Methoden zur Messung des Selbstpotentials. Gelöst wird diese Aufgabe bisher durch die Anwendung von Disjunktoren, bei denen aber bekanntlich eine Hauptschwierigkeit in der Erhaltung constanter Drehungsgeschwindigkeit liegt. Im Grunde dieselbe Methode, nämlich die Benutzung von rotirenden Commutatoren, wird auch in der Elektrotechnik zuweilen angewendet. Gewöhnlich aber bewirkt man dort die Verwandlung von Wechselstrom in Gleichstrom auf ganz indirektem Wege und nur mit erheblichen Verlusten an Energie, indem man einen Wechselstrommotor und eine Gleichstromdynamo auf dieselbe Axe setzt, von dem Wechselstrom den Motor und damit die Dynamomaschine treiben lässt, und von der letzteren den Gleichstrom abnimmt. Der erzeugte Gleichstrom besteht dabei in keiner Weise aus den Theilen des Wechselstroms, sondern ist ein ganz anderer, mit beliebig anderen Spannungs- und Stromverhältnissen.

Digitized by Google

Auf eine wesentlich andere und zwar einfachere und sichere Art lassen sich aber diese Aufgaben lösen durch Zuhilfenahme der Polarisationseigenschaften des Aluminiums. Es ist schon lange bekannt,[1]) dass eine elektrolytische Zelle, in welcher die eine Elektrode aus Aluminium besteht, eine ausserordentlich starke Schwächung eines hindurch geschickten Stromes bewirkt, wenn die Aluminiumelektrode die Anode ist und an ihr Sauerstoff auftritt, während sie keine erheblichen Stromänderungen verursacht, wenn die Aluminiumelektrode die Kathode ist. Die Ursache dieser Erscheinung wurde auf die Bildung eines sehr schlecht leitenden Oxyds an der Anode geschoben,[2]) also auf einen Uebergangswiderstand, während wahrscheinlicher eine Art von Condensatorwirkung zwischen der Elektrode und der Flüssigkeit, also eine Art von dielektrischer Polarisation, zum Unterschied von der gewöhnlichen elektrolytischen Polarisation, die richtigere Erklärung bietet.[3]) Die Begründung dieser letzteren Ansicht liegt darin, dass eine jede solche Zelle einer ganz bestimmten elektromotorischen Kraft das Gleichgewicht hält, nämlich, nach meinen Messungen, von 22 Volt, so dass Ströme von geringerer Spannung überhaupt nicht durch die Zelle gehen, Ströme von grösserer Spannung aber so, als ob diese Spannung um den Betrag von 22 Volt vermindert wäre. Wollte man einen Uebergangswiderstand annehmen, so müsste dieser der vorhandenen Stromstärke umgekehrt proportional sein, was nicht wohl interpretirbar ist. Gegen die Annahme einer gewöhnlichen elektrolytischen Polarisation spricht, abgesehen von der aussergewöhnlichen Grösse derselben, der Umstand, dass auch unmittelbar nach der Unterbrechung des ladenden Stromes eine Polarisation von annähernd diesem hohen Betrag nie zu finden ist. Die beobachtbaren bleibenden Polarisationen halten sich um den Betrag von 1 Volt herum. Eine Condensatorwirkung dagegen würde sowohl die Grösse der vorhandenen Gegenkraft, wie das Aufhören derselben nach Stromöffnung erklären.

---

[1]) Buff Lieb. Ann. 102 p. 296, 1857. Ducretet J. de phys. 4 p. 84, 1875.

[2]) Beetz Wied. Ann. 2 p. 94, 1877.

[3]) Streintz Wied. Ann. 32 p. 116, 1887. 34 p. 751, 1888.

Digitized by Google

Durch eine Reihe von solchen Zellen, hintereinander geschaltet, kann man daher einem primären Strom in der einen Richtung eine Gegenkraft entgegensetzen, welche der Anzahl der Zellen mal 22 Volt gleich ist. In dieser Richtung, nämlich in derjenigen, in welcher das Aluminium die Anode ist, geht dann von dem primären Strom, wenn seine Spannung kleiner als der genannte Betrag ist, kein mit empfindlichen Galvanometer messbarer Strom hindurch. In der entgegengesetzten Richtung aber ist der Strom durch die erzeugte Wasserstoffpolarisation nur wenig geschwächt (die Gegenkraft beträgt weniger als 1 Volt für jede Zelle).

Die andere Elektrode der Zelle spielt keine wesentliche Rolle. Sie kann aus Platin oder einem anderen brauchbaren Metall bestehen. Ich habe gewöhnlich Kohlen genommen, wie sie in Bunsen'schen Elementen gebraucht werden. Jedenfalls darf sie für die folgenden Zwecke nicht auch aus Aluminium bestehen. Die Flüssigkeit muss die Eigenschaft besitzen, an der Anode direkt oder durch sekundäre Processe Sauerstoff zu entwickeln. Es eignen sich also verdünnte Säuren und insbesondere Alaunlösungen (Natron- und Kalialaunlösungen) dazu.

Sendet man nun durch eine solche Reihe von Zellen einen Wechselstrom hindurch, und wählt man die Zahl der Zellen so gross, dass die Anodenpolarisation die Spannung des Wechselstroms überwiegt oder mindestens ihr gleich ist, so sieht man, dass die positiven Stromtheile, in welchen Aluminium Anode würde, alle nicht hindurchgelassen werden und dass nur die negativen Stromtheile hindurchgehen. Es sind also aus dem Wechselstrom die Stromtheile einer bestimmten Richtung alle abgesondert und es geht in Folge dessen ein (unterbrochener) Gleichstrom durch die Leitung. Dieser Gleichstrom hat aber naturgemäss nur ungefähr die halbe Stärke des vorherigen Wechselstroms. Ein Verlust der halben Energie ist allerdings damit nicht verbunden. Da die positiven Stromtheile gar nicht zu Stande kommen, so ist zur Erzeugung des Stroms auch nur die halbe Energie nothwendig.

Man kann aber ebenso in einem zweiten Stromkreis die

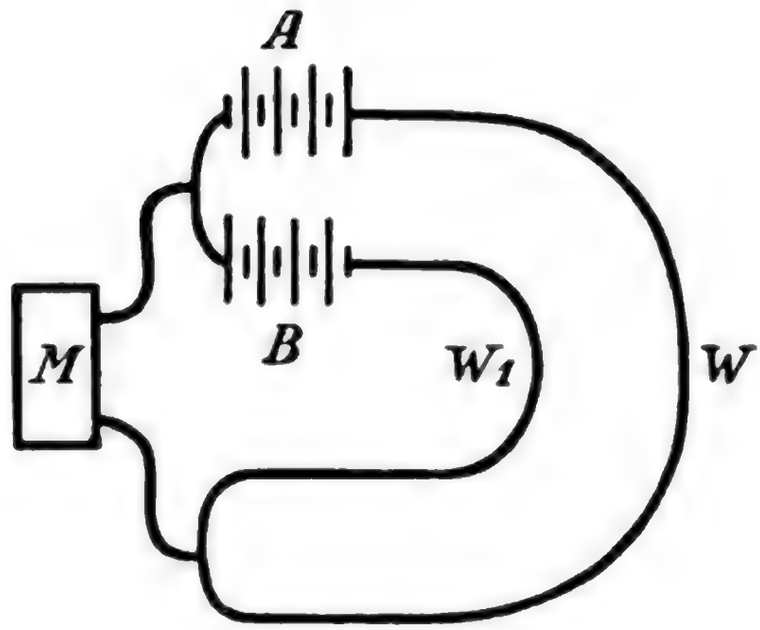
Digitized by Google

anderen Stromtheile für sich auffangen, indem man eine zweite Batterie von solchen Zellen in umgekehrter Anordnung mit den Polen der Wechselstromquelle verbindet.

In Fig. 1 ist M die Wechselstromquelle, A und B sind solche Batterien aus Aluminiumzellen, die langen Striche bedeuten die Aluminiumelektroden, die kurzen die anderen Elektroden.

In dem Draht W fliessen die gleichgerichteten Stromtheile der einen Art, in dem Draht W_1 die gleichgerichteten Strom-

Fig. 1.



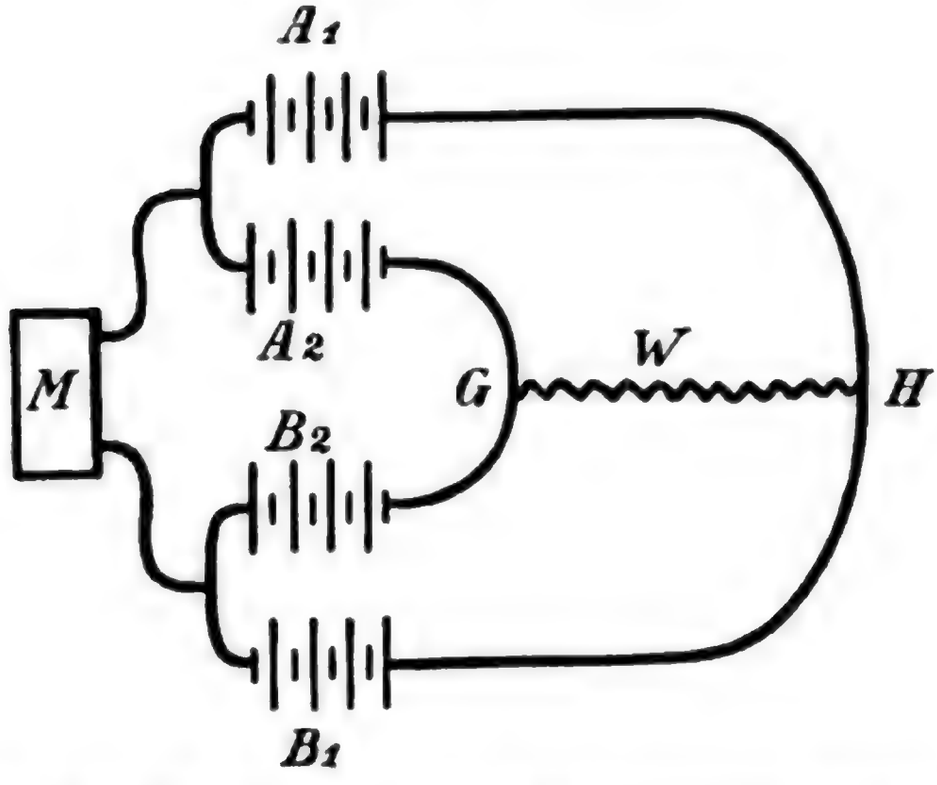
theile der anderen Art. Die beiden Stromtheile sind so getrennt und je durch einen besonderen Leiter gesendet. Der Apparat vertritt vollkommen einen Disjunktor und besitzt keine beweglichen Theile.

Man kann aber endlich auch durch eine besondere Schaltung die beiden Stromtheile durch denselben Draht nach derselben Richtung senden, so dass damit vollständig der Wechselstrom in pulsirenden Gleichstrom verwandelt ist. Zu dem Zweck schaltet man, wie in Fig. 2, an jeden Pol der Wechselstromquelle zwei entgegengesetzt geschaltete Batterien A_1 A_2 und B_1 B_2 nebeneinander, verbindet hinten die gleichnamigen Pole (A_1 mit B_1 und A_2 mit B_2) und verbindet diese endlich, bei G

Digitized by Google

und H, durch denjenigen Draht W, in welchem der Gleichstrom fliessen soll. Man sieht leicht, dass in dem Draht W stets ein gleichgerichteter Strom fliesst, welches auch die augenblickliche Stromrichtung des Wechselstroms sei. Denn wenn der obere Pol von M positiv ist, so geht der Strom von M über A_1 H G B_2 nach dem unteren Pol. Und wenn der untere Pol positiv ist, so geht der Strom über B_1 H G A_2 nach dem oberen Pol, also beide Male in der Richtung von H nach G.

Fig. 2.



In der That konnte ich bei einer Schaltung dieser Art in dem Draht W von einer kleinen Wechselstrommaschine einen Gleichstrommotor treiben lassen, ich erhielt Galvanometerangaben und Kupferniederschläge ganz so, als ob die Stromquelle M nicht eine Wechselstrommaschine, sondern eine Gleichstrommaschine gewesen wäre.

Da bei diesen Versuchen die Wechselstrommaschine nach den Angaben des Voltmeters nur 62 Volt Spannung besass, so war nach den vorhergehenden Messungen zu erwarten, dass mit je drei solchen Zellen der Strom der einen Richtung vollständig zum Verschwinden zu bringen sei. Unerwarteter Weise

Digitized by Google

war das nicht der Fall. Durch Variiren der Zellenzahl ergab sich, dass erst bei 4 Zellen die vollkommenste Wirkung eintrat. Der Grund dafür ist aber leicht einzusehen. Das Voltmeter giebt nur die mittlere Spannung des Wechselstroms. Um aber die Stromtheile der einen Art ganz zu vernichten, muss die Gegenspannung der Zellen der Maximalspannung des Wechselstroms das Gleichgewicht halten. Deshalb sind die Angaben des Spannungsmessers dafür nicht massgebend.

Was den Betrag der Energie anbetrifft, den man bei dieser Umwandlung von Wechselströmen in Gleichströme nach der letzten Anordnung verliert, so hängt dieser natürlich ab von dem Widerstand der Zellen einerseits und von dem Verhältniss der Grösse der Wasserstoffpolarisation zu der der Sauerstoffpolarisation, wenn man für diese eben das Wort Polarisation benützen will. Der Widerstand der Zellen kann durch Vergrösserung der Querschnitte auf beliebig kleine Beträge hinuntergebracht werden. Da die Sauerstoffpolarisation mindestens 20—25 mal so gross ist, wie die Wasserstoffpolarisation, so erkennt man leicht, dass man auf diese Weise bei genügend grossen Zellen bis zu 95—96% der Energie des Wechselstroms in Gleichstromenergie umwandeln kann.

Digitized by Google

Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche.

Von **A. Voss.**

(Eingelaufen 1. Mai.)

In seiner Théorie générale des surfaces[1]) hat Herr Darboux die Coordinaten x_1, x_2, x_3 der Puncte einer Oberfläche F[2]) durch Ausdrücke dargestellt, welche man in der für beliebige Constante a_1, a_2, a_3 gültigen Identität zusammenfassen kann

$$\text{I)}\quad \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = \int (a\,\Theta\Theta_u)(D_1 du + D_{11} dv) - \int (a\,\Theta\,\Theta_v)(D\,du + D_1\,dv)$$

Dabei bedeuten in den dreireihigen Determinanten[3]) unter den Integralzeichen Θ_1, Θ_2, Θ_3 drei Functionen, welche gleichzeitig der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{II)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = M\,\Theta$$

für jeden bei den Θ hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$ genügen. Die Gleichungen I) und II), welche man auch als eine Trans-

---

[1]) Leçons sur la théorie générale des surfaces Tom. IV, S. 42 ff.

[2]) Der Kürze halber soll ein solcher Punct durch x, daher auch die Fläche F gelegentlich als „Fläche x" bezeichnet werden.

[3]) Das Symbol $(a\,b\,c)$ dient zur Bezeichnung der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Digitized by Google

formation der Lelieuvre'schen Formeln[1]) auf ein allgemeines System krummliniger Coordinaten betrachten kann, scheinen mir dadurch ein besonderes Interesse zu besitzen, dass sie eine andere Formulierung der partiellen Differentialgleichungen einer krummen Fläche geben. Während nämlich bei der Gauss'schen Darstellung die Fundamentalgrössen erster Ordnung bevorzugt und mit ihnen die der zweiten Ordnung durch unsymmetrische Differentialgleichungen von complicirter Gestalt verknüpft sind, treten hier die Coefficienten D, D_{I}, D_{II}, welche den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung proportional sind,[2]) in den Vordergrund und die Functionen Θ sind nun Integrale einer einzigen Differentialgleichung. Durch die consequente Anwendung der Formeln I) und II) dürften manche Probleme der allgemeinen Flächentheorie eine neue Wendung erhalten. Namentlich aber gewinnt das Problem der infinitesimalen Biegungsdeformation einer Fläche vermöge derselben eine durch Allgemeinheit, wie mir scheint, ausgezeichnete Behandlung, und von diesem Gesichtspuncte sollen vorzugsweise diese Formeln im Folgenden betrachtet werden.

Eine auch nur einigermassen erschöpfende Behandlung dieses Gegenstandes, insbesondere auch nach derjenigen Richtung hin, welche durch die Untersuchungen der Herren Cosserat und Guichard[3]) über Strahlensysteme zu so schönen Resultaten geführt hat, konnte hier natürlich nicht meine Aufgabe sein. Allerdings wird man im Folgenden auch den einen oder anderen Satz vorfinden, der aus der zusammenfassenden

---

[1]) Lelieuvre, sur les lignes asymptotiques et leur réprésentation sphérique, Bulletin Darboux, 1888, p. 126; auch Comptes Rendus, t. CXI, p. 183.

[2]) Vgl. § I, 9).

[3]) Guichard, G. Sur les congruences dont la surface moyenne est un plan, Comptes Rendus, CXIV p. 729 (1892); Determination des congruences telles que les lignes asymptotiques . . . Compt. R. CX p. 126, 1890. Cosserat, E., Sur les congruences de droites etc. . . , Ann. de la Fac. de Toulouse, t. VI, 1893.

Digitized by Google

Darstellung von Bianchi und Darboux[1]) bereits bekannt ist, doch dürfte zugleich eine Reihe von neuen, zu weiterer Durchführung im einzelnen vielfache Veranlassung bietenden Gesichtspuncten in der hier gegebenen Darstellung enthalten sein.

Was die Bezeichnung betrifft, so werde ich mich der von mir in verschiedenen früheren Arbeiten[2]) gebrauchten Formeln bedienen. Es seien also x_1, x_2, x_3 die drei rechtwinkeligen Coordinaten, p_1, p_2, p_3 die Richtungscosinus der Flächennormale, e, f, g die Coefficienten des Längenelementes, e', f', g' die des Längenelementes der sphärischen Abbildung, endlich E, F, G die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung. Alsdann bestehen die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1)\qquad x_{uu} &= Ax_u + A_1 x_v + Ep \\
x_{uv} &= Bx_u + B_1 x_v + Fp \\
x_{vv} &= Cx_u + C_1 x + Gp; \\
p_u &= Hx_u + H_1 x_v \\
p_v &= Jx_u + J_1 x_v
\end{aligned}
$$

für jeden den Variabeln x, p hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$; die Coefficienten $A, A_1, \ldots$ sind zur Abkürzung für die bekannten Christoffel'schen Symbole

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ldots$$

deren Anwendung bei dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mir nicht zweckmässig erscheint. —

[1]) Darboux. Leçons générales, t. IV p. 1—110; Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, Pisa 1894 p. 272—320. Vgl. auch Cosserat, E. Sur la déformation infiniment petite d'une surface flexible .. et sur les congruences de droites, Ann. de la fac. de Toulouse, t. VIII 1894 und C. Rendus déc. 1892.

[2]) „Ueber die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie," diese Sitzungsberichte 1892, p. 257; man vergleiche ferner Cosserat, E. Sur les congruences des droites, Ann. de la fac. de Toulouse, t. VI N. 5—9, 1893.

Digitized by Google

Setzt man

$$\mathsf{H} = eg - f^2$$

und bezeichnet den Coordinatenwinkel der Curven u, v mit ω, so ist

2) $$A + B_1 = \frac{\partial l \sqrt{\mathsf{H}}}{\partial u}, \quad B + C_1 = \frac{\partial l \sqrt{\mathsf{H}}}{\partial v}$$

$$\left(\frac{A_1}{e} + \frac{B}{g}\right)\sqrt{\mathsf{H}} = -\omega_u, \quad \left(\frac{C}{g} + \frac{B_1}{e}\right)\sqrt{\mathsf{H}} = -\omega_v$$

$$\mathsf{H}H = Ff - Eg, \quad \mathsf{H}J = Gf - Fg$$

$$\mathsf{H}H_1 = Ef - Fe, \quad \mathsf{H}J_1 = Ff - Ge$$

$$E = \Sigma p x_{uu} = -\Sigma p_u x_u$$

$$F = \Sigma p x_{uv} = -\Sigma p_u x_v = -\Sigma p_v x_u$$

$$G = \Sigma p x_{vv} = -\Sigma p_v x_v$$

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind dann, wenn noch das Krümmungsmass mit K bezeichnet wird

3) $$K\sqrt{\mathsf{H}} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A_1\sqrt{\mathsf{H}}}{e}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B_1\sqrt{\mathsf{H}}}{e}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{C\sqrt{\mathsf{H}}}{g}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{B\sqrt{\mathsf{H}}}{g}\right)$$

4) $$E_v - F_u + (A - B_1)F + A_1 G - BE = 0$$

$$G_u - F_v + (C_1 - B)F + CE - B_1 G = 0;$$

die letzteren beiden kann man, wenn

$$E = E'\sqrt{\mathsf{H}} \quad F = F'\sqrt{\mathsf{H}} \quad G = G'\sqrt{\mathsf{H}}$$

gesetzt wird auch in der Form

4¹) $$E'_v - F'_u + E'C_1 + G'A_1 - 2F'B_1 = 0$$

$$G'_u - F'_v + G'A + E'C - 2F'B = 0$$

schreiben. Die zweiten Differentialquotienten der Normalencosinus p genügen den Gleichungen

5) $$p_{uu} = \alpha p_u + \alpha_1 p_v - pe'$$

$$p_{uv} = \beta p_u + \beta_1 p_v - pf'$$

$$p_{vv} = \gamma p_u + \gamma_1 p_v - pg'$$

Digitized by Google

für jeden hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$, und die Christoffelschen Symbole $\alpha, \alpha_1, \ldots$ sind durch die folgenden, durch Differentiation der E, F, G in 2) unmittelbar folgenden Gleichungen definirt

$$
\begin{aligned}
6) \qquad E_u &= (A + \alpha) E + (A_1 + \alpha_1) F \\
E_v &= (B + \beta) E + (B_1 + \beta_1) F \\
F_u &= (A + \beta_1) F + A_1 G + \beta E = (B_1 + \alpha) F + \alpha_1 G + B E \\
F_v &= (B + \gamma_1) F + B_1 G + \gamma E = (C_1 + \beta) F + \beta_1 G + C E \\
G_u &= (B + \beta) F + (B_1 + \beta_1) G \\
G_v &= (C + \gamma) F + (C_1 + \gamma_1) G
\end{aligned}
$$

Insbesondere ist also bei der Beziehung auf conjugirte Systeme ($F = 0$)

$$
\begin{aligned}
7) \qquad A + \alpha &= \frac{\partial l E}{\partial u}, \quad (C_1 + \gamma_1) = \frac{\partial l G}{\partial v} \\
B + \beta &= \frac{\partial l E}{\partial v}, \quad (B_1 + \beta_1) = \frac{\partial l G}{\partial u} \\
A_1 G + \beta E &= \alpha_1 G + B E = 0 \\
B_1 G + \gamma E &= \beta_1 G + C E = 0
\end{aligned}
$$

während bei Zugrundelegung von Haupttangentencurven ($E = G = 0$)

$$
\begin{aligned}
A_1 + \alpha_1 &= 0, \quad B_1 + \beta_1 = 0 \\
A + \beta_1 &= B_1 + \alpha = \frac{\partial l F}{\partial u} \\
B + \gamma_1 &= C_1 + \beta = \frac{\partial l F}{\partial v} \\
B + \beta &= 0, \quad C + \gamma = 0
\end{aligned}
$$

wird. Durch die hinzugefügten Indices u, v sind überall die entsprechenden Differentialquotienten bezeichnet.

Digitized by Google

§ I. Die Coefficienten des Längenelementes und das Krümmungsmass von F.

Aus den Gleichungen I) der Einleitung ergibt sich sofort durch Differentiation

$$\Sigma(a x_u) = (a \Theta \Theta_u) D_1 - (a \Theta \Theta_v) D$$
$$\Sigma(a x_v) = (a \Theta \Theta_u) D_{11} - (a \Theta \Theta_v) D_1$$

also insbesondere

$$\Sigma(\Theta x_u) = 0$$
$$\Sigma(\Theta x_v) = 0.$$

Es sind daher die Cosinus der Flächennormale den Θ proportional, d. h.

1) $$r p_1 = \Theta_1, \quad r p_2 = \Theta_2, \quad r p_3 = \Theta_3,$$

wenn man mit r den Radius Vector der Fläche Θ mit den Coordinaten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$

2) $$r^2 = \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2$$

bezeichnet. Wird ferner zur Abkürzung

3) $$\Delta = \begin{vmatrix} \Theta_{1u} & \Theta_{2u} & \Theta_{3u} \\ \Theta_{1v} & \Theta_{2v} & \Theta_{3v} \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \end{vmatrix} = (\Theta \Theta_u \Theta_v)^{1)}$$

gesetzt, so folgt

$$\Sigma \Theta_u x_u = \Delta D$$
$$\Sigma \Theta_v x_u = \Delta D_1$$
$$\Sigma \Theta_u x_v = \Delta D_1$$
$$\Sigma \Theta_v x_v = \Delta D_{11}.$$

Multiplicirt man die Determinante $(x_u x_v a)$ in der die a_1, a_2, a_3 willkürliche Grössen sind, mit Δ, so ergiebt sich die auch für $\Delta = 0$ gültige Identität

---

[1]) Θ_{iu} bedeutet $\frac{\partial \Theta_i}{\partial u}$, entsprechend sind Θ_{iv}, x_{iu} . . . zu verstehen.

Digitized by Google

$$4)\qquad \begin{vmatrix} x_{1u} & x_{2u} & x_{3u} \\ x_{1v} & x_{2v} & x_{3v} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \Delta\,\Omega\,\Sigma(a\,\Theta)$$

wenn

$$5)\qquad \Omega = D\,D_{11} - D_1^2$$

gesetzt wird. Damit also durch die Formeln I) eine Fläche und nicht nur eine Curve dargestellt wird, darf weder Δ noch Ω verschwinden.[1]) Erhebt man die Gleichung 4) zum Quadrat, nachdem man die a_1, a_2, a_3 durch Θ_1, Θ_2, Θ_3 ersetzt hat, so folgt

$$6)\qquad \mathsf{H} = eg - f^2 = r^2\,\Delta^2\,\Omega^2$$

und zugleich hat man, wenn e', f', g' die Coefficienten des Längenelementes der sphärischen Abbildung von F bedeuten, nach 1)

$$r^2 e' = \Sigma\,\Theta_u^2 - r_u^2$$
$$r^2 f' = \Sigma\,\Theta_u\,\Theta_v - r_u\,r_v$$
$$r^2 g' = \Sigma\,\Theta_v^2 - r_v^2,$$

und aus den Gleichungen

$$e = r^4\,[D_1^2\,e' - 2\,D\,D_1\,f' + D^2\,g']$$
$$f = r^4\,[D_1\,D_{11}\,e' - (D_1^2 + D\,D_{11})\,f' + D\,D_1\,g']$$
$$g = r^4\,[D_{11}^2\,e' - 2\,D\,D_{11}\,f' + D_1^2\,g']$$

welche sich aus den x_u, x_v ergeben, erhält man sofort

$$7)\qquad D_{11}\,e - 2\,D_1\,f + D\,g = r^4\,\Omega\,(D_{11}\,e' - 2\,D_1\,f' + D\,g')$$

so dass

$$8)\qquad K = \frac{1}{r^4\,\Omega}$$

das Krümmungsmass von F ist. Denkt man sich endlich

---

[1]) Uebrigens ist auch der Fall, wo die Fläche F in eine Curve degenerirt, also nach der Bezeichnung des § III eine Curve der Fläche Θ adjungirt ist, nicht ohne Interesse.

Digitized by Google

die Differentialquotienten der Coordinaten x in die Form (Einleitung 1))

$$x_{uu} = A x_u + A_1 x_v + E \frac{\Theta}{r}, \cdots$$

gebracht, so findet man durch Multiplication mit $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ und Addition die Formeln

$$9) \qquad \begin{aligned} r E &= - \Delta D \\ r F &= - \Delta D_1 \\ r G &= - \Delta D_{11}. \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind also, wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, den D, D_1, D_{11} proportional. Insbesondere ist daher $D = D_{11} = 0$ die Bedingung dafür, dass die Coordinatenlinien Haupttangentencurven sind; $D_1 = 0$ characterisirt die conjugirten Systeme. Da Ω nicht verschwinden darf, sind die developpabelen Flächen F von der obigen Darstellung ausgeschlossen.[1]) Eine besondere Erwähnung scheint auch der Fall zu verdienen, wo zwischen Ω und r eine Relation[2])

$$f(r, \Omega) = 0$$

besteht. Derselbe findet (unter anderem) statt bei den Minimalflächen, den Flächen constanter Krümmung, während im allgemeinen eine solche Beziehung nur für ganz bestimmte Coordinatensysteme auf F auftreten wird.

§ II. Normalform der Differentialgleichung II.

Bei der Anwendung der Lelieuvre'schen Formeln pflegt man als Normalform der Differentialgleichung II) die Form[3])

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \, \partial v} = m \Theta$$

---

[1]) Trotzdem würde auch die Biegung der Developpabelen Flächen, wie aus § V zu ersehen, hier ihre vollständige Erledigung finden.

[2]) Vgl. § XI.

[3]) Bianchi, Lezioni p. 280.

Digitized by Google

zu bezeichnen. Es sei hier gestattet, eine andere Normalform zu wählen, bei der die Allgemeinheit des Coordinatensystems erhalten bleibt. Multiplicirt man die Gleichungen II) für Θ_1, Θ_2, Θ_3 mit diesen drei Grössen und addirt, so folgt für M die Gleichung

$$\begin{aligned} Mr^2 &= \frac{\partial}{\partial u} r\,(r_u D_{11} - r_v D_1) + \frac{\partial}{\partial v} r\,(r_v D - r_u D_1) \\ &\quad - [D_{11} \Sigma \Theta_u^2 - 2 D_1 \Sigma \Theta_u \Theta_v + D \Sigma \Theta_v^2] \\ &= r \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (r_u D_{11} - r_v D_1) + \frac{\partial}{\partial v} (r_v D - r_u D_1) \right\} \\ &\quad - r^2 [D_{11} e' - 2 D_1 f' + D g'] \end{aligned}$$

oder mit Benutzung von 7) und 9) des § I)

$$\begin{aligned} Mr &= \frac{\partial}{\partial u} [r_u D_{11} - r_v D_1] + \frac{\partial}{\partial v} [r_v D - r_u D_1] \\ &\quad + \frac{Eg + Ge - 2Ff}{r^2 \Omega \Delta} \end{aligned}$$

welche für den speciellen Fall $r = 1$ sich schon bei Darboux[1]) aufgestellt findet. Man kann indessen immer M gleich Null voraussetzen, und diese einfache Bemerkung ist es, die eigentlich den Gegenstand aller folgenden Betrachtungen bildet.

Die Ausdrücke I) haben nämlich, wie man unmittelbar erkennt, die Eigenschaft, dass die Coordinaten x_1, x_2, x_3 sich nicht ändern, wenn man unter dem Integralzeichen gleichzeitig die drei Functionen Θ mit dem Nenner λ, dafür aber die Grössen D mit dem Factor λ^2 versieht, wobei λ jede beliebige Function von u, v sein kann. Für die Differentialgleichung II) der die Θ genügen müssen, ist aber diese Aenderung von einem sehr wesentlichen Einflusse. Setzt man nämlich an Stelle von

$$D,\ D_1,\ D_{11},\ \Theta$$

[1]) Leçons. t. IV S. 45.

Digitized by Google

der Reihe nach

$$D'\lambda^2,\ D'_1\lambda^2,\ D'_{11}\lambda^2,\ \frac{\Theta'}{\lambda}$$

so geht dieselbe über in

$$1)\qquad \lambda\left[\frac{\partial}{\partial u}(D'_{11}\Theta'_u - D'_1\Theta'_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D'\Theta'_v - D'_1\Theta'_u)\right]$$

$$= \Theta'\left[\frac{M}{\lambda} - \frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u - D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[D\left(\frac{1}{\lambda}\right)_v - D_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)_u\right]\right]$$

Wählt man daher $\frac{1}{\lambda} = z$, so dass z wieder der Differentialgleichung II) genügt, so kann man die Coordinaten der Fläche F in der Form

$$\text{A)}\quad \Sigma(ax) = \int(a\Theta'\Theta'_u)(D'_1du + D'_{11}dv) - \int(a\Theta'\Theta'_v)(D'du + D'_1dv)$$

darstellen, aber die Integrabilitätsbedingungen von A) werden jetzt einfach durch die partiellen Differentialgleichungen

$$\text{B)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}(D'_{11}\Theta'_u - D'_1\Theta'_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D'\Theta'_v - D'_1\Theta'_u) = 0$$

ausgedrückt. Man kann also, unter Fortlassung des Index ′ von vorne herein in I) und II) die Grösse M gleich Null voraussetzen. Diese Form der Differentialgleichung möge hier als Normalform bezeichnet werden. Jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}z_u - D_1z_v) + \frac{\partial}{\partial v}(Dz_v - D_1z_u) = Mz$$

entspricht eine besondere Darstellungsart der Fläche, bei der sich indessen die D gleichzeitig um den Factor $\frac{1}{z^2}$, die Θ um den Factor z ändern. Der invariante Character der Normalform spricht sich auch dadurch aus, dass unter Voraussetzung der Gleichung II) mit $M = 0$ die Identität 1) übergeht in die Gleichung

Digitized by Google

$$2)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D_{11}}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial u}-\frac{D_1}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\lambda^2}\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial v}-D_1\frac{\partial\Theta\lambda}{\partial u}\right)$$

$$=-\Theta\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(D_{11}\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial u}-D_1\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial v}-D_1\frac{\partial\frac{1}{\lambda}}{\partial u}\right)\right\}$$

welche für jedes λ besteht. Genügt also $\frac{1}{\lambda}$ der Differentialgleichung II) mit $M=0$, so gehören die Coefficienten $\frac{D}{\lambda^2}$ $\frac{D_1}{\lambda^2}$ $\frac{D_{11}}{\lambda^2}$ und die Functionen $\Theta_1\lambda$, $\Theta_2\lambda$, $\Theta_3\lambda$ wieder zu einer Darstellung der Fläche, bei der die Differentialgleichung die Normalform besitzt.

Endlich sei darauf aufmerksam gemacht, dass bei allen Transformationen der Variabelen u, v in andere Variabeln u', v' jene Gleichung II) einen invarianten Character hat. Bezeichnet man die Functionaldeterminante der Transformation durch δ,

$$\delta=\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}-\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

so erhalten die Coefficienten D, D_1, D_{11}, die Werthe

$$(D\ )=D_{11}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2-2D_1\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}+D\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2:\delta$$

$$(D_1)=D_{11}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u}-D_1\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right)+D\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v}:\delta$$

$$(D_{11})=D_{11}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2-2D_1\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}+D\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2:\delta$$

und zugleich findet die Identität

$$\delta\left[\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\Theta_u-D_1\Theta_v)+\frac{\partial}{\partial v}(D\Theta_v-D_1\Theta_u)\right]=$$

$$\frac{\partial}{\partial u'}[(D_{11})\Theta_{u'}-(D_1)\Theta_{v'}]+\frac{\partial}{\partial v'}[(D)\Theta_{v'}-(D_1)\Theta_{u'}]$$

statt, wie sich durch directe Rechnung bestätigen lässt; man erkennt also in der linken Seite von B) einen Differentialparameter zweiter Ordnung.

Digitized by Google

§ III. Die Fläche Θ.

Die Fläche F ist vermöge der Formeln A), B) des § II) in denen die Indices $'$ jetzt rechterhand fortzulassen sind, auf die Fläche Θ mit den Coordinaten Θ_1, Θ_2, Θ_3 in einer eigenthümlichen Weise bezogen; F möge zu Θ adjungirt heissen. Während aber F der Beschränkung unterliegt, nicht developpabel zu sein, kann für Θ jede beliebige Fläche gewählt werden, falls nur nicht die Determinante Δ verschwindet. In diesem letzteren Falle würde Θ eine Kegelfläche sein, deren Spitze der Coordinatenanfang $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = 0$ ist, wie sich aus der Gleichung

$$\Delta = \Theta_3^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial \frac{\Theta_1}{\Theta_3}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{\Theta_1}{\Theta_3}}{\partial v} \\ \frac{\partial \frac{\Theta_2}{\Theta_3}}{\partial u} & \frac{\partial \frac{\Theta_2}{\Theta_3}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

ergiebt; nur dieser Fall ist auszuschliessen, übrigens durch Aenderung des Coordinatenanfanges immer zu vermeiden.

Ist nun

$$1) \qquad \begin{aligned} \Theta_{uu} &= A' \Theta_u + A'_1 \Theta_v + E' q \\ \Theta_{uv} &= B' \Theta_u + B'_1 \Theta_v + F' q \\ \Theta_{vv} &= C' \Theta_u + C'_1 \Theta_v + G' q \end{aligned}$$

so gehört zu Θ eine Fläche F, wenn die Differentialgleichungen B) des § II) erfüllt sind, oder wenn nach 1)

$$2) \qquad \begin{aligned} D_{11} A' - 2 D_1 B' + D C' + D_{11u} - D_{1v} &= 0 \text{ [1]} \\ D_{11} A'_1 - 2 D_1 B'_1 + D C'_1 + D_v \quad - D_{1u} &= 0 \\ D_{11} E' - 2 D_1 F' + D G' &= 0 \end{aligned}$$

ist. Nun genügen aber die Grössen

$$E' = (E') \sqrt{\mathsf{H}}, \quad F' = (F') \sqrt{\mathsf{H}}, \quad G' = (G') \sqrt{\mathsf{H}},$$

den Differentialgleichungen (Einleitung 4[1])

[1]) Es ist $D_{iu} = \frac{\partial D_i}{\partial u}$ etc.

Digitized by Google

$$(G')A' - 2(F')B' + (E')C' + (G')_u - (F')_v = 0$$

3) $$(G')A'_1 - 2(F')B'_1 + (E')C'_1 + (E')_v - (F')_u = 0$$

und $$(E')(G') - (F')^2$$

ist das Krümmungsmass von Θ. Es bestehen daher für jede unendlich kleine Biegung der Fläche Θ bei der die $(E'), (F'), (G')$ die unendlich kleinen Incremente

$$\varepsilon D, \quad \varepsilon D_1, \quad \varepsilon D_{11}$$

erhalten — wobei ε eine infinitesimale Constante bedeuten möge — genau die Gleichungen 2), denn die beiden ersteren gehen aus den entsprechenden Gleichungen 3) hervor, wenn man die (E'), (F'), (G') in $(E') + \varepsilon D, \ldots$ übergehen lässt, und aus der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses von Θ folgt die letzte der Gleichungen 2). Um also bei gegebener Fläche Θ alle Flächen F zu finden, die zu Θ adjungirt sind, hat man Θ allen infinitesimalen Biegungsdeformationen zu unterwerfen. Dabei verschwindet für jede zu Θ adjungirte Fläche F die simultane Invariante der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

$$D_{11}E' - 2D_1F' + DG'$$

und die Normalen von F sind parallel den Radien-Vectoren der entsprechenden Puncte von Θ. Ist insbesondere F auf Haupttangentencurven bezogen, so ist auf Θ ein conjugirtes Coordinatensystem mit gleichen Invarianten anzunehmen. Und auch umgekehrt gehört zu jeder Fläche Θ, die auf ein solches System gleicher Invarianten bezogen ist, immer — abgesehen von einer Aehnlichkeitstransformation — eine bestimmte Fläche F, welche auf Haupttangentencurven bezogen ist. In der That, wenn man

$$F_1 = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial B'}{\partial u} = \frac{\partial B'_1}{\partial v}$$

oder $$B' = \frac{-\partial lw}{\partial v}, \quad B'_1 = \frac{-\partial lw}{\partial u}$$

voraussetzt, kann man die Gleichungen 2) dadurch erfüllen, dass man

Digitized by Google

$$D = D_{11} = 0$$
$$D_1 = w^2 \text{ const}$$

setzt. Die adjungirte Beziehung wird übrigens in den folgenden §§ weiter behandelt werden.

§ IV. Unendlich kleine Biegungen der Fläche F.

Vermöge der Gleichungen B) des § II) kann man setzen

$$1) \quad \begin{aligned} D_1 \Theta_u - D \Theta_v &= \varphi_u \\ D_{11} \Theta_u - D_1 \Theta_v &= \varphi_v \end{aligned}$$

so dass $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ drei Functionen sind, die man als Coordinaten einer neuen Fläche φ betrachten kann. Die am Eingange von § I) angegebenen Identitäten werden aber nach 1) jetzt

$$\Sigma (a x_u) = (a \Theta \varphi_u)$$
$$\Sigma (a x_v) = (a \Theta \varphi_v)$$

und hieraus folgt, wenn man den willkürlichen Grössen a geeignete Werthe ertheilt

$$2) \quad \begin{aligned} \Sigma x_u \varphi_u = 0 \quad \Sigma x_v \varphi_v = 0 \\ \Sigma (x_u \varphi_v + x_v \varphi_u) = 0 \end{aligned}$$

Man erkennt hierin die Bedingungen, denen die drei Functionen φ zu genügen haben, wenn die Verschiebungscomponenten

$$\varepsilon \varphi_1, \quad \varepsilon \varphi_2, \quad \varepsilon \varphi_3$$

eine unendlich kleine Biegung von F vorstellen sollen. Auch ist

$$\Sigma x_u \varphi_v = (\varphi_v \Theta \varphi_u) = \Delta \Omega$$

oder nach § I), 6)

$$\Sigma x_u \varphi_v = - \Sigma x_v \varphi_u = \frac{\sqrt{H}}{r}$$

mithin ist $\frac{1}{r}$ die als characteristische Function der

Digitized by Google

Deformation von Herrn Bianchi (Verschiebungsfunction von Herrn Weingarten) bezeichnete Function, letztere also der reciproke Radius Vector derjenigen Fläche Θ zu der F adjungirt ist.[1])

Aus diesem Zusammenhange nun ergiebt sich zugleich ein Beweis der Darboux'schen Formeln selbst.[2]) Setzt man nämlich die characteristische Function ψ einer infinitesimalen Biegung von F als bekannt voraus, und bezeichnet die Coordinaten der zugehörigen infinitesimalen Verrückung durch

$$\varepsilon\varphi_1, \quad \varepsilon\varphi_2, \quad \varepsilon\varphi_3$$

so ist[3])

$$\varphi_u = \frac{\psi^2}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\left(E\frac{\partial\frac{p}{\psi}}{\partial v} - F\frac{\partial\frac{p}{\psi}}{\partial u}\right)$$

$$\varphi_v = \frac{\psi^2}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\left(F\frac{\partial\frac{p}{\psi}}{\partial v} - G\frac{\partial\frac{p}{\psi}}{\partial u}\right)$$

oder für

$$\psi = \frac{1}{r}, \quad \frac{p}{\psi} = \Theta$$

$$\varphi_u = \frac{E\Theta_v - F\Theta_u}{r^2 K\sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \varphi_v = \frac{F\Theta_v - G\Theta_u}{r^2 K\sqrt{\mathsf{H}}}$$

Aus der Gleichung

$$(p_u\, p_v\, p) = \frac{EG - F^2}{\sqrt{\mathsf{H}}} = \frac{(\Theta_u\, \Theta_v\, \Theta)}{r^3} = \frac{\Delta}{r^3}$$

folgt jetzt

$$r^2 K\sqrt{\mathsf{H}} = \frac{\Delta}{r}$$

---

[1]) Weingarten, Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Kronecker's Journal, C. p. 296, 1886; Bianchi Lezioni p. 275. Cosserat, E., Déformation infinitésimale E. 19.

[2]) Man vergleiche die beiden auf ganz anderen Betrachtungen beruhenden Beweise, welche Herr Darboux selbst in seiner Théorie générale gegeben hat S. 42 u. 46.

[3]) Vgl. z. B. Bianchi p. 276.

Digitized by Google

oder, wenn man die Grössen D durch die Gleichungen

$$rE = -D\Delta, \quad rF = -D_1\Delta, \quad rG = -D_{11}\Delta$$

einführt,

$$3) \qquad \varphi_u = D_1\Theta_u - D\Theta_v, \quad \varphi_v = D_{11}\Theta_u - D_1\Theta_v$$

und aus den Gleichungen

$$\Sigma(\Theta x_u) = 0 \quad \Sigma(\Theta x_v) = 0$$
$$\Sigma(\varphi_u x_u) = 0 \quad \Sigma(\varphi_v x_v) = 0$$
$$\Sigma(\varphi_v x_u) = -\Sigma(\varphi_u x_v) = \frac{\sqrt{\mathsf{H}}}{r} = \Omega\Delta$$

ergeben sich jetzt die Werthe der x_u, x_v in der unter A), § II) angegebenen Form. Die Betrachtung der infinitesimalen Deformationen ist also völlig äquivalent mit der Darboux'schen Darstellung, wenn die zugehörige Differentialgleichung in der Normalform vorausgesetzt wird.

Umgekehrt aber entsprechen auch alle infinitesimalen Biegungen von F den Lösungen der partiellen Differentialgleichung B). Soll nämlich überhaupt eine Function ψ die Gleichungen 2) erfüllen, so kann man, da die Determinante Δ als nicht verschwindend vorausgesetzt wird, ψ_u, ψ_v in der Form

$$\psi_u = \lambda\ \Theta + \mu\ \Theta_u + \nu\ \Theta_v$$
$$\psi_v = \lambda_1\Theta + \mu_1\Theta_u + \nu_1\Theta_v$$

annehmen, wo nun λ, μ, ν; λ_1, μ_1, ν_1 noch zu bestimmen sein werden. Unter zugrundelegung der Ausdrücke für die x_u, x_v folgt aber nunmehr aus dem Nichtverschwinden der Determinante Δ

$$\mu = \quad \varrho D_1 \quad \mu_1 = \quad \varrho D_{11}$$
$$\nu = -\varrho D \quad \nu_1 = -\varrho D_1$$

und aus den Bedingungen der Integrabilität für ψ_u, ψ_v weiter

Digitized by Google

$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial u} = 0$$

$$\lambda - \varrho_v D + \varrho_u D_1 = 0$$

$$\lambda_1 + \varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1 = 0$$

also

$$4) \qquad \frac{\partial}{\partial v}(\varrho_v D - \varrho_u D_1) + \frac{\partial}{\partial u}(\varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1) = 0$$

Man hat also den folgenden, übrigens schon von Herrn Darboux angegebenen Satz.[1])

Die Coordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 jeder infinitesimalen Biegung von F sind durch die Ausdrücke

$$5) \qquad \begin{aligned} \psi_u &= (\varrho_u D_1 - \varrho_v D)\ \Theta - \varrho\,(D_1\ \Theta_u - D\ \Theta_v) \\ \psi_v &= (\varrho_u D_{11} - \varrho_v D_1)\ \Theta - \varrho\,(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) \end{aligned}$$

gegeben,[2]) falls ϱ der Differentialgleichung 4) genügt, und zugleich wird

$$\Sigma x_u \psi_v = \varrho\,\Omega\,\Delta = \frac{\varrho}{r}\sqrt{\mathsf{H}}$$

also $\frac{\varrho}{r}$ die characteristische Function der Deformation. Dabei gehören aber, da ϱ um eine Constante noch beliebig geändert werden kann, zu jeder Lösung von 4) noch unendlich viele Functionen ψ_i; bezeichnet man eine derselben mit ψ_i^0, so ist

$$\psi_i = \psi_i^0 - \varphi_i \text{ const},$$

wie sofort aus 3) erhellt.

---

[1]) Leçons t. IV S. 45.

[2]) Dieser Satz wird fast selbstverständlich, wenn man die Identität 2) des § II beachtet; die ψ ergeben sich dann sofort in der mit Gl. 5) des Textes übereinstimmenden Form

$$-\psi_u = \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$

$$-\psi_v = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}.$$

Digitized by Google

§ V. Die zu φ adjungirte Fläche Φ.

Bezeichnet man die durch $-\Omega$ dividirten Grössen D, D_1, D_{11} durch d, d_1, d_{11}, so gilt nach § IV) 1) die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(\varphi_u d_{11} - \varphi_v d_1) + \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_v d - \varphi_u d_1) = 0$$

Durch die Identität

$$1)\quad \sum_{i=1}^{i=3}(b_i \xi_i) = \int (b\varphi\varphi_u)(d_1 du + d_{11} dv) - \int (b\varphi\varphi_v)(d du + d_1 dv)$$

wird also eine Fläche Φ definirt, die zu φ adjungirt ist. Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Φ sind dabei denen von F proportional, d. h. conjugirten Systemen auf F (inclusive der sich selbst conjugirten Systeme der Haupttangentencurven) entsprechen wieder insbesondere solche auf Φ.

Setzt man

$$r'^2 = \Sigma \varphi^2$$

so ist $\frac{1}{r'}$ die characteristische Function einer infinitesimalen Biegung von Φ, und für das Product der Krümmungsmasse K und K_1 von F und Φ gilt nach § I), 8) die einfache Beziehung

$$K K_1 = \frac{1}{(rr')^4}$$

Die Fläche Φ ist übrigens noch auf mannigfaltige Weise wählbar, da die drei Functionen φ nur bis auf willkürliche Constanten c_1, c_2, c_3 bestimmt sind. Bezeichnet man die Coordinaten einer bestimmten dieser Flächen Φ, etwa Φ_0 durch ξ^0, so ist allgemein

$$\xi_1 = \xi_1^0 - (c_2 \Theta_3 - c_3 \Theta_2)$$
$$\xi_2 = \xi_2^0 - (c_3 \Theta_1 - c_1 \Theta_3)$$
$$\xi_3 = \xi_3^0 - (c_1 \Theta_2 - c_2 \Theta_1)$$

Die beiden Flächen Θ und φ haben nach § IV), 1) in correspondirenden Puncten parallele Normalen. Bezeichnet man die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Θ und φ mit

Digitized by Google

$$E_1, \quad F_1, \quad G_1$$
$$E_2, \quad F_2, \quad G_2$$

so ist

$$E_2 = D_1 \; E_1 - D \; F_1$$
$$F_2 = D_1 \; F_1 - D \; G_1 = D_{11} E_1 - D_1 F_1$$
$$G_2 = D_{11} F_1 - D_1 G_1$$

mithin

2) $$E_1 G_2 - 2 F_1 F_2 + G_1 G_2 = 0$$
$$E_1 G_1 - F_1^2 = \Omega (E_2 G_2 - F_2^2)$$

Zwei Flächen, die so auf einander bezogen sind, dass die Normalen in entsprechenden Puncten parallel sind und die Gleichung 2) befriedigt ist, heissen nach Herrn Bianchi[1]) zu einander associirt. Zwischen ihnen besteht völlige Reciprocität; während die x_1, x_2, x_3 die Coordinaten einer infinitesimalen Biegung von φ sind, sind auch die ξ_1, ξ_2, ξ_3 die einer solchen von Θ.

Sind umgekehrt zwei Flächen F und F' durch parallele Normalen auf einander bezogen und bezeichnet man die ihnen zugehörigen Grössen D durch D, D_1, D_{11}; D', D'_1, D'_{11}, so ist

3) $$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(D'_{11}\,(\Theta\lambda)_u - D'_1\,(\Theta\lambda)_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D'\,(\Theta\lambda)_v - D'_1\,(\Theta\lambda)_u) = 0$$

wobei unter λ ein geeigneter Factor zu verstehen ist. Setzt man nun

$$W = \Sigma\,(x\,\Theta)$$

so wird

$$\frac{\partial W\lambda}{\partial u} = \Sigma\,x\,(\Theta\lambda)_u$$

$$\frac{\partial W\lambda}{\partial v} = \Sigma\,x\,(\Theta\lambda)_v$$

also auch nach § I) unter 3)

---

[1]) Lezioni, p. 279.

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial u^2} = \Sigma x_u (\Theta\lambda)_u + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uu} = D \ \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uu}$$

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial u \partial v} = \Sigma x_u (\Theta\lambda)_v + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uv} = D_1 \ \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{uv}$$

$$\frac{\partial^2 W\lambda}{\partial v^2} = \Sigma x_v (\Theta\lambda)_v + \Sigma x (\Theta\lambda)_{vv} = D_{11} \Delta\lambda + \Sigma x (\Theta\lambda)_{vv}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit D'_{11}, $-2 D'_1$, D' und addirt, so ergiebt sich vermöge einfacher Umformungen

$$4) \ \frac{\partial}{\partial u}[D'_{11}(W\lambda)_u - D'_1(W\lambda)_v] + \frac{\partial}{\partial v}[D'(W\lambda)_v - D'_1(W\lambda)_u]$$
$$= \lambda \Delta [D_{11} D' - 2 D_1 D'_1 + D D'_{11}].$$

Wird daher angenommen, dass die beiden Flächen associirt sind, so verschwindet die rechte Seite, und damit wird $W\lambda$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung 3). Demnach ist

$$\frac{W\lambda}{r\lambda} = \frac{W}{r}$$

eine characteristische Function für die zweite Fläche. Da aber $\frac{W}{r}$ nichts anderes als der Abstand der Tangentenebene von F vom Coordinatenanfang ist, so erhält man den folgenden von Herrn Bianchi herrührenden Satz.

Bei zwei zu einander associirten Flächen ist der Abstand der Tangentialebene der einen vom Anfang eine characteristische Function der anderen Fläche.[1])

Setzt man dagegen in der Formel 4) $\lambda = 1$ und nimmt sie jetzt für den selbstverständlichen Fall $D = D'$, $D_{11} = D'_{11}$, $D_1 = D'_1$ in Anspruch, so ergiebt sich die Gleichung

$$5) \ \frac{\partial}{\partial u}(D_{11} W_u - D_1 W_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D W_v - D_1 W_u) = 2 \Delta \Omega = 2 \frac{\sqrt{H}}{r}$$

von der später Gebrauch gemacht werden wird.

---

[1]) Sulle deformatione infinitesime delle superficie Rendiconti dell' accad. dei Lincei, 17 Juli 1892. Lezioni p. 278.

Digitized by Google

§ VI. Projective Umformung von Θ.

Wenn die Differentialgleichung B) des § II) für drei Functionen Θ erfüllt ist, so besteht sie auch bei ungeänderten Werthen der D, D_1, D_{11}, falls man an Stelle der Θ lineare ganze Functionen derselben anführt, also die Fläche Θ durch eine affine Fläche ersetzt. Hierdurch geht die Fläche F in andere Flächen über, die man in weiterem Sinne zu Θ adjungirt nennen kann. Lässt man zunächst die drei Θ um Constanten c_1, c_2, c_3 sich ändern, so ergeben sich als Coordinaten x_1', x_2', x_3' der zugehörigen Fläche

$$x_1' = x_1 + c_2\varphi_3 - c_3\varphi_2 + \text{const}$$
$$y_1' = y_1 + c_3\varphi_1 - c_1\varphi_3 + \text{const}$$
$$z_1' = z_1 + c_1\varphi_2 - c_2\varphi_1 + \text{const}$$

falls man mit φ_i die durch Quadratur aus den Formeln des § IV), 3) entstehenden Functionen bezeichnet. Während durch diesen Process wesentlich neue Flächen entstehen, ist dies nicht mehr der Fall, wenn man die Θ durch homogene lineare Functionen ersetzt. Wird nämlich

$$\Sigma\, \Theta_k\, a_{ki} = \Theta_i'$$

gesetzt, derart, dass die Determinante A der a nicht verschwindet, so transformiren sich die Coordinaten der adjungirten Fläche wie Ebenencoordinaten, wie unmittelbar aus der Gleichung A) des § II) durch Multiplication mit A hervorgeht, nach der Gleichung

$$A\, x_i = \Sigma a_{ik}\, x_k'.$$

Um endlich zu der allgemeinsten projectiven Umformung von Θ überzugehen, setze man

$$\Theta_i' = \Sigma a_{ik}\, \Theta_k + a_{i4},\quad i = 1, 2, 3$$
$$\Theta_4' = \Sigma a_{4k}\, \Theta_k + a_{44}$$

Führt man nun in die Identität 2) des § II) an Stelle von

Digitized by Google

$\frac{1}{\lambda}$ den Ausdruck Θ_4' ein, so wird derselben zufolge, da die rechte Seite verschwindet

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\,\Theta_4'^2\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Theta_i'}{\Theta_4'}\right)-D_1\,\Theta_4'^2\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Theta_i'}{\Theta_4'}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial v}\left[D\,\Theta_4'^2\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\Theta_i'}{\Theta_4'}\right)-D_1\,\Theta_4'^2\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\Theta_i'}{\Theta_4'}\right)\right]=0$$

Setzt man also

$$\eta_i=\frac{\Theta_i'}{\Theta_4'}$$

so ist die Fläche η die allgemeinste projective Umformung von Θ. Bei dem durch den Nenner Θ_4' hervorgerufenen Uebergang von der affinen Beziehung zur allgemeinen Projectivität ändert sich nun aber, wie aus der in § II) gemachten Bemerkung hervorgeht, die Fläche F gar nicht mehr, wodurch auf eine bemerkenswerthe Invarianz des Systems der adjungirten Flächen hingewiesen wird.

Und setzt man endlich

$$\Theta_4'^2\,D_{11}\,\frac{\partial\eta}{\partial u}-\Theta_4'^2\,D_1\,\frac{\partial\eta}{\partial v}=\varphi_v'$$

$$\Theta_4'^2\,D_1\,\frac{\partial\eta}{\partial u}-\Theta_4'^2\,D\,\frac{\partial\eta}{\partial v}=\varphi_u'$$

$$-d_1=\frac{D_1}{(DD_{11}-D_1^2)}\,\Theta_4'^2$$

$$-d_{11}=\frac{D_{11}}{(DD_{11}-D_1^2)}\,\Theta_4'^2$$

$$-d=\frac{D}{(DD_{11}-D_1^2)}\,\Theta_4'^2$$

also

$$\frac{\partial\eta}{\partial v}=d_{11}\,\varphi_u'-d_1\,\varphi_v'$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}=d_1\,\varphi_u'-d\,\varphi_v'$$

Digitized by Google

— wobei wiederum den η und φ' gleichzeitig dieselben Indices $i = 1, 2, 3$ zu ertheilen sind — so findet man vermöge der Quadratur

$$\Sigma(b\xi) = \int (b\varphi'\varphi'_u)(d_1 du + d_{11} dv) - \int (b\varphi'\varphi'_v)(d du + d_1 dv)$$

die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 einer infinitesimalen Biegung von η, da ja die Gleichungen

$$\Sigma \eta_u \xi_u = 0 \quad \Sigma(\eta_u \xi_v + \eta_v \xi_u) = 0 \quad \Sigma \eta_v \xi_v = 0$$

erfüllt sind. Hiermit ist ein directer Beweis des Satzes[1]) geliefert:

Kennt man eine unendlich kleine Biegung einer Fläche, so lässt sich auch mittelst Quadraturen eine unendlich kleine Biegung jeder projectiven Umformung derselben bestimmen.

Hierbei ist vorausgesetzt, dass man die drei Grössen D, D_1, D_{11} kennt, vermöge deren die drei beliebig gegebenen Functionen Θ die Gleichungen

$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_u$$

befriedigen. Wie im § III) gezeigt wurde, erfordert dies die Bestimmung einer infinitesimalen Biegung von Θ; aber die dort gegebene Darstellung würde ausserdem noch überflüssige Quadraturen nöthig machen. Ich beweise daher folgenden Satz:

Kennt man die characteristische Function einer infinitesimalen Biegung der — hier als nicht developpabel angenommenen — Fläche Θ mit den Coordinaten $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$, so kann man vermöge blosser Eliminationen und Differentiationen drei Functionen φ_i und ebenso drei andere Functionen D finden, durch die die Identitäten

---

[1]) Darboux Leçons t. IV p. 76–78; Bianchi Lezioni p. 304.

Digitized by Google

$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_v$$

für jeden der hinzugefügten Indices $i = 1, 2, 3$ erfüllt werden.

Es seien also σ die characteristische Function der Deformation von Θ; q_1, q_2, q_3 die Richtungscosinus der Normalen, K das Krümmungsmass, E, F, G die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von Θ;[1]) ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Coordinaten der entsprechenden Deformation $\Theta + \varepsilon\,\xi$, so dass

$$\Sigma\,\xi_u\,\Theta_u = 0 \quad \Sigma\,\xi_u\,\Theta_v = -\Sigma\,\xi_v\,\Theta_u = \sigma\sqrt{\mathsf{H}}, \quad \Sigma\,\xi_v\,\Theta_v = 0$$

und[2])

$$\xi_u = \frac{(Eq_v - Fq_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\,\sigma - q\,\frac{(E\sigma_v - F\sigma_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}$$
$$\xi_v = \frac{(Fq_v - Gq_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\,\sigma - q\,\frac{(F\sigma_v - G\sigma_u)}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\;{}^{3})$$

ist. Man definire nun drei Functionen φ_i durch die Gleichungen[4])

$$\Sigma\,(\varphi\,q) = \sigma$$
$$\Sigma\,(\varphi\,\xi_u) = 0$$
$$\Sigma\,(\varphi\,\xi_v) = 0$$

Vermöge derselben wird aus den vorstehenden Gleichungen durch Multiplication und Addition

$$E\,\Sigma\,q\,\varphi_v - F\,\Sigma\,q\,\varphi_u = 0$$
$$F\,\Sigma\,q\,\varphi_v - G\,\Sigma\,q\,\varphi_u = 0$$

---

[1]) Von der früher gewählten Bezeichnung dieser Grössen für die Fläche Θ wird hier einen Augenblick abgesehen.

[2]) Bianchi, Lezioni, p. 276.

[3]) Es ist also hier

$$\sqrt{\mathsf{H}} = (q\,\Theta_u\,\Theta_v)$$
$$\mathsf{H}K = EG - F^2.$$

[4]) Dieselben gestatten eine Auflösung nach φ, da die Determinante der auf der linken Seite stehenden Coefficienten den Werth $\sigma^2\sqrt{\mathsf{H}}$ hat, also nicht verschwindet.

Digitized by Google

und hieraus folgt

$$\Sigma q \varphi_v = 0 \quad \Sigma q \varphi_u = 0.$$

Da aber die q_1, q_2, q_3 zu der Normalen von Θ gehören, so folgt hieraus weiter

$$\varphi_u = \alpha \Theta_u + \beta \Theta_v$$
$$\varphi_v = \gamma \Theta_u + \delta \Theta_v$$

mithin wird

$$\Sigma \xi_u \varphi_u = -\beta \sigma \sqrt{\mathsf{H}}; \quad \Sigma \xi_u \varphi_v = -\delta \sigma \sqrt{\mathsf{H}}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_u = +\alpha \sigma \sqrt{\mathsf{H}}; \quad \Sigma \xi_v \varphi_v = +\gamma \sigma \sqrt{\mathsf{H}}.$$

Da ferner die Gleichungen

$$\Sigma \xi_u \varphi_u = -\Sigma \varphi \xi_{uu}$$
$$\Sigma \xi_u \varphi_v = -\Sigma \varphi \xi_{uv}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_u = -\Sigma \varphi \xi_{uv}$$
$$\Sigma \xi_v \varphi_v = -\Sigma \varphi \xi_{vv}$$

bestehen, so ergiebt sich

$$\alpha = -\frac{\Sigma \varphi \xi_{uv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \beta = +\frac{\Sigma \varphi \xi_{uu}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$
$$\gamma = -\frac{\Sigma \varphi \xi_{vv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}, \quad \delta = +\frac{\Sigma \varphi \xi_{uv}}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

so dass, wenn man

$$\alpha = -\delta = D_1$$
$$\beta = -D, \quad \gamma = D_{11}$$

setzt

$$D = -\frac{\lambda(E)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$
$$D_1 = -\frac{\lambda(F)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$
$$D_{11} = -\frac{\lambda(G)}{\sigma \sqrt{\mathsf{H}}}$$

wird, falls man zur Abkürzung

Digitized by Google

$$\lambda = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$$

setzt und mit (E), (F), (G) die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von ξ bezeichnet. Hiermit ist aber die verlangte Darstellung ausgeführt und zugleich die Aufgabe gelöst, alle Flächen zu finden, die auf eine gegebene durch parallele Normalen so bezogen werden können, dass die simultane Invariante der beiden aus den Fundamentalgrössen der zweiten Ordnung gebildeten quadratischen Formen verschwindet.

Setzt man endlich noch zur Abkürzung

$$\sigma_1 = \alpha\,\sigma_u + \alpha_1\,\sigma_v - e'\,\sigma - \sigma_{uu}$$
$$\sigma_2 = \beta\,\sigma_u + \beta_1\,\sigma_v - f'\,\sigma - \sigma_{uv}$$
$$\sigma_3 = \gamma\,\sigma_u + \gamma_1\,\sigma_v - g'\,\sigma - \sigma_{vv}$$

wobei die Coefficienten $\alpha, \alpha_1 \ldots e', f', g'$ sich auf die sphärische Abbildung von Θ beziehen, so hat man übrigens

$$\frac{\lambda\,(E)}{\sigma} = \frac{\sigma_2 E - \sigma_1 F}{K\sqrt{\mathsf{H}}}$$

$$\frac{\lambda(F)}{\sigma} = \frac{\sigma_3 E - F\sigma_2}{K\sqrt{\mathsf{H}}} = \frac{\sigma_2 F - G\,\sigma_1}{K\sqrt{\mathsf{H}}}$$

$$\frac{\lambda\,(G)}{\sigma} = \frac{\sigma_3 F - \sigma_2 G}{K\sqrt{\mathsf{H}}}.$$

§ VII. Aequidistant gebogene Flächen.

Ist die Fläche F eine Minimalfläche und auf die Cosinus ihrer Normalen Θ_1, Θ_2, Θ_3 bezogen, oder nach der in § III) eingeführten Ausdrucksweise der Kugel Θ adjungirt, so ist $r = 1$ und demgemäss die in § II) mit M bezeichnete Grösse gleich Null. Die Differentialgleichung II) der Einleitung befindet sich daher in ihrer Normalform, und auch umgekehrt wird sich nur dann bei einer zur Kugel adjungirten Fläche die Differentialgleichung II) in der Normalform befinden, wenn dieselbe eine Minimalfläche ist.

Ein besonderes Interesse besitzen diejenigen Flächen,

Digitized by Google

welche eine infinitesimale äquidistante Biegung gestatten, bei der also alle Puncte der Fläche gleich lange Wegelemente beschreiben. Sollen nun φ_1, φ_2, φ_3 die Coordinaten einer solchen Verschiebung sein, so ist $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 =$ Constans. Dann aber ist die in § V) eingeführte Fläche Φ eine Minimalfläche, für die φ_1, φ_2, φ_3 den Cosinus ihrer Normalen bis auf einen constanten Factor, den man auch gleich der Einheit annehmen kann, proportional sind. Da man auch umgekehrt diese Minimalfläche beliebig annehmen kann, so erhält man die explicite Darstellung aller Flächen, welche eine infinitesimale äquidistante Biegung gestatten, wenn man, von den Gleichungen einer Minimalfläche ausgehend, dieselbe der Kugel φ_1, φ_2, φ_3 adjungirt. Alsdann kann man nach dem im § VI auseinandergesetzten Verfahren mit Hülfe der characteristischen Function die Grössen Θ_1, Θ_2, Θ_3 finden, aus denen endlich vermöge der Formeln I) die Coordinaten der gesuchten Fläche sich durch Quadratur ergeben.[1])

§ VIII. Die adjungirte Beziehung.

In § III) ist als adjungirte Fläche einer Fläche Θ die Fläche F bezeichnet worden. Umgekehrt ist eine gegebene Fläche F zu unendlich vielen Flächen Θ adjungirt, und die Aufgabe, alle diese Flächen zu finden, ist geradezu die der infinitesimalen Deformationen von F. Denn bezeichnet man

[1]) Im XXI. Bande des Bulletin de la Société Mathém. de France, p. 134, 1893 hat Herr Caronnet (Sur des couples de surfaces applicables) diejenigen Flächen untersucht, welche so in isometrische Beziehung versetzt werden können, dass die Entfernung correspondirender Puncte constant ist. Das dort benutzte Verfahren, mit Hülfe des aus den Linien von der Länge Null gebildeten Coordinatensystems die Gleichungen in eine übersichtliche Form zu bringen, lässt sich natürlich auch hier anwenden, wo diese Entfernung eine unendlich kleine Constante sein soll; ich bemerke hier nur, dass man dann auf die Liouville'sche partielle Differentialgleichung geführt wird. Die expliciten Gleichungen der äquidistant verbiegbaren Flächen finden sich übrigens schon bei Darboux, théorie générale, t. IV, p. 17, wie ich erst später bemerkte.

Digitized by Google

mit ψ die characteristische Function irgend einer Deformation von F, so sind

$$\Theta_1 = \frac{p_1}{\psi}, \quad \Theta_2 = \frac{p_2}{\psi}, \quad \Theta_3 = \frac{p_3}{\psi}$$

die Coordinaten jeder Fläche, zu der F adjungirt ist. Alle diese Flächen sind, wie man sieht, durch Centralprojection vom Anfang der Coordinaten auf einander bezogen.

Mittelst der in der Einleitung angegebenen Bezeichnung für die Christoffel'schen zu dem sphärischen Bilde von F gehörigen Symbole kann man leicht die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung für Θ angeben. Sind nämlich, wie früher, die Cosinus der Normalen von Θ durch q_1, q_2, q_3 bezeichnet, und setzt man, was nach der in § III für Θ eingeführten Voraussetzung immer zulässig ist,

$$q = \lambda \Theta_u + \mu \Theta_v + \nu p$$

so wird

$$\Theta_{uu} = \Theta_u \left(a - \frac{2\psi_u}{\psi} - \lambda \frac{\delta}{\nu}\right) + \Theta_v \left(a_1 - \mu \frac{\delta}{\nu}\right) + \frac{\delta}{\nu} q$$

$$1) \quad \Theta_{uv} = \Theta_u \left(\beta - \frac{\psi_v}{\psi} - \lambda \frac{\delta_1}{\nu}\right) + \Theta_v \left(\beta_1 - \frac{\psi_u}{\psi} - \mu \frac{\delta_1}{\nu}\right) + \frac{\delta_1}{\nu} q$$

$$\Theta_{vv} = \Theta_u \left(\gamma - \lambda \frac{\delta_{11}}{\nu}\right) + \Theta_v \left(\gamma_1 - \frac{2\psi_v}{\psi} - \mu \frac{\delta_{11}}{\nu}\right) + \frac{\delta_{11}}{\nu} q$$

falls zur Abkürzung

$$\delta = \frac{1}{\psi^2} [a\psi_u + a_1 \psi_v - e'\psi - \psi_{uu}]$$

$$2) \quad \delta_1 = \frac{1}{\psi^2} [\beta\psi_u + \beta_1 \psi_v - f'\psi - \psi_{uv}]$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{\psi^2} [\gamma\psi_u + \gamma_1 \psi_v - g'\psi - \psi_{vv}]$$

die mit ν multiplicirten Fundamentalgrössen zweiter Ordnung

Digitized by Google

von Θ bedeuten. Nach § III), 2) ist aber die Gleichung, der die Function ψ genügen muss

$$3) \qquad E\delta_{11} - 2F\delta_1 + G\delta = 0.^{1})$$

Dabei ist zugleich

$$\psi \Sigma x_u \Theta_u = -E, \quad \psi \Sigma x_v \Theta_v = -G$$
$$\psi \Sigma x_v \Theta_u = -F = +\psi \Sigma x_u \Theta_v$$

also

$$-\Sigma dx\, d\Theta = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\psi}$$

oder, wenn man mit ds, $d\sigma$ correspondirende Längenelemente auf F, Θ, mit ε den Winkel derselben, mit ϱ den Krümmungshalbmesser des zugehörigen Normalschnittes von F bezeichnet

$$-\varrho\psi\cos\varepsilon = \frac{ds}{d\sigma}$$

Den Richtungen der Haupttangenten von F (und nur diesen) entsprechen daher auf jeder Fläche, zu der F adjungirt ist, dazu senkrechte; die Haupttangentencurven von F stehen senkrecht auf denjenigen, die ihnen auf Θ entsprechen. —

Es soll sich nun im folgenden um eine nähere Characterisirung der adjungirten Beziehung handeln. Insbesondere, welche Eigenschaften besitzen diejenigen Flächen, die zu gegebenen Flächen Θ adjungirt sind? In Rücksicht auf die ausgezeichnete Stellung, welche projective Umformungen von Θ besitzen, § VI), soll hier nur auf solche Charactere von Θ Bezug genommen werden, welche projectiven Umformungen gegenüber ungeändert bleiben. Und auch von diesen kann hier nur eine kleine Zahl herausgehoben werden, da die Untersuchungen sonst die hier gesteckten Grenzen weit überschreiten würden.[2])

---

1) Diese Form der Weingarten'schen Differentialgleichung (Kronecker's Journal C. p. 303), auch bei Bianchi Lezioni, p. 277.

2) Aus demselben Grunde habe ich mir gestattet, an manchen Stellen des folgenden nur anzudeuten, in welcher Weise die betreffenden Untersuchungen weiter ausgeführt werden könnten.

Digitized by Google

Man kann die Gleichung 3) zunächst durch die Annahme $\delta = \delta_1 = \delta_{11} = 0$ erfüllen. Die Fläche Θ ist dann eine Ebene; die characteristische Function ψ ist durch das unbeschränkt integrable System der Gleichungen 2), in denen die linken Seiten gleich Null zu nehmen sind, definirt, dessen allgemeinste Lösung, wie aus der Bedeutung der $\alpha, \alpha_1 \ldots e', f', g'$ als der zur sphärischen Abbildung von F gehörigen Christoffel'schen Symbole hervorgeht, mit Hülfe von drei willkürlichen Constanten a_1, a_2, a_3 durch

$$\psi = a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

ausgedrückt wird. In der That wird dann auch $\Sigma(a\Theta) = 1$. Jede Fläche kann also auf unendlich viele Arten der Ebene adjungirt werden, aber die zugehörigen infinitesimalen Biegungen sind einfach die unendlich kleinen Bewegungen der Fläche.[1])

Soll Θ auf Haupttangentencurven bezogen sein, so ist $\delta = \delta_{11} = 0$ zu setzen. Dann ist nach 3) nothwendig $F = 0$, d. h. das Coordinatensystem auf der Fläche F ein conjugirtes. Aber dies ist nicht hinreichend. Denn für ψ hat man nach 2) die Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} \psi_{uu} &= \alpha\psi_u + \alpha_1\psi_v - e'\psi \\ \psi_{uv} &= \beta\psi_u + \beta_1\psi_v - f'\psi + X \\ \psi_{vv} &= \gamma\psi_u + \gamma_1\psi_v - g'\psi \end{aligned}$$

falls mit X eine noch zu bestimmende Function von u, v bezeichnet wird. Dieselbe muss den Integrabilitätsbedingungen von 4) zufolge den Gleichungen

$$\frac{\partial l X}{\partial u} = \alpha - \beta_1$$

$$\frac{\partial l X}{\partial v} = \gamma_1 - \beta$$

genügen. Da aber nach den Gleichungen 6) der Einleitung

[1]) Bianchi, Lezioni, p. 277.

Digitized by Google

$$\alpha + \beta_1 = \frac{\partial l\sqrt{h}}{\partial u}, \quad \beta + \gamma_1 = \frac{\partial l\sqrt{h}}{\partial v}$$

$$\beta = -A_1 \frac{G}{E}, \quad \beta_1 = -C\frac{E}{G}$$

ist, so ergiebt sich für F die weitere Bedingung

$$5) \qquad \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \frac{EC}{G}}{\partial v} = \frac{\partial \frac{A_1 G}{E}}{\partial u}$$

Diese Gleichung sagt nach den bekannten Untersuchungen des Herrn Dini[1]) aus, dass das conjugirte System auf F zum sphärischen Bilde die sphärische Abbildung des Systems der Haupttangentencurven einer (anderen) Fläche haben muss. Bezeichnet man unter dieser Voraussetzung mit ψ_0 eine der Lösungen des unbeschränkt integrabelen Systems 4), so ist die allgemeinste Lösung, wie aus der vorher gemachten Bemerkung folgt:

$$\psi = \psi_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

Die Bedingung 5) ist insbesondere erfüllt für diejenigen Flächen, auf denen $A_1 = C = 0$ ist, d. h. auf denen ein conjugirtes Curvensystem von geodätischen Linien existirt; diese entsprechen dabei den Haupttangentencurven von Θ; eine weitere Ausführung aber muss hier unterbleiben.

Die Fläche Θ wird zur Regelfläche, wenn noch die Bedingung $a_1 = 0$ hinzugefügt wird; denn nach 2) sind dann die Haupttangentencurven u (variabel) zugleich geodätisch. Der Gleichung $a_1 = -\frac{BE}{G}$ (Einleitung 7)) zufolge muss jetzt aber B verschwinden, die Fläche F also ein conjugirtes System zulassen, dessen eine Curvenschaar aus den Berührcurven von umschriebenen Cylindern besteht, oder „cylindrisch" ist; ausserdem muss natürlich die Bedingung 5) erfüllt sein. Es ist leicht diese Flächenklasse vollständig

[1]) U. Dini, sopra alcune formole generali . . Ann. di Matematica, ser. II, t. IV. p. 183.

Digitized by Google

durch Gleichungen zu definiren. Nimmt man nämlich an, dass

$$F = 0, \quad B = 0, \quad \beta = \frac{\partial l \varphi}{\partial v}, \quad \beta_1 = \frac{\partial l \varphi}{\partial u}, \quad a_1 = 0$$

sei, so folgt aus den Gleichungen 6) der Einleitung

$$E_v = \beta E, \quad E = \varphi U$$

wo U nur Function von u ist, und ebenso

$$B_1 + \beta_1 = \frac{\partial l G}{\partial u}, \quad B_1 = \frac{\partial l \left(\frac{G}{\varphi}\right)}{\partial u}$$

Die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = B \frac{\partial x}{\partial u} + B_1 \frac{\partial x}{\partial v}$$

liefern nun

$$\frac{\partial l x_v}{\partial u} = \frac{\partial l \frac{G}{\varphi}}{\partial u} \quad \text{oder nach Integration}$$

$$x_v^i = \frac{G}{E} U V_i$$

und damit die Darstellung der Fläche F in der Form

$$6) \qquad x_i = U \int \lambda V_i \, dv + U_i$$

wo U_i, V_i, U willkürliche Functionen der zugehörigen Argumente u, v allein bedeuten, und λ zur Abkürzung für $\frac{G}{E}$ gesetzt ist. Aber die Gleichung 6) liefert noch keine explicite Darstellung der Coordinaten von F, da die Function λ von u und v nicht willkürlich angenommen werden darf, vielmehr noch einer complicirten Differentialgleichung genügen muss.

Eine solche erhält man aber, wenn man sich der von Herrn Königs[1]) angegebenen expliciten Darstellung aller

[1]) Königs, G. Détermination sous forme explicite de toute surface réglée rapportée à ses lignes asymptotiques, Compt. Rend. CVI, p. 51—54, 1888.

Digitized by Google

Regelflächen in Bezug auf das System ihrer Haupttangentencurven bedient. Nimmt man demgemäss

$$\Theta_{uu} = a\,\Theta_u,$$
$$\Theta_{uv} = b\,\Theta_u + b_1\,\Theta_v + q\,F_1,$$
$$\Theta_{vv} = c\,\Theta_u + c_1\,\Theta_v$$

wo sich die a, b, b_1, c, c_1, F_1 ohne Schwierigkeit aus den von Herrn Königs angegebenen Formeln berechnen lassen, so ergeben sich nach § III), 2) für die Grössen D, D_1, D_{11} der Fläche F die Gleichungen

$$D_1 = 0 \quad D_{11}\,a + D\,c + D_{11\,u} = 0$$
$$D\,c_1 + D_v = 0$$

Da aber nothwendiger Weise

$$c_1 = \frac{\partial\, l\sqrt{F_1 h}}{\partial v}, \quad a = \frac{\partial\, l\sqrt{F_1 h}}{\partial u}$$

ist, so folgt

$$D = \frac{U}{\sqrt{F_1 h}}, \quad D_{11}\sqrt{F_1 h} = -\int c\,U\,du + V$$

und man erhält jetzt die expliciten Coordinaten dieser Flächenclasse durch Quadraturen, sowie man die ermittelten Werthe der D, D_1, D_{11} in die Gleichung I) einträgt. Es ist damit zugleich die Bestimmung aller Flächen gegeben, auf denen die eine Schaar der Curven eines conjugirten Systems, dessen sphärische Abbildung der Dini'schen Differentialgleichung 5) genügt, cylindrisch ist.

Die Regelfläche wird insbesondere zur Fläche zweiten Grades, wenn auch γ mithin B_1 gleich Null angenommen wird. Dann aber wird F eine Translationsfläche, wie übrigens auch unmittelbar aus 6) hervorgeht, denn es wird $G = \varphi\,V$, also x_i von der Form $U_i + V_i$. Die Coordinaten dieser Flächen kann man unmittelbar hinschreiben; es sind übrigens ganz specielle Translationsflächen, da ihr sphäri-

Digitized by Google

sches Bild aus dem auf die Kugel projicirten Systeme der Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades bestehen muss.[1])

[1]) Die im Texte enthaltene Bemerkung erkennt man sehr leicht im Zusammenhang mit den Betrachtungen des § IV); sie kommt übrigens auf den geometrisch fast selbstverständlichen Satz hinaus, dass eine Haupttangentencurve längs deren die Normalen der Fläche einer festen Ebene parallel sind, eine Gerade ist. Um dies direct nachzuweisen, beweise ich den folgenden, vielleicht neuen Satz:

Eine Haupttangentencurve, längs deren die Flächennormalen mit einer festen Richtung einen constanten Winkel bildet, ist eine Schraubenlinie.

Sei also u eine Haupttangentencurve der auf das System ihrer Haupttangentencurven u, v bezogenen Fläche, p_i die Cosinus der Normalen. Ist nun längs der Curve u

$$\Sigma p_i V_i = \text{const} = c,$$

so folgt durch Differentiation nach u (nach Einleitung 1) u. 2))

$$f \Sigma V x_u - e \Sigma V x_v = 0$$

oder

$$\Sigma V x_u = \lambda e$$

$$\Sigma V x_v = \lambda f$$

Durch weitere Differentiation folgt:

$$B \Sigma V x_u + B' \Sigma V x_v + c F = \lambda_u f + \lambda f_u$$

$$A \Sigma V x_u + A' \Sigma V x_v \qquad = \lambda_u e + \lambda e_u$$

oder

$$\lambda (B e + B' f) + c F = \lambda_u f + \lambda f_u$$

$$\lambda (A e + A' f) \qquad = \lambda_u e + \lambda e_u$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber

$$\lambda = \frac{V}{\sqrt{e}}$$

wo V eine Function von v allein ist, während die erste übergeht in

$$\lambda A_1 \mathsf{H} = c e F$$

oder

$$\frac{A_1 \sqrt{\mathsf{H}}}{e \sqrt{e}} = \frac{c F}{V \sqrt{\mathsf{H}}}.$$

Die (geodätische) Krümmung der Haupttangentencurve ist daher gleich $\frac{c}{V} \sqrt{K}$, wenn K das Krümmungsmass der Fläche bezeichnet. Da

Digitized by Google

Zu diesen Flächen gehören insbesondere auch die Minimalflächen. Setzt man für einen Augenblick

$$\delta \psi^2 = d, \quad \delta_1 \psi^2 = d_1, \quad \delta_{11} \psi^2 = d_{11}$$

so geben die Gleichungen 2)

$$\begin{aligned} \psi_{uu} &= \alpha \psi_u + \alpha_1 \psi_v - e' \psi + d \\ \psi_{uv} &= \beta \psi_u + \beta_1 \psi_v - f' \psi + d_1 \\ \psi_{vv} &= \gamma \psi_u + \gamma_1 \psi_v - g' \psi + d_{11}; \end{aligned}$$

sie erfordern die Integrabilitätsbedingungen

$$7) \qquad \alpha d_1 + \alpha_1 d_{11} + \frac{\partial d}{\partial v} = \beta d + \beta_1 d_1 + \frac{\partial d_1}{du}$$

$$\beta d_1 + \beta_1 d_{11} + \frac{\partial d_1}{\partial v} = \gamma d + \gamma_1 d_1 + \frac{\partial d_{11}}{\partial u}$$

nebst der Gleichung 3)

$$3) \qquad E d_{11} - 2 F d_1 + G d = 0$$

Die beiden Gleichungen 7) sind immer erfüllt für $d = k e'$, $d_1 = k f'$, $d_{11} = k g'$, falls k eine beliebige Constante bedeutet, denn es sind die Gleichungen 4) der Einleitung für die Kugelfläche. Aber die Gleichung 3) besteht für die Werthe der d nur dann, wenn

$$E e' + G f' - 2 F g' = 0$$

d. h. wenn F' eine Minimalfläche ist. Man erhält so die Lösung

$$\psi = k + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

und das heisst: Jede Minimalfläche ist adjungirt zu den Flächen zweiten Grades

$$\Theta_i = \frac{p_i}{\psi}$$

deren Gleichung

$$k^2 \Sigma \Theta^2 = [1 - \Sigma (\Theta a)]^2$$

---

aber die Torsion der Haupttangentencurve ebenfalls zu $\sqrt{K}$ proportional ist, so hat die Curve die Eigenschaft, dass das Verhältniss ihrer beiden Hauptkrümmungen ein constantes ist, wie zu zeigen war.

Digitized by Google

ist; es sind dies Rotationsflächen zweiten Grades mit imaginären Erzeugenden.

Die Fläche Θ kann auch eine Developpabele werden. Wählt man die Erzeugenden derselben zu den Curven u (variabel), so ist $\delta = \delta_1 = 0$, also nach 3) auch $E = 0$. Durch Wahl der Curven v aber lässt sich erreichen, dass auch G gleich Null wird. Da jetzt auch $a_1 = 0$ ist, folgt nach 6) der Einleitung $A_1 = 0$, d. h. die Fläche F ist eine Regelfläche. Jede Regelfläche kann also einer Developpabelen adjungirt werden, und umgekehrt können auch nur Regelflächen zu developpabelen Flächen adjungirt sich verhalten. Dabei stehen, wie oben bemerkt, die Erzeugenden der beiden Flächen F und Θ auf einander senkrecht.

In der That, setzt man nach 2)

$$\psi_{uu} = a\,\psi_u - c'\,\psi$$
$$\psi_{uv} = \beta\,\psi_u + \beta_1\,\psi_v - f'\,\psi$$
$$\psi_{vv} = \gamma\,\psi_u + \gamma_1\,\psi_v - g'\,\psi + X$$

wo X eine noch zu bestimmende Function bezeichnet, so muss zufolge der noch erforderlichen Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial l X}{\partial u} = \beta_1 = \frac{\partial}{2}\frac{\partial l \frac{F}{\sqrt{H}}}{\partial u}$$

X aus der Gleichung

$$X = V\sqrt{\frac{F}{\sqrt{H}}}$$

bestimmt werden. Da die Function V noch vollkommen willkürlich bleibt, so kann jede Regelfläche noch unendlich vielen Developpabelen adjungirt werden;[1]) ich werde später zeigen, dass man jede Regelfläche sogar noch auf unendlich viele Arten solchen Developpabelen adjungiren kann, die einer gegebenen Fläche, insbesondere der Kugel, umschrieben sind.

[1]) Es dürfte nicht uninteressant sein, die hierin enthaltenen Möglichkeiten genauer zu untersuchen.

Digitized by Google

Einen noch specielleren Character besitzen natürlich diejenigen Flächen, welche einer Kegelfläche, deren Spitze nicht mit dem Coordinatenanfang zusammenfallen darf, adjungirt sind. Es ist leicht, die expliciten Coordinaten dieser Flächen anzugeben.

Sind

$$\Theta_i = a_i + u x_i$$

die Coordinaten einer Kegelfläche mit der Spitze a_i, die x_i also Functionen von v, welche die Gleichung $\Sigma x_i^2 = 1$ erfüllen, so wird das System der Coefficienten e, f, g für Θ gegeben durch

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = u^2 \omega^2$$

wenn $\omega^2 = \Sigma x_v^2$ gesetzt wird. Die in § III), 1) mit $A', A_1' \ldots$ bezeichneten Christoffel'schen Ausdrücke für Θ werden daher

$$A' = 0, \; A_1' = 0, \; B' = 0, \; B_1' = \frac{g_u}{2g}, \; C' = -\frac{g_u}{2}, \; C_1' = \frac{g_v}{2g}$$

und die Gleichungen 2) des § III) geben

$$D_{11u} - D_{1v} = 0, \; D_1 g_u + D_{1u} g = 0, \; D = 0$$

oder

$$D_1 = \frac{V}{u^2}, \; D_{11} = -\frac{V'}{u} + V_1$$

wo V' der Differentialquotient von V, V_1 eine neue willkürliche Function von v ist. Hieraus folgt dann für die Coordinaten der zu Θ adjungirten Fläche die Darstellung

$$x_1 = \int (a_2 z - a_3 y) V_1 \, dv - \int (y z_v - z y_v) V \, dv - (a_2 z - a_3 y) \frac{V}{u}$$

nebst analogen Ausdrücken für x_2 und x_3.

Da also

$$\Sigma (a x) = -\int (a x x_v) V \, dv$$

wird, so ist längs jeder Erzeugenden die Projection des Radius Vector der Fläche auf die feste Richtung a_1, a_2, a_3 constant, d. h. die zu Kegelflächen adjungirten Flächen sind Regelflächen, deren Erzeugende einer festen Ebene parallel sind.

Digitized by Google

Man wird unmittelbar übersehen, wie sich derartige Untersuchungen, die hier nur für die einfachsten projectiv ausgezeichneten Flächen Θ angedeutet sind, in der mannigfaltigsten Weise fortsetzen lassen. Nur ein Fall mag hier noch angeführt werden. Sind die Curven u, v auf F zunächst nur der Bedingung unterworfen, ein conjugirtes System zu bilden, so ist die Function ψ den Gleichungen 7) gemäss zu bestimmen. Man setze daher

$$d_1 = \mu, \quad d = \varrho E, \quad d_{11} = -\varrho G$$

so dass aus 7) entsteht

$$\alpha\mu - \alpha_1 \varrho G + \frac{\partial \varrho E}{\partial v} = \beta \varrho E + \beta_1 \mu + \frac{\partial \mu}{\partial u}$$

$$\beta\mu - \beta_1 \varrho G + \frac{\partial \mu}{\partial v} = \gamma \varrho E + \gamma_1 \mu - \frac{\partial \varrho G}{\partial u}$$

oder nach 6) der Einleitung

$$\mu\left[\frac{\partial l E}{\partial u} - A + C\frac{E}{G}\right] - \frac{\partial \mu}{\partial u} = -E[2\varrho B + \varrho_v]$$

$$\mu\left[\frac{\partial l G}{\partial v} - C_1 + A_1\frac{G}{E}\right] - \frac{\partial \mu}{\partial v} = G[2\varrho B_1 + \varrho_u]$$

Ist nun die Fläche F auf ein conjugirtes System gleicher Invarianten bezogen, so kann man diese Gleichungen durch die Annahme $\mu = 0$ erfüllen, womit zugleich ϱ bis auf einen constanten Factor bestimmt ist. Die Fläche Θ ist nun auf ein conjugirtes System bezogen; man hat einfach den bekannten Satz, dass zu jedem conjugirten System gleicher Invarianten eine infinitesimale Biegung gehört. — Wenn aber auch noch die Bedingungen

$$\frac{\partial l \mu}{\partial u} = \frac{\partial l E}{\partial u} + C\frac{E}{G} - A$$

$$\frac{\partial l \mu}{\partial v} = \frac{\partial l G}{\partial v} + A_1\frac{G}{E} - C_1$$

erfüllt werden können, welche wegen der für conjugirte Systeme allgemein gültigen Identität

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 l \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(A_1 \frac{G}{E}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(C \frac{E}{G}\right) = B_u - B'_v$$

in

$$\frac{\partial^2 l \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \beta}{\partial u} = \frac{\partial \beta_1}{\partial v}$$

übergehen, so ergiebt sich auch μ gleich einer mit einer Constanten multiplicirten Function. Man hat also den Satz:

Wenn auf einer Fläche ein conjugirtes System gleicher Invarianten existirt, dessen sphärisches Bild zugleich das der Haupttangentencurven einer Fläche ist, so können durch Quadratur zwei Functionen $c_1 \varrho$, $c \mu$ gefunden werden, vermöge deren das System

$$\psi_{uu} = \alpha \psi_u + \alpha_1 \psi_v - e' \psi + \varrho c E$$
$$\psi_{uv} = \beta \psi_u + \beta_1 \psi_v - f' \psi + c_1 \mu$$
$$\psi_{vv} = \gamma \psi_u + \gamma_1 \psi_v - g' \psi - \varrho c G$$

unbeschränkt integrabel wird, so dass nun ∞^1 infinitesimale Biegungen dieser Flächen bekannt sind. Auf eine nähere Untersuchung der Flächen, bei denen die angegebenen Bedingungen erfüllt sind, gehe ich hier nicht ein.[1])

§ IX. Kinematisches.

Der Punct der Fläche F mit den Coordinaten x nimmt vermöge der Deformation, deren Componenten φ_i $(i = 1, 2, 3)$ sind, die Lage

$$x_i + \varepsilon \varphi_i$$

an. Daher ist die Grösse der relativen Coordinatenverschiebung für den Punct $x_i + dx_i$ gegeben durch die Componenten

$$\varepsilon d\varphi_1, \ \varepsilon d\varphi_2, \ \varepsilon d\varphi_3$$

Man hat sich dabei vorzustellen, dass alle zum Puncte x unendlich benachbarten Puncte durch die Translation $\varepsilon \varphi_i$

[1]) Einige weitere Bemerkungen über diese Flächengattung findet man bereits in meiner Arbeit „Zur Theorie der Krümmung der Flächen," Mathematische Annalen Bd. 39, insbesondere S. 248 ff.

Digitized by Google

verschoben werden. Durch diesen Process kommt der Punct x in seine neue Lage, während die übrigen erst durch die angegebenen Verschiebungscomponenten in dieselbe gebracht werden können.

Aus der Gleichung

$$\Sigma a\, dx = (a\, \Theta\, d\varphi)$$

des § IV) erhält man aber

$$1)\qquad \begin{aligned} dx_1 &= \Theta_2\, d\varphi_3 - \Theta_3\, d\varphi_2 \\ dx_2 &= \Theta_3\, d\varphi_1 - \Theta_1\, d\varphi_3 \\ dx_3 &= \Theta_1\, d\varphi_2 - \Theta_2\, d\varphi_1 \end{aligned}$$

und hieraus

$$2)\qquad \begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{1}{r^2}(\Theta_3\, dx_2 - \Theta_2\, dx_3) + \frac{\Theta_1}{r}\,\omega \\ d\varphi_2 &= \frac{1}{r^2}(\Theta_1\, dx_3 - \Theta_3\, dx_3) + \frac{\Theta_2}{r}\,\omega \\ d\varphi_3 &= \frac{1}{r^2}(\Theta_2\, dx_1 - \Theta_1\, dx_2) + \frac{\Theta_3}{r}\,\omega \end{aligned}$$

falls

$$3)\qquad \omega = \frac{1}{r}\,\Sigma\,\Theta_i\, d\varphi_i$$

gesetzt wird. Diese Verrückungen 2) entsprechen einer Rotationsgeschwindigkeit um die zu x gehörige Normale von F, deren Grösse die characteristische Function $\frac{1}{r}$ der Deformation ist,[1]) und einer in der Richtung dieser Normale stattfindenden Translationsgeschwindigkeit ω. Diese letztere ist für jeden Punct in der Nähe von x eine besondere, nämlich

$$\omega = du\,[D_1 r_u - D r_v] + dv\,(D_{11} r_u - D_1 r_v]$$

wie sich aus 3) ergiebt, wenn man an Stelle der $d\varphi$ ihre Werthe aus § IV), 1) einsetzt. Hieraus folgt der Satz:

[1]) Diese Bemerkung ist nach Bianchi Lezioni p. 275 zuerst von Volterra, Sulle deformazione delle superficie flessibili ed inestensibili, Rendiconti dell' Acc. dei Lincei, April 6. 1884. gemacht.

Digitized by Google

Nur für die Minimalflächen giebt es infinitesimale Biegungen, die in einer Rotation um die Flächennormale bestehen, deren Grösse die characteristische Function der Deformation ist, — denn ω kann nur dann verschwinden, wenn r eine Constante ist.

Aus der am Eingang des § II) entwickelten Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11} r_u - D_1 r_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D r_v - D_1 r_u) = -\sqrt{\mathsf{H}}\left(\frac{eG + Eg - 2Ff}{r\,\mathsf{H}}\right)$$

folgt durch Multiplication mit $du\,dv$ und Integration über ein beliebiges Flächenstück von F, dessen Element durch $dT = \sqrt{\mathsf{H}}\,du\,dv$ bezeichnet wird, wenn man zugleich unter k die mittlere Krümmung von F versteht

$$4) \qquad \int \frac{k}{r}\,dT = \int \omega$$

wo rechterhand das Integral über die Begrenzung des Flächenstückes zu nehmen ist. Es ist vielleicht nicht unpassend, das Integral linker Hand die totale Verschiebung des Flächenstückes zu nennen; dieselbe wird nach der soeben angegebenen Formel durch das über die Verschiebungen ω genommene Curvenintegral ausgedrückt.

Andererseits folgt aus der Formel 5) des § V), wenn man zur Abkürzung

$$W = (W_u D_{11} - W_v D_1)\,dv + (W_u D_1 - W_v D)\,du$$

setzt

$$5) \qquad 2\int \frac{dT}{r} = \int W,$$

und diese Formel drückt das über die characteristische Function erstreckte Flächenintegral durch ein Randintegral aus; man kann das erstere die totale Rotation des betreffenden Flächenstückes nennen. Bei den Flächen constanter mittlerer Krümmung (mit Ausnahme der Minimalflächen) ist die totale Rotation eines Flächenstückes proportional mit der totalen Verschiebung.

Digitized by Google

Durch die Betrachtung der Fläche Θ, zu der F adjungirt ist, erhalten diese Sätze eine grössere Anschaulichkeit. Bezeichnet man, wie früher, die Richtungscosinus der Normale von Θ durch q_1, q_2, q_3, so ist nach 1)

$$\Sigma q\, d\,\Theta = 0 = \Sigma q\, d\,\varphi$$

also wegen

$$q_3\, d x_2 - q_2\, d x_3 = d\varphi_1\, \Sigma q\, \Theta - \Theta_1\, \Sigma q\, d\varphi$$

$$d\varphi_1 = \frac{1}{s}\,(q_3\, d x_2 - q_2\, d x_3)$$

6) $$d\varphi_2 = \frac{1}{s}\,(q_1\, d x_3 - q_3\, d x_1)$$

$$d\varphi_3 = \frac{1}{s}\,(q_2\, d x_1 - q_1\, d x_2)$$

wenn $$s = \Sigma q\, \Theta$$

der Abstand der Tangentialebene der Fläche Θ vom Anfang der Coordinaten ist. Die relative Deformation in der Nähe des Punctes x besteht also immer in einer Rotation um eine durch den Punct x gehende, der Normale derjenigen Fläche, zu der F adjungirt ist, parallele Axe mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{s}$. Daher bezeichnet

$$D_F = \int \frac{d\,T}{s}$$

zugleich die Grösse der totalen Deformation des Flächenstückes F.

Setzt man nun das Flächenelement von Θ gleich

$$du\, dv \sqrt{h}$$

so ist nach § I), 3)

$$s = \frac{\Delta}{\sqrt{h}}$$

oder, wenn man den Werth von Δ aus § I), 6) und 8) einführt,

Digitized by Google

$$D_F = \int \frac{\sqrt{h}\, du\, dv}{r^3 K}$$

Beachtet man, dass der Coefficient h_1 in dem Flächenelement $dt_1 = \sqrt{h_1}\, du\, dv$ der Fläche φ (§ IV) mit h durch die Gleichung

$$h_1 = h\, \Omega^2$$

verbunden ist, so hat man

$$D_F = \int r\, dt_1;$$

die totale Deformation von F ist also auch gleich dem über die Fläche φ erstreckten Integral des reciproken Werthes der characteristischen Function der Deformation von F.

Bezeichnet man den Winkel zwischen der Axe der totalen Rotation und der Richtung der Verschiebung $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ durch ε, so ist

$$\operatorname{Cos} \varepsilon = \frac{1}{r_1} \Sigma (\varphi q) = \frac{1}{r_1 \sqrt{h}} (\Theta_u\, \Theta_v\, \varphi)$$

Multiplicirt man die Determinante rechter Hand mit

$$(\xi_u\ \xi_v\ q)$$

deren Quadrat gleich $r_1^2 \mathsf{H}_1$ ist, wo $\sqrt{\mathsf{H}_1}\, du\, dv$ das Flächenelement von Φ bedeutet, so ergiebt sich als Product

$$r_1^2 (\varphi\ \Theta_u\ \Theta_v)^2$$

so dass

$$(\varphi\ \Theta_u\ \Theta_v) = \frac{1}{r_1} \sqrt{\mathsf{H}_1}$$

oder auch

$$\operatorname{Cos} \varepsilon = \frac{\sqrt{\mathsf{H}_1}}{\sqrt{h}}$$

wird.

Um die Grösse der Rotation $\frac{1}{s}$ durch Formeln auszudrücken, die sich unmittelbar an die Weingarten'sche Theorie anschliessen, kann man folgendermassen verfahren. Bezeichnet

Digitized by Google

man die zu der characteristischen Function ψ der Deformation von F gehörigen Verschiebungen wieder durch φ_1, φ_2, φ_3, so ist[1])

$$\begin{aligned} K\sqrt{\mathsf{H}}\,d\varphi &= (Jx_u + J'x_v)(E\,du + F\,dv)\psi - p(E\psi_v - F\psi_u)\,du \\ &\quad - (\mathsf{H}x_u + \mathsf{H}'x_v)(F\,du + G\,dv)\psi - p(F\psi_v - G\psi_u)\,dv \\ &= K\psi\,[(x_u f - x_v e)\,du + (g x_u - f x_v)\,dv] \\ &\quad - p[(E\psi_v - F\psi_u)\,du + (F\psi_v - G\psi_u)\,dv] \end{aligned}$$

für jeden gleichzeitig bei φ, x und p hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$. Nun ist aber

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,\Sigma(ap) = (a\,x_u x_v)$$

also

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,du\,\Sigma(ap) = (a\,dx\,x_v)$$

$$\sqrt{\mathsf{H}}\,dv\,\Sigma(ap) = (a\,x_u\,dx)$$

und $\quad -\sqrt{\mathsf{H}}(ap\,dx) = \Sigma a[(x_u f - x_v e)\,du + (g x_u - f x_v)\,dv]$,

demnach wird

$$\begin{aligned} d\varphi_1 = \psi(dx_2 p_3 - dx_3 p_2) &- \frac{(E\psi_v - F\psi_u)}{K\mathsf{H}}(x_{3v}\,dx_2 - x_{2v}\,dx_3) \\ &- \frac{(F\psi_v - G\psi_u)}{K\mathsf{H}}(x_{2u}\,dx_3 - x_{3u}\,dx_2) \end{aligned}$$

und analoge Werthe ergeben sich durch cyclische Vertauschung für $d\varphi_2$ und $d\varphi_3$. Hieraus folgt, dass die Rotationscomponenten

$$\frac{q_1}{s} \quad \frac{q_2}{s} \quad \frac{q_3}{s}$$

durch die Formel

$$7) \qquad \frac{q_i}{s} = \psi p_i + x_{iu}\frac{(F\psi_v - G\psi_u)}{K\mathsf{H}} - x_{iv}\frac{(E\psi_v - F\psi_u)}{K\mathsf{H}}$$

gegeben sind. Es wird demnach, wie eine einfache Rechnung zeigt

---

[1]) Die Formel des Textes ergiebt sich durch Umformung der Weingarten'schen Formel vgl. z. B. Bianchi, Lezioni, p. 276) mit Hülfe von 1) und 2) der Einleitung.

Digitized by Google

$$\frac{1}{s^2} = \psi^2 + \frac{\psi_v^2 e' - 2\psi_u \psi_v f' + \psi_u^2 g'}{K^2 \mathsf{H}}$$

wenn man, wie bisher, die Coefficienten des Längenelementes der sphärischen Abbildung von F mit e', f', g' bezeichnet. Da aber bekanntlich

$$K = \sqrt{e'g' - f'^2} : \sqrt{eg - f^2}$$

so folgt

$$8) \qquad \frac{1}{s^2} = \psi^2 + \Delta\psi$$

womit das Quadrat der Rotation durch den ersten Differentialparameter $\Delta\psi$ der characteristischen Function in Bezug auf die sphärische Abbildung der Fläche ausgedrückt ist, und zugleich erhält man aus 7) die beiden durch ihre Einfachheit bemerkenswerthen Formeln

$$9) \qquad \begin{aligned} \psi_u &= \Sigma \frac{q}{s} p_u \\ \psi_v &= \Sigma \frac{q}{s} p_v \end{aligned}$$

Während also die Normalcomponente der Rotation durch die characteristische Function der Deformation ausgedrückt wird, ist nach 8) die tangentiale Componente gleich der Quadratwurzel aus dem ersten Differentialparameter von ψ, in der soeben bezeichneten Weise genommen.

Diese Formeln geben zu mehrfachen Fragen Veranlassung. Bemerkenswerth erscheinen namentlich die Curven auf der Fläche Θ, längs denen der Abstand der Tangentenebene vom Coordinatenanfang constant ist. Ihnen entsprechen auf F solche Curven, längs denen die totale Rotation constant bleibt. Insbesondere erwähne ich die folgenden Fälle.

Erstens. Die Fläche F ist einer Ebene Θ adjungirt. Alle Puncte erfahren jetzt die nämliche infinitesimale Rotation, man hat, wie das schon in § VIII bemerkt wurde, einfach eine infinitesimale Bewegung der ganzen Fläche.

Digitized by Google

Zweitens. Die Fläche F ist der Kugel adjungirt; dies ist der Fall bei den Minimalflächen, es findet eine Rotation von constanter Grösse um die Flächennormale statt.

Drittens. Welches sind diejenigen Flächen, bei denen eine constante Rotationscomponente senkrecht zur Flächennormale stattfindet? Unter welchen Bedingungen kann also die partielle Differentialgleichung der characteristischen Function ψ ein Integral haben, das zugleich die Gleichung $\Delta\psi = \text{const}$ befriedigt?

Viertens. Welches sind diejenigen Flächen, bei denen die totale Rotation constant ist? Auch hier würde aus der Betrachtung der Gleichung $\Delta\psi + \psi^2 = \text{const}$[1]) und der partiellen Differentialgleichung für ψ die für F erforderliche Bedingung sich, wie es scheint, nicht sogleich ergeben. Aber man sieht unmittelbar, dass in diesem Falle die Fläche F einer Developpabelen adjungirt sein muss, welche einer um den Anfang der Coordinaten als Mittelpunct beschriebenen Kugel umschrieben ist. Die Fläche F ist also nothwendig eine Regelfläche, und umgekehrt lässt sich auch leicht zeigen, dass jede Regelfläche die Eigenschaft hat, infinitesimale Biegungen zu gestatten, die für jeden ihrer Puncte in einer Rotation um eine zu der jeweiligen Erzeugenden normale Axe bestehen.

Man erhält ferner aus 7)

$$10)\qquad \frac{1}{s}\Sigma q_i\, dx_i$$

$$= \frac{1}{K\mathsf{H}}[(E\psi_v - F\psi_u)(f\,du + g\,dv) - (F\psi_v - G\psi_u)(e\,du + f\,dv)]$$

als Ausdruck für den Cosinus des Winkels, den die Rotationsaxe mit irgend einer Fortschreitungsaxe dx_i auf der Fläche F bildet.

---

[1]) In dem dritten und vierten Falle sind also die Curven $\psi = \text{const}$ geodätische Parallelen auf der sphärischen Abbildung, vgl. z. B. Darboux, Leçons, t. III, p. 195.

Digitized by Google

Dieser Winkel ist also ein rechter, wenn der Differentialausdruck rechter Hand in 10) verschwindet. Unter welchen Bedingungen kann nun die hierdurch auf F bestimmte Fortschreitungsrichtung eine vorgeschriebene, z. B. die einer Krümmungslinie, einer Haupttangentencurve etc. etc. werden? Von den zahlreichen hierher gehörigen Fragen[1]) will ich hier nur die behandeln, wo die gegebene Fläche F eine Regelfläche ist. Soll zugleich die Richtung in die der Erzeugenden fallen, und wählt man (man vergleiche den folgenden Paragraphen)

$$e = 1,\ f = 0,\ E = 0,\ F = \frac{V}{\sqrt{g}},\ \frac{G}{\sqrt{g}} = V_1 + \frac{\partial}{\partial v}\int \frac{V}{g}\, du$$

so muss nach 10)

$$F\psi_v - G\psi_u = 0$$

sein. Hieraus aber folgt durch Einsetzen der angegebenen Werthe von F und G

$$\psi = \Phi(\omega)$$

wo Φ eine willkürliche Function des Argumentes

$$\omega = V_1 + \int \frac{V}{g}\, du$$

bezeichnet, so dass

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{G}{\sqrt{g}},\quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = \frac{F}{\sqrt{g}} \text{ wird.}$$

Die Weingarten'sche[2]) partielle Differentialgleichung für ψ

$$11)\ \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\psi_u - F\psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\psi_v - F\psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}\right] = \frac{\psi}{\sqrt{\mathsf{H}}}[2fF - Eg - Ge]$$

---

[1]) So z. B. ergiebt sich sofort, dass nur bei der Kugel die Rotationsaxe senkrecht zu der Richtung stehen kann, längs der die characteristische Function ψ constant ist. Denn der Differentialausdruck 10) wird für Krümmungslinien

$$\frac{1}{r_1}\, dv\, \psi_v + \frac{1}{r_2}\, du\, \psi_u$$

wo r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien sind, und dies kann vermöge $d\psi = 0$ nur dann verschwinden, wenn $r_1 = r_2$ ist.

[2]) Bianchi, Lezioni, p. 276.

Digitized by Google

liefert dann, wenn man die angegebenen Werthe von E, F, G, ψ einsetzt, zur Bestimmung von Φ die Gleichung

$$\Phi'' = -\Phi$$

oder

$$\Phi = A \sin(\omega + B)$$

wo A und B von ω unabhängige Constanten sind.

Der Ausdruck

$$\frac{1}{s^2} = \psi^2 + \psi_u^2 \frac{F^2 g}{K^2 \mathsf{H}^2} = \Phi'^2 + \Phi^2 = A^2$$

hat dabei zugleich die merkwürdige Eigenschaft constant zu sein. Hieraus folgt also:

Die infinitesimalen Biegungen einer Regelfläche, bei der die Rotationsaxe mit den Erzeugenden beständig einen rechten Winkel bildet, sind zugleich diejenigen, bei denen die Grösse dieser Rotation selbst constant ist.

Man erhält ferner durch Differentiation aus der Gleichung 7)

$$\Sigma(p\,q) = \psi\, s$$

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} + p_u \frac{g}{s} = \psi_u$$

oder nach 9)

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} = 0$$

$$\Sigma p \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v} = 0$$

Das heisst: Die Normale der Fläche Q, welche von den als Coordinaten aufgetragenen Rotationscomponenten gebildet wird, ist der Normale von F parallel. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass die Flächen F und Q zu einander associirt sind.

Wählt man nämlich auf F das System der Haupttangentencurven zu Coordinatenlinien, so ist zu beweisen, dass die mittlere

Digitized by Google

Fundamentalgrösse der Fläche Q unter dieser Voraussetzung verschwindet. Dieselbe ist aber nach dem so eben bemerkten proportional mit den Ausdrücken

$$-\Sigma p_v \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} = -\Sigma p_u \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v}$$

Man erhält nun aus 7) nach einfachen Umformungen

$$\frac{\partial \frac{q_i}{s}}{\partial u} = \psi \frac{F}{\mathsf{H}} (f x_{iu} - e x_{iv}) + \frac{F}{K\mathsf{H}} [B \psi_u x_{iu} + A_1 \psi_v x_{iv}]$$

$$+ \frac{x_{iv}}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F \psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u} + \frac{x_{iu}}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F \psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u} - \frac{F}{K\mathsf{H}} \left\{ A \psi_u x_{iu} + B_1 \psi_v x_{iu} \right\}$$

oder

$$\Sigma \left(p_v \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial u} \right) = -\psi \frac{F^2 f}{\mathsf{H}} + F^2 \frac{(B_1 \psi_v - B \psi_u)}{K\mathsf{H}} - \frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F \psi_v}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u}$$

Vertauscht man in dieser Gleichung u mit v, so folgt

$$\Sigma \left(p_u \frac{\partial \frac{q}{s}}{\partial v} \right) = -\psi \frac{F^2 f}{\mathsf{H}} + F^2 \frac{(B \psi_u - B_1 \psi_v)}{K\mathsf{H}} - \frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} \frac{\partial \frac{F \psi_u}{K\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial v}$$

und hieraus folgt der Beweis des angegebenen Satzes, da die Summe der beiden Ausdrücke rechter Hand zufolge der Differentialgleichung verschwindet, der die Function ψ genügen muss.[1])

§ X. Zur Deformation der Regelflächen.

Die im vorigen § angedeutete merkwürdige infinitesimale Deformation von constanter Rotation der Regelflächen will ich hier ausführlicher darlegen, indem ich direct den Satz beweise:

Jede Regelfläche lässt sich auf einfach unendlich viele wesentlich verschiedene Arten einer um eine Kugel beschriebenen Developpabelen adjungiren.

---

[1]) Vgl. die 11) für ψ angegebene Formel.

Digitized by Google

Es seien, um dies zu zeigen, η_1, η_2, η_3 die Coordinaten einer sphärischen Curve auf der mit dem Radius Eins um den Anfang beschriebenen Kugel. Nimmt man die Bogenlänge v als unabhängige Variabele, so ist

$$1)\qquad \begin{aligned} \Sigma\eta^2 &= 1, & \Sigma\eta_v^2 &= 1 \\ \Sigma\eta\,\eta_v &= 0, & \Sigma\eta_v\,\eta_{vv} &= 0. \\ \Sigma\eta\,\eta_{vv} &= 0, & \Sigma\eta\,\eta_{vv} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen findet man durch Multiplication der Determinanten, wenn

$$2)\qquad \delta = (\eta\,\eta_v\,\eta_{vv})$$

gesetzt wird, die für beliebige Coefficienten a_1, a_2, a_3 geltenden Identitäten[1])

$$3)\qquad \begin{aligned} (\eta\,\eta_v\,a)\,(\eta\,\eta_v\,\eta_{vv}) &= \Sigma a\,\eta + \Sigma a\,\eta_{vv}, \\ (\eta\,\eta_{vv}\,a)\,(\eta\,\eta_v\,\eta_{vv}) &= -\,\delta^2\,\Sigma a\,\eta_v, \\ \delta^2 + 1 &= \Sigma(\eta_{vv})^2. \end{aligned}$$

Dann sind

$$4)\qquad \begin{aligned} \Theta_1 &= \eta_1 + u\,(\eta_2\,\eta_{3v} - \eta_3\,\eta_{2v}) \\ \Theta_2 &= \eta_2 + u\,(\eta_3\,\eta_{1v} - \eta_1\,\eta_{3v}) \\ \Theta_3 &= \eta_3 + u\,(\eta_1\,\eta_{2v} - \eta_2\,\eta_{1v}) \end{aligned}$$

die Coordinaten eines Punctes der allgemeinsten Developpabelen, deren Tangentenebenen den Abstand Eins vom Coordinatenanfang haben. Es wird daher nach 1), 2), 3)

$$\Theta_u = \frac{1}{\delta}\,(\eta + \eta_{vv})$$

$$\Theta_v = \eta_v\,(1 - u\,\delta)$$

und hieraus folgt für die Coefficienten e, f, g des Längenelementes von Θ

$$e = 1, \quad f = 0, \quad g = (1 - u\,\delta)^2$$

---

[1]) Da die Determinante δ verschwindet, wenn $\Sigma\,(\eta_{vv})^2 = 1$ ist, also die Developpabele ein Kreiscylinder wird, bedarf dieser Fall noch einer besonderen Betrachtung.

Digitized by Google

also sind nach § III, 2) die zur adjungirten Fläche F gehörigen Grössen D gegeben durch

$$D = 0 \quad D_{11u} - D_{1v} = 0 \quad g D_{1u} - g_u D_{1v} = 0$$

mithin

$$D_1 = \frac{W}{g}, \quad D_{11} = W_2' + \frac{\partial}{\partial v} \int \frac{W}{g} du$$

wo W und $W_2' = \frac{d W_2}{dv}$ willkürliche Functionen von v sind.

Des weiteren wird nun

$$(a\,\Theta\,\Theta_u) = -\Sigma(a\,\eta_v)$$

$$(a\,\Theta\,\Theta_v) = \frac{1}{s}(g\,\Sigma(a\,\eta) + \sqrt{g}\,\Sigma\,a\,\eta_{vv})$$

so dass sich für die Coordinaten x der zu Θ adjungirten Regelfläche die Ausdrücke

5) $$x_u = -\eta_v \frac{W}{g} = -\eta_v D_1$$

$$x_v = -\eta_v D_{11} - \frac{D_1}{g}(g\eta + \sqrt{g}\,\eta_{vv})$$

ergeben. Aus denselben geht, wie zu erwarten war, hervor, dass die Richtung der Rotationsaxe η_1, η_2, η_3 auf der der Erzeugenden senkrecht steht.

Ich setze nun das vollständige Differential

$$D_1 du + D_{11} dv$$

gleich du_1, so dass

6) $$u_1 = \frac{W}{\delta\sqrt{g}} + W_2$$

wird und führe als neue Variabeln u_1 und $v = v_1$ ein. Dann treten an Stelle von 5) die Gleichungen

$$x_{v_1} = x_v - D_{11} x_{u_1}$$

$$x_{u_1} = \frac{x_u}{D_1}$$

oder, wenn man jetzt wieder die Indices bei u und v in Bezug

Digitized by Google

auf das neue Orthogonalcoordinatensystem auf F fortlässt

7) $$x_u = -\eta_v$$

$$x_v = -\frac{\eta}{\delta} W - \eta_{vv}(u - W_2)$$

Die Coefficienten des Längenelementes der Regelfläche F sind nunmehr

8) $$c_1 = 1,\ f_1 = 0,\ g_1 = \frac{W^2}{\delta^2} - 2\frac{W}{\delta}(u - W_2) + (1+\delta^2)(u - W_2)^2$$

und zugleich wird nach 4) und 6)

$$r^2 = \Sigma \Theta^2$$

$$= \frac{1}{(u - W_2)^2 \delta^2}\left[\frac{W^2}{\delta^2} - 2\frac{W}{\delta}(u - W_2) + (1 + \delta^2)(u - W_2)^2\right]$$

oder

8a) $$r^2 = \frac{g_1}{(u - W_2)^2 \delta^2}.$$

Die Cosinus der Normale von F sind daher $\frac{\Theta_1}{r}, \frac{\Theta_2}{r}, \frac{\Theta_3}{r}$, und hieraus ergeben sich die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung E', F', G' dieser Fläche in der Form

9) $$E' = 0,\ F' = \frac{W}{\sqrt{g_1}}\quad rG' = -\frac{W'}{\delta} + \frac{2W}{\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v} - \frac{W_2' W}{(u - W_2)\delta} - \frac{(u - W_2)}{\delta}\frac{\partial\delta}{\partial v}$$

wobei $W' = \frac{dW}{dv}$, $W_2' = \frac{dW_2}{dv}$ gesetzt ist.

Es sei ferner eine willkürliche Regelfläche gegeben, deren Längenelement

$$du^2 + (u^2 + 2Bu + C)\,dv_1^2$$

sei, wo B und C willkürliche Functionen von v_1 sind. Dazu gehören dann die Fundamentalgrössen erster Ordnung

$$c_{11} = 1,\ f_{11} = 0,\ g_{11} = u^2 + 2Bu + C$$

Digitized by Google

und die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung sind, wie man durch Integration der Gauss'schen Differentialgleichungen leicht findet,

$$E_{11} = 0 \quad F_{11} = \frac{\sqrt{C-B^2}}{\sqrt{g_{11}}}$$

$$G_{11} = \sqrt{g_{11}}\left[V_1 + \frac{\partial}{\partial v}\int du \frac{\sqrt{C-B^2}}{g_{11}}\right]$$

oder nach ausgeführter Integration

$$G_{11} = \sqrt{g_{11}}\left[V_1 + \frac{B'V - BV' - uV'}{g_{11}}\right]$$

dabei ist V_1 eine willkürliche Function von v_1, $V^2 = C - B^2$, B' und V' sind die Differentialquotienten von B und V. Ohne diese Fläche zu ändern, kann man an Stelle von dv_1 den Ausdruck $\psi\, dv$ einführen, wo ψ eine willkürliche Function von v ist. Hierdurch werden die angegebenen Fundamentalgrössen übergehen in

10) $e_{11} = 1, \; f_{11} = 0, \; g_{11} = \psi^2[u^2 + 2Bu + C]$

$$E_{11} = 0, \; F_{11} = \psi^2 \frac{V}{\sqrt{g_{11}}}, \; G_{11} = \sqrt{g_{11}}\, V_1 + \psi^2 \frac{(B'V - BV' - uV')}{\sqrt{g_{11}}}$$

wo V_1 wieder eine willkürliche Function von v ist und die Differentiationen in dem Ausdrucke für G sich auf die neue Variable v beziehen.[1])

Kann man nun zeigen, dass die unter 8) und 9) angegebenen Fundamentalgrössen von F sich mit den in 10) bestimmten einer allgemeinen Regelfläche identificiren lassen, so ist der Beweis des Satzes geliefert.

Man setze also, um die Uebereinstimmung von g_1 und g_{11} herbeizuführen

---

[1]) Die hier gegebene Darstellung der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer Regelfläche habe ich nicht unterdrücken zu sollen geglaubt, da ich sie in keiner mir bekannten Arbeit gefunden habe.

Digitized by Google

$$\psi^2[u^2+2Bu+C]=\frac{W^2}{\delta^2}-2W\frac{(u-W_2)}{\delta}+(1+\delta^2)(u-W_2)^2$$

oder

$$\psi^2 \quad =1+\delta^2$$

$$\psi^2 B=-\frac{W}{\delta}-(1+\delta^2)W_2$$

$$\psi^2 C=\frac{W^2}{\delta^2}+2\frac{WW_2}{\delta}+(1+\delta^2)W_2^2$$

woraus $$\psi^4(C-B^2)=W^2$$

oder

11) $$W=\psi^2 V,\quad 1+\delta^2=\psi^2$$

$$W_2+B=-\frac{V}{\delta}$$

folgt. Hiermit wird zugleich nach 9) und 10)

$$F_1=F_{11}$$

Aus dem Ausdrucke für G_1, den man durch Einführung von r aus 8a) und $g_1=g_{11}$ in die Form

$$G_1=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}+\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[u\left(-W'+2\frac{\delta W}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}\right)\right.$$

$$\left.+W_2W'-W_2'W+\frac{W^2}{\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}\frac{1}{1+\delta^2}+2\frac{WW_2}{1+\delta^2}\delta\frac{\partial\delta}{\partial v}\right]$$

bringt, wird nun, wenn man für W_2, W, $1+\delta^2$ ihre Werthe aus 11) einführt

$$G_1=-\frac{\sqrt{g_{11}}}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}+\frac{\psi^2}{\sqrt{g_{11}}}(VB'-BV'-uV')$$

so dass völlige Uebereinstimmung von G_1 und G_{11} stattfindet, wenn man

$$-V_1=\frac{1}{1+\delta^2}\frac{\partial\delta}{\partial v}$$

Digitized by Google

setzt, wodurch die Function δ, d. h. die erste Krümmung der sphärischen Curve η bestimmt ist. Hieraus folgt aber

$$\arcsin \frac{1}{\psi} = \int V_1 \, dv + \text{const.}$$

Bestimmt man endlich die Verschiebungscomponenten φ_1, φ_2, φ_3, so folgt leicht, dass dieselben ganze lineare Functionen von u sind, denn es wird für beliebige Werthe der Constanten A_i

$$\Sigma A_i \varphi_i = (A \eta \eta_v)(\dot{u} - W_2) + \int W_2' (A \eta \eta_v) \, dv;$$

diese Deformationen führen also immer die Erzeugenden in Erzeugende über.

In dem besonderen, bei der vorhergehenden Betrachtung ausgeschlossenen Fall, wo die Developpabele Θ ein Kreiscylinder vom Radius r ist, setze man

$$\Theta_1 = u, \quad \Theta_2 = r \cos v, \quad \Theta_3 = r \sin v.$$

Man erhält dann

$$D_1 = V, \quad D_{11} = u V' + V_1$$

also

$$(a \Theta \Theta_u) = r [a_2 \sin v - a_3 \cos v]$$

$$(a \Theta \Theta_v) = r [a_1 r - u (a_2 \cos v + a_3 \sin v)]$$

mithin

$$\Sigma (a x) = r \int (a_2 \sin v - a_3 \cos v) V_1 \, dv$$

$$- r^2 a_1 \int V \, dv + u V r (a_2 \sin v - a_3 \cos v)$$

als Darstellung dieser speciellen Gattung von Regelflächen. In dem besonderen Falle, wo V_1 gleich Null gewählt wird, ergeben sich hier die geraden Conoide:

$$x = - r V$$

$$y = u V' \sin v$$

$$z = u V' \cos v.$$

Durch die vorhergehende Untersuchung ist die allgemeine

Digitized by Google

Aufgabe gelöst, eine durch ihre Fundamentalgrössen gegebene Regelfläche einer um eine Kugel beschriebenen Developpabelen zu adjungiren. Sind aber die Gleichungen der Regelfläche durch explicite Ausdrücke ihrer Coordinaten

$$x_i = a_i + u\,\beta_i$$

gegeben, so lassen sich die sämmtlichen infinitesimalen Deformationen, bei denen die Erzeugenden wieder in Erzeugende übergehen, sehr einfach bestimmen.

Die allgemeinsten Ausdrücke für die Verschiebungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, welche in u linear sind,

$$\varphi_i = \frac{A_i' + B_i' u}{p + q u}$$

bei denen A_i', B_i', p, q willkürliche Functionen von v sind, kann man, wenn q nicht verschwindet, auf die Form

$$\varphi_i = \frac{A_i}{p + u} + B_i$$

bringen. Aus der Bedingung

$$\Sigma\, d\,x\, d\,\varphi = 0$$

folgt zunächst, da

$$x_u = \beta, \quad \varphi_u = -\frac{A}{(p+u)^2}$$

$$x_v = a_v + u\,\beta_v, \quad \varphi_v = \frac{A_v}{p+u} + B_v - \frac{A\,p_v}{(p+u)^2}$$

für jeden gleichzeitig bei x, φ, A, B, a, β hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$ ist,

$$\Sigma(\beta A) = 0 \quad \Sigma(\beta B_v) = 0 \quad \Sigma(A_v \beta) = 0 \quad \Sigma(\beta_v A) = 0$$
$$\Sigma(a_v A) = 0.$$

Hieraus aber würde hervorgehen, dass die Determinante

$$(a_v\ \beta_v\ \beta)$$

verschwinden muss, falls nicht alle A_i verschwinden. Dann aber wäre die Fläche gegen die Voraussetzung developpabel.

Digitized by Google

Da sonach die Annahme q nicht $= 0$ auf einen Widerspruch führt, hat man den Satz:

Alle infinitesimalen Biegungen der Fläche, bei denen die Erzeugenden geradlinig bleiben, sind von der Form linearer ganzer Functionen von u, so dass

12) $$\varphi_i = \alpha_i' + \beta_i' u$$

ist. Bestimmt man nun die zu dieser Form gehörigen Rotationscomponenten

$$r_1 = \frac{q_1}{s}, \quad r_2 = \frac{q_2}{s}, \quad r_3 = \frac{q_3}{s}$$

so ergiebt sich leicht, dass diese nur von v abhängen. Denn nach § IX, 6) kann man bei willkürlichen Werthen der Constanten A_i setzen

13) $$\Sigma A\, d\varphi = (A, r, \alpha_v + \beta_v u)\, dv + (A r \beta)\, du$$

und hieraus folgt

$$\Sigma \beta\, d\varphi = (\beta, r, \alpha_v + \beta_v u)\, dv$$
$$\Sigma \alpha_v\, d\varphi = (\alpha_v r \beta_v)\, u\, dv + (\alpha_v r \beta)\, du$$
$$\Sigma \beta_v\, d\varphi = (\beta_v r \alpha_v)\, dv + (\beta_v r \beta)\, du$$

oder, wenn man für die $d\varphi$ ihre Werthe aus 12) einführt

$$\Sigma \beta \alpha_v' = (\beta r \alpha_v), \quad \Sigma \alpha_v \beta' = (\alpha_v r \beta)$$
$$\Sigma \beta \beta_v' = (\beta r \beta_v), \quad \Sigma \alpha_v \beta_v' = (\alpha_v r \beta_v)$$

und aus diesen Gleichungen folgen, wenn man

$$r = \lambda \beta + \mu \alpha_v + \nu \beta_v$$

setzt, für λ, μ, ν die Werthe

$$\nu\, (\beta \beta_v \alpha_v) = \Sigma \beta \alpha_v'$$
$$\mu\, (\beta \alpha_v \beta_v) = \Sigma \beta \beta_v'$$
$$\lambda\, (\alpha_v \beta \beta_v) = \Sigma \alpha_v \beta_v'$$

womit die r_i als Functionen von v allein bestimmt sind.

Die Bedingung der Integrabilität von 13) aber erfordert, dass

Digitized by Google

$$(A\, r_v\, \beta) = 0$$

sei, und aus dieser Gleichung folgt wegen der Willkürlichkeit der A

14) $$\frac{\partial r_i}{\partial v} = \varrho\, \beta_i$$

womit also alle Verschiebungen der verlangten Art durch die Quadraturen

$$r_i = \int \varrho\, \beta_i\, d\, v + \text{const}$$

gegeben sind. Dabei ist ϱ eine willkürliche Function von v. Man kann daher auch leicht diejenigen Biegungen finden, bei denen die Grösse der Rotation $\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ eine vorgeschriebene Function von v ist. Ohne diesen Gegenstand weiter zu behandeln, wende ich mich sofort zu dem Falle, wo dieselbe gleich einer Constanten sein soll. Man kann noch voraussetzen, dass die α, β den Bedingungen

15) $$\Sigma\, \alpha_v^2 = 1, \quad \Sigma\, \alpha_v\, \beta = 0, \quad \Sigma\, \beta^2 = 1$$

genügen, indem man die Regelfläche durch eine ihre Erzeugenden orthogonal schneidende Leitcurve definirt. Unter dieser Voraussetzung wird das Quadrat der nicht verschwindenden Determinante

$$(\alpha_v\, \beta\, \beta_v)$$

gleich $$\Sigma\, \beta_v^2 - (\Sigma\, \beta_v\, \alpha_v)^2.$$

Aus der Gleichung

$$r_1 \frac{\partial r_1}{\partial v} + r_2 \frac{\partial r_2}{\partial v} + r_3 \frac{\partial r_3}{\partial v} = 0$$

folgt nunmehr wegen 14)

$$\Sigma\, \beta_i\, r_i = 0$$

also nach 15)

16) $$r_i = \lambda\, \beta_{iv} + \mu\, \alpha_{iv}$$

wo λ und μ zwei noch zu bestimmende Functionen von v sind, und endlich aus 14) für jeden bei α, β hinzugefügten Index $i = 1, 2, 3$:

Digitized by Google

$$\lambda \beta_{vv} + \mu a_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} a_v = \varrho \beta$$

woraus durch Multiplication mit den β, a_v, β_v und Addition folgt (15)

$$17) \quad \lambda \Sigma \beta \; \beta_{vv} + \mu \Sigma \beta \; a_{vv} = \varrho$$

$$\lambda \Sigma a_v \beta_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma a_v \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$$

$$\lambda \Sigma \beta_v \beta_{vv} + \mu \Sigma a_{vv} \beta_v + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \beta_v^2 + \frac{\partial \mu}{\partial v} \Sigma \beta_v a_v = 0$$

Die Gleichung für λ, welche man hieraus erhält, ist eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren allgemeine Lösung von der Form

$$\lambda = c_1 \lambda_0 + c_2 \lambda_1$$
$$\mu = c_1 \mu_0 + c_2 \mu_1$$

ist, falls λ_0, μ_0; λ_1, μ_1 entsprechende particuläre Lösungen sind. Und so erhält man, dem willkürlichen Werthe des Verhältnisses $c_1 : c_2$ entsprechend, ∞^1 Biegungen, bei denen die Fläche eine constante Rotation erfährt. Die dabei auftretende characteristische Function ist, wie sich leicht ergiebt

$$\frac{(\lambda - \mu u)(a_v \beta_v \beta)}{\sqrt{1 + 2u \Sigma a_v \beta_v + u^2 \Sigma \beta_v^2}}$$

Die genannte Differentialgleichung kann aber durch Quadraturen vollständig integrirt werden. Die beiden letzten Gleichungen 17) nämlich — die erste ist ohnedies überflüssig, da sie nur ϱ bestimmt —

$$\lambda \Sigma a_v \beta_{vv} + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma a_v \beta_v + \frac{\partial \mu}{\partial v} = 0$$

$$\lambda \Sigma \beta_v \beta_{vv} + \mu \Sigma a_{vv} \beta_v + \frac{\partial \lambda}{\partial v} \Sigma \beta_v^2 + \frac{\partial \mu}{\partial v} \Sigma a_v \beta_v = 0$$

geben, wenn

$$\sigma = \Sigma \beta_v^2 - (\Sigma a_v \beta_v)^2$$

Digitized by Google

gesetzt wird, durch Elimination von $\frac{\partial \mu}{\partial v}$

$$\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}\sigma + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\Sigma \beta_v a_{vv}} + \mu + \lambda \Sigma a_v \beta_v = 0$$

Setzt man den hieraus folgenden Werth von μ in die erste Gleichung ein, so folgt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\frac{\partial \lambda}{\partial v}\sigma + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\Sigma a_{vv}\beta_v}\right] + \lambda \Sigma a_{vv}\beta_v = 0$$

oder

$$\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial v}\left|\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 \sigma)}{\lambda \Sigma a_{vv}\beta_v}\right|^2 + \frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 \sigma) = 0$$

d. h.:

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial v}(\lambda^2 \sigma)}{\lambda \Sigma a_{vv}\beta_v} = \sqrt{2c - \lambda^2 \sigma}$$

mit c als willkürlicher Constanten. Setzt man noch

$$\lambda^2 \sigma = \tau$$

so wird

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial \tau}{\partial v}}{\sqrt{2c\tau - \tau^2}} = \frac{\Sigma a_{vv}\beta_v}{\sqrt{\sigma}}$$

oder

$$\frac{\tau - c}{c} = \sin\left(c_1 + 2\int \frac{\Sigma a_{vv}\beta_v}{\sqrt{\sigma}}\, dv\right)$$

womit λ und μ vollständig gegeben sind.

Die Aufgabe, eine gegebene Regelfläche einer um die Kugel umschriebenen Developpabelen zu adjungiren, lässt sich also durch zwei Quadraturen (die eine ist erforderlich zur Bestimmung des in der Untersuchung vorausgesetzten Orthogonalsystems) vollständig lösen.

Als Beispiel betrachte man die Fläche

Digitized by Google

$$\beta_1 = \cos V, \quad \alpha_1 = 0$$
$$\beta_2 = \sin V, \quad \alpha_2 = 0$$
$$\beta_3 = 0 \quad , \quad \alpha_3 = v$$

wo V eine beliebige Function von v ist.

Man findet dann

$$r_1 = -c \sin V$$
$$r_2 = +c \cos V$$
$$r_3 = \quad c_1$$

und hieraus

$$q_1 = c \int \cos V \, dv - u c_1 \sin V$$

$$q_2 = c \int \sin V \, dv + u c_1 \cos V$$

$$q_3 = -cu$$

mit der characteristischen Function

$$\psi = \frac{c_1 u - c}{\sqrt{1 + u^2}}$$

§ XI. Ableitung neuer Deformationen aus bereits bekannten.

Die Differentialgleichung

$$1) \qquad \frac{\partial}{\partial u}(D_{11} \varrho_u - D_1 \varrho_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D \varrho_v - D_1 \varrho_u) = 0$$

welche die sämmtlichen characteristischen Functionen $\frac{\varrho}{r}$ der Deformationen von F bestimmt, lässt sich in besonders einfachen Fällen allgemein lösen.[1]) Von ebenso grossem Interesse erscheint es, dass unter gewissen Voraussetzungen sich aus einer Lösung derselben andere, ja selbst unendlich viele herleiten lassen.

Setzt man in den Gleichungen 1) des § IV

[1]) Vgl. z. B. Darboux, Leçons t. III, p. 372 ff. Bianchi, Lezioni, p. 306—310.

Digitized by Google

2)
$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v$$
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_u$$

welche die Coordinaten der Fläche φ bestimmen,

3)
$$\sigma = \Sigma\varphi\,\Theta$$

4)
$$r_1^2 = \Sigma\varphi^2$$

so ist
$$r_1 r_{1u} = \Sigma\varphi\,\varphi_u = D_1\,\Sigma\varphi\,\Theta_u - D\,\Sigma\varphi\,\Theta_v$$
$$r_1 r_{1v} = \Sigma\varphi\,\varphi_v = D_{11}\,\Sigma\varphi\,\Theta_u - D_1\,\Sigma\varphi\,\Theta_v$$

oder
$$r_1 r_{1u} = D_1\,\sigma_u - D\,\sigma_v - D_1\,\Sigma\Theta\varphi_u + D\,\Sigma\Theta\varphi_v$$
$$r_1 r_{1v} = D_{11}\,\sigma_u - D_1\,\sigma_v - D_{11}\,\Sigma\Theta\varphi_u + D_1\,\Sigma\Theta\varphi_v$$

also, wenn man für φ_u, φ_v wieder ihre Werthe aus 2) einführt, nach § I, 8)

$$r_1 r_{1u} - \Omega r r_u = r_1 r_{1u} + \frac{1}{2K}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial u} = \sigma_u D_1 - \sigma_v D$$

$$r_1 r_{1v} - \Omega r r_v = r_1 r_{1v} + \frac{1}{2K}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial v} = \sigma_u D_{11} - \sigma_v D_1$$

oder

5)
$$\frac{\partial(\sigma_u D_{11} - \sigma_v D_1)}{\partial u} + \frac{\partial(\sigma_v D - \sigma_u D_1)}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\frac{1}{K}}{\partial u}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial v} - \frac{\partial\frac{1}{K}}{\partial v}\frac{\partial\frac{1}{r^2}}{\partial u}\right)$$

Hieraus folgt:

Ist die characteristische Function $\frac{1}{r}$ der Deformation von F eine Function des Krümmungsmasses allein, so wird $\frac{\sigma}{r}$, der Abstand der durch den Punct $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ parallel zu der Tangentialebene von F im Puncte x_1, x_2, x_3 gelegten Ebene vom Anfang der Coordinaten wieder eine characteristische Function

Digitized by Google

von F,[1]) und die Coordinaten ψ_1, ψ_2, ψ_3 der zu derselben gehörigen Verschiebungscomponenten sind nach § IV, 5) gegeben durch

$$\psi_u = (r_1 r_{1u} - \Omega r r_u)\,\Theta - \sigma \varphi_u$$
$$\psi_v = (r_1 r_{1v} - \Omega r r_v)\,\Theta - \sigma \varphi_v$$

oder, wenn man für die $\varphi_u\ \varphi_v$ ihre Werthe 2) wieder einführt,

$$6)\qquad \frac{\partial \psi_1}{\partial u} = \varphi_2 \frac{\partial x_3}{\partial u} - \varphi_3 \frac{\partial x_2}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_1$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial u} = \varphi_3 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \varphi_1 \frac{\partial x_3}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_2$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial u} = \varphi_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} - \varphi_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - r r_u \Omega \Theta_3$$

nebst analogen Ausdrücken für die nach v genommenen Differentialquotienten der ψ; für die Minimalflächen, bei denen $r = \text{const}$ ist, nehmen diese Formeln eine besonders einfache Gestalt an.

Um die Betrachtung zu verallgemeinern, nehme man jetzt an, dass ϱ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung 1) sei. Dann kann man setzen

$$\psi_u = \varrho^2 D_1 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$

$$\psi_v = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\varrho}\right)}{\partial v}$$

und ψ_1, ψ_2, ψ_3 sind die Coordinaten der zur characteristischen Function $\frac{\varrho}{r}$ gehörigen Verschiebung. Setzt man nun

---

[1]) Die Lösung σ wird trivial, wenn σ gleich Null oder gleich einer Constanten wird. Im ersten Falle ist die Deformation von F mit den Componenten φ_i eine solche, bei der F in sich selbst verschoben wird, was nach Bianchi. (Lezioni p. 305) nur bei den auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen möglich ist; im zweiten Falle erhält man dieselbe characteristische Function wieder, von der man ausging.

Digitized by Google

$$\sigma = \Sigma \psi \Theta$$
$$r_1^2 = \Sigma \psi^2$$

so folgt nach ganz ähnlicher Rechnung wie vorhin

$$r_1 r_{1u} = \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \frac{1}{2K} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u}$$

$$r_1 r_{1v} = \varrho^2 D_{11} \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \frac{1}{2K} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v}$$

oder

$$\frac{\partial \left(\varrho^2 D_{11} \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} \right)}{\partial u} + \frac{\partial \left(\varrho^2 D \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial v} - \varrho^2 D_1 \frac{\partial \frac{\sigma}{\varrho}}{\partial u} \right)}{\partial v}$$

$$+ \frac{1}{2K^2} \left(\frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u} \right) = 0$$

und mit Hülfe der Identität 2) in § II,

$$7) \qquad \frac{\partial}{\partial u} (D_{11} \sigma_u - D_1 \sigma_v) + \frac{\partial}{\partial v} (D \sigma_v - D_1 \sigma_u)$$

$$= - \frac{1}{2 \varrho K^2} \left\{ \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v} \frac{\partial \left(\frac{\varrho}{r}\right)^2}{\partial u} \right\}.$$

Ist nun die Fläche eine Minimalfläche, so ist $\varrho = r$ selbst eine Lösung der partiellen Differentialgleichung. Dann ist aber auch σ eine Lösung derselben. Man hat also den folgenden Satz:

Bei einer Minimalfläche gehört zu jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung eine associirte Lösung, welche durch Quadratur gefunden werden kann.

Auf den ersten Blick scheint es, als ob mit Hülfe dieses Satzes unendlich viele Lösungen der partiellen Differentialgleichung bei einer Minimalfläche gefunden werden könnten.

Digitized by Google

Denn man kann, von der soeben ermittelten Lösung σ ausgehend, die Fläche wieder einer neuen Fläche Θ' adjungiren, dann eine zweite Lösung σ' erhalten, u. s. f. Aber es ist leicht zu sehen, dass in Wirklichkeit ein solcher Process nicht zu Stande kommt, da die auf diesem Wege erhaltenen Lösungen alsbald nicht mehr wesentlich von einander verschieden ausfallen.

Ist nämlich σ überhaupt eine Lösung der Gleichung 1), so ist vermöge der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}(D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v) + \frac{\partial}{\partial v}(D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u) = 0$$

nach § II), 2) noch die folgende

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D_1\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v} - D_1\sigma^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u}\right] = 0$$

erfüllt, d. h. aus der characteristischen Function $\frac{\sigma}{r}$ ergiebt sich als Fläche Θ' zu der man die ursprüngliche adjungiren kann, die Fläche mit den Coordinaten $\Theta' = \frac{\Theta}{\sigma}$, und die Grössen D, D_1, D_{11} gehen dabei gleichzeitig über in

$$D' = D\sigma^2, \quad D_1' = D_1\sigma^2, \quad D_{11}' = D_{11}\sigma^2.$$

Nun sind $\varphi_1 + c_1$, $\varphi_2 + c_2$, $\varphi_3 + c_3$ die Componenten einer Deformation mit der characteristischen Function $\frac{1}{r}$, wenn

$$\varphi_u = D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v$$
$$\varphi_v = D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v, \quad r = |\Sigma\,\Theta^2|^{\frac{1}{2}}$$

genommen wird. Liegt aber eine Minimalfläche vor, so ist r selbst eine Lösung der Gleichung 1), mithin sind auch die aus den Gleichungen

$$\varphi_u' = D_1\,r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial u} - D\,r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial v}$$

$$\varphi_v' = D_{11}\,r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial u} - D_1 r^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta}{r}\right)}{\partial v}$$

Digitized by Google

gefundenen $q'_1 + C'_1$, $q'_2 + C'_2$, $q'_3 + C'_3$ Componenten einer Deformation (mit der characteristischen Function Eins), und diese vermitteln eine neue Lösung

$$\sigma = \Sigma \Theta q' + \Sigma c' \Theta$$

mit der characteristischen Function $\frac{\sigma}{r}$. Adjungirt man vermöge derselben die gegebene Minimalfläche der Fläche

$$\Theta' = \frac{\Theta}{\sigma}$$

und lässt an Stelle der Grössen D die D' treten, so ist

$$|\Sigma \Theta'^2|^{\frac{1}{2}} = \frac{r}{\sigma}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(D'_{11}\frac{\partial \xi}{\partial u} - D'_1\frac{\partial \xi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(D'\frac{\partial \xi}{\partial v} - D'_1\frac{\partial \xi}{\partial u}\right) = 0$$

und vermöge dieser kann man

$$q''_u = D'_1\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\Theta'\frac{\sigma}{r}\right) - D'\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta'\sigma}{r}\right)}{\partial v}$$

$$q''_v = D'_{11}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\Theta'\frac{\sigma}{r}\right) - D'_1\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2\frac{\partial\left(\frac{\Theta'\sigma}{r}\right)}{\partial v}$$

setzen. Da aber $D'_1 = D_1\sigma^2$ etc. ist, so erhält man hier nur

$$q''_u = q'_u, \quad q''_v = q'_v$$

also

$$q''_1 = q'_1 + C_1$$
$$q''_2 = q'_2 + C_2$$
$$q''_3 = q'_3 + C_3$$

und aus diesen Werthen folgt als neue Lösung nur

$$\sigma' = \Sigma \Theta' q' + \Sigma C \Theta' = \frac{\Sigma \Theta q' + \Sigma C \Theta}{\sigma}$$

gehörig zur characteristischen Function

Digitized by Google

$$\sigma' : \frac{r}{\sigma} = \frac{\Sigma \Theta \varphi' + \Sigma C \Theta}{r}$$

welche, wie man sieht, nur durch die Werthe der Constanten C von der früheren $\frac{\sigma}{r}$ verschieden ist.

Man erhält daher, von einer beliebigen Darstellung der Minimalfläche ausgehend, ausser der dieser zu Grunde liegenden Deformation mit den Componenten $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ zunächst die zur characteristischen Function Eins gehörige Deformation φ_i' und mit Hülfe derselben allerdings die neue Lösung σ, zu welcher die Componenten φ_i''',

$$\varphi_u''' = D_1 \sigma^2 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D \sigma^2 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}$$

$$\varphi_v''' = D_{11} \sigma^2 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial u} - D_1 \sigma^2 \frac{\partial \left(\frac{\Theta}{\sigma}\right)}{\partial v}$$

gehören, aber durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich keine weiteren wesentlich neuen Lösungen.

Als Beispiel betrachte man die Scherk'sche Minimalfläche

$$x_1 = u$$
$$x_2 = v$$
$$x_3 = \log \cos u - \log \cos v$$

Hier wird $\mathbf{H} = 1 + \operatorname{tg}^2 u + \operatorname{tg}^2 v = \gamma^2$, und die Cosinus der Flächennormale sind

$$\Theta_1 = p_1 = \frac{\operatorname{tg} u}{\gamma}$$

$$\Theta_2 = p_2 = -\frac{\operatorname{tg} v}{\gamma}$$

$$\Theta_3 = p_3 = \frac{1}{\gamma}$$

also $$E = -\frac{1}{\gamma \cos^2 u}, \quad G = +\frac{1}{\gamma \cos^2 v}, \quad F = 0$$

oder

Digitized by Google

$$D = -\frac{E}{\Delta} = \gamma^2 \cos^2 v$$

$$D_{11} = -\frac{G}{\Delta} = -\gamma^2 \cos^2 u.$$

Vermöge der Formeln

$$\varphi_u = -D\,\Theta_v, \quad \varphi_v = +D_{11}\,\Theta_u$$

wird also

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} = \frac{\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}{\gamma}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} = -\frac{1+\operatorname{tg}^2 v}{\gamma}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial u} = \gamma - \frac{\operatorname{tg}^2 v}{\gamma} = \frac{1+\operatorname{tg}^2 u}{\gamma}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} = -\frac{\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}{\gamma}$$

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial u} = \frac{\operatorname{tg} v}{\gamma}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} = \frac{\operatorname{tg} u}{\gamma}$$

und für $\operatorname{tg} u = \xi$, $\operatorname{tg} v = \eta$ erhält man

$$\varphi_1 = \int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}} \left(\frac{\eta\,\xi\,d\xi}{1+\xi^2} - d\eta \right)$$

$$\varphi_2 = \int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}} \left(d\xi - \frac{\xi\,\eta\,d\eta}{1+\eta^2} \right)$$

$$\varphi_3 = \int \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}} \left(\frac{\eta\,d\xi}{1+\xi^2} + \frac{\xi\,d\eta}{1+\eta^2} \right)$$

Hieraus findet man

$$\varphi_1 = -\tfrac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\eta+\gamma}{\eta-\gamma} \right)$$

$$\varphi_2 = +\tfrac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{\xi+\gamma}{\xi-\gamma} \right)$$

$$\varphi_3 = -\operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\xi\,\eta}$$

und aus diesen Werthen ergiebt sich als neue Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial v} \gamma^2 \cos^2 v \frac{\partial \sigma}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \gamma^2 \cos^2 u \frac{\partial \sigma}{\partial u}$$

Digitized by Google

$$\sigma = +\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} u}{\gamma}\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{tg} v+\gamma}{\operatorname{tg} v-\gamma}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg} v}{\gamma}\operatorname{Log}\left(\frac{\operatorname{tg} u+\gamma}{\operatorname{tg} u-\gamma}\right)+\frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v}.$$

Wendet man dagegen die Gleichung 7) auf den Fall einer Fläche constanten Krümmungsmasses $K = \text{const}$ an, so ist die rechte Seite von 7) immer gleich Null. Es ergiebt sich also

Ist $\frac{\varrho}{r}$ die characteristische Function einer Deformation für eine Fläche constanter Krümmung, so ist $\frac{\sigma}{r}$ eine neue characteristische Function, sobald man $\sigma = \Sigma \Theta \varphi$ setzt und die φ aus den Gleichungen 2) entnimmt.

Im allgemeinen lassen sich daher aus jeder Lösung der partiellen Differentialgleichung 1) unendlich viele andere gewinnen; doch ist auch hier der Fall nicht ausgeschlossen, dass in der Reihe der so gefundenen Functionen σ eine Periode eintritt, oder auch eine derselben gleich Null wird, da im Verlaufe des Processes keine wesentlich neuen Constanten eingeführt werden.

Adjungirt man z. B. die Fläche der Ebene, setzt also, wenn p_1, p_2, p_3 die Cosinus der Flächennormale bedeuten

$$\Theta_i = \frac{p_i}{\gamma}, \quad \gamma = \Sigma (a\, p)$$

so gehören dazu die Verschiebungscomponenten

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= a_3 x_2 - a_2 x_3 + \text{const} \\ \varphi_2 &= a_1 x_3 - a_3 x_1 + \text{const} \\ \varphi_3 &= a_2 x_1 - a_1 x_2 + \text{const} \end{aligned}$$

welche einer infinitesimalen Bewegung entsprechen. Hieraus folgt dann

$$\sigma = \frac{1}{\gamma}(a\, x\, p)$$

als Lösung der partiellen Differentialgleichung 1), wobei

Digitized by Google

$$D = -E\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}},\ D_1 = -F\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}},\ D_{11} = -G\gamma^2 : K\sqrt{\mathsf{H}}$$

zu setzen ist.

Die Flächen constanter Krümmung besitzen also die characteristische Function

$$\sigma : \frac{1}{\gamma} = (a\,x\,p)$$

und diese Eigenschaft ist für dieselben characteristisch. Die Flächen constanter Krümmung sind die einzigen, bei denen der Ausdruck $(a\,x\,p)$, für beliebige Werthe der Constanten a, eine Lösung der Weingarten'schen partiellen Differentialgleichung ist.

Setzt man, um dies zu beweisen, voraus, dass die Fläche auf ihre Haupttangentencurven bezogen sei, so ist die Bedingung zu ermitteln, unter der die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{\sqrt{-K}}(a\,x\,p)_v\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{\sqrt{-K}}(a\,x\,p)_u\right] = -2\,(a\,x\,p)\,f\sqrt{-K}$$

befriedigt ist. Formt man nun die linke Seite mit Hülfe der Identitäten (Einleitung 1) und 2))

$$x_{uv} = B x_u + B_1 x_v + F p$$
$$p_{uv} = \beta x_u + \beta_1 x_v - f' p$$
$$p_u = \frac{F}{\mathsf{H}}(f x_u - e x_v),\ p_v = \frac{F}{\mathsf{H}}(f x_v - g x_u)$$

um, so ergiebt sich wegen $f' = Kf$

$$(a x p_v)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2\beta_1}{\sqrt{-K}}\right) + (a x p_u)\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2\beta}{\sqrt{-K}}\right)$$
$$+ (a x_u p)\left(\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2B}{\sqrt{-K}}\right) + (a x_v p)\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{-K}}\right) + \frac{2B_1}{\sqrt{-K}}\right) = 0$$

Da aber

$$2B_1 = -\frac{\partial \operatorname{Log}\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial u},\ 2B = -\frac{\partial \operatorname{Log}\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}}}{\partial v}$$

$$\frac{F}{\sqrt{\mathsf{H}}} = \sqrt{-K}$$

ist, so folgt:

Digitized by Google

$$\frac{2B_1}{\sqrt{-K}} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u}, \quad \frac{2B}{\sqrt{-K}} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v}$$

so dass sich wegen $\beta_1 = -B_1$, $\beta = -B$ die Bedingung auf

$$(a\, x_u\, p) \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + (a\, x_v\, p) \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} = 0$$

reducirt. Durch Multiplication mit $(x_u\, x_v\, p) = \sqrt{\mathsf{H}}$ verwandelt man diese in

$$\Sigma a\, x_u \left(f \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + g \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} \right) = \Sigma a\, x_v \left(e \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial v} + f \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{-K}}}{\partial u} \right)$$

aus welcher folgt, dass K eine Constante sein muss. Dagegen ist nicht ausgeschlossen, dass der Ausdruck $(a\, x\, p)$ für bestimmte Werthe der Constanten auch bei anderen Flächen eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Zur weiteren Untersuchung der Lösung σ betrachte ich die Rotationsflächen constanter Krümmung

$$x_1 = u \cos v$$
$$x_2 = u \sin v$$
$$x_3 = f$$

wo f Function von u allein ist. Man erhält

$$\Theta_1 = \frac{f' \cos v}{k f' \cos z - a_3} = \frac{f' \cos v}{\gamma}$$
$$\Theta_2 = \frac{f' \sin v}{k f' \cos z - a_3} = \frac{f' \sin v}{\gamma}$$
$$\Theta_3 = -\frac{1}{k f' \cos z - a_3} = -\frac{1}{\gamma}$$

wobei $z = a + v$, $\gamma = k f' \cos z - a_3$ gesetzt ist; k, a_3, a sind willkürliche Constanten. Dann ist

$$\mathsf{H} = u^2 (1 + f'^2), \quad K\sqrt{\mathsf{H}} = f' f'' : (1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$D = \frac{\gamma^2}{f'}, \quad D_{11} = \frac{\gamma^2 u}{f'}, \quad D_1 = 0$$

Digitized by Google

und, wenn man das constante Krümmungsmass mit m bezeichnet

$$f' f'' = m u (1 + f'^2)^2$$

$$-\frac{1}{1 + f'^2} = m u^2 + c$$

$$\frac{f'^2}{1 + f'^2} = m u^2 + c + 1$$

Man erhält also zunächst

$$\varphi_1 = -(f k \sin a + a_3 u \sin v)$$

$$\varphi_2 = -(f k \cos a - a_3 u \cos v)$$

$$\varphi_3 = \quad u k \sin z$$

und hieraus die neue Lösung

$$\sigma = \frac{k \sin z}{\gamma} [u + f f']$$

Für $c = -1$ hat man die Kugel. In dem besonderen Falle, wo der Mittelpunct der Kugel im Coordinatenanfang sich befindet, ist

$$x_3 = \sqrt{\frac{1}{m^2} - u^2} = f$$

also

$$u + f f' = 0.$$

Es ergiebt sich also hier keine neue Lösung mit Hülfe der infinitesimalen Bewegung, von welcher ausgegangen war, denn σ wird gleich Null. Schliesst man diesen Fall, der auch nur unter der angegebenen Voraussetzung eintreten kann, aus, so ergeben sich aus der Lösung σ die neuen Verschiebungscomponenten

$$\varphi'_1 = \quad k \int (u + f f') \cos a \, du - k (c + 1) \int \sin z \cos v \, dv$$

$$\varphi'_2 = -k \int (u + f f') \sin a \, du - k (c + 1) \int \sin z \sin v \, dv$$

$$\varphi'_3 = -k \cos z \int \frac{(u + f f') \, du}{f}.$$

In dem besonderen Falle einer Kugel mit dem Radius Eins, deren Mittelpunct nicht im Coordinatenanfang liegt,

Digitized by Google

$$x_3 = a + \sqrt{1 - u^2}$$

wird
$$u + f f' = - a f'$$

also
$$\sigma = \frac{f' \sin z}{\gamma}$$

Aus den soeben angegebenen Werthen der q' findet man nun

$$q'_1 = \quad f \cos a$$
$$q'_2 = - f \sin a$$
$$q'_3 = - u \cos z$$

und aus diesen die neue Lösung

$$\sigma' = \Sigma q' \Theta = \cos z \frac{(u + f f')}{\gamma}$$

Eine Fortsetzung der Rechnung zeigt, dass man, von diesem Werthe ausgehend, wieder die ursprüngliche Lösung σ erhält. Hier reducirt sich also die Gesammtheit der Lösungen, abgesehen von der auf der infinitesimalen Bewegung beruhenden, auf die beiden σ und σ'; wie aber die Verhältnisse sich für den Fall einer allgemeineren Fläche, als der Kugelfläche gestalten, bedarf noch einer näheren Untersuchung.

Digitized by Google

Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze und eine besondere Form der Convergenz-Bedingung für unendliche Reihen.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 17. Juni.*)

Wie ich schon in einer Note am Schlusse meiner Abhandlung über unendliche Doppelreihen erwähnte[1]), hat Du Bois Reymond in seinen „Paradoxen des Infinitär-Calcüls"[2]) den Versuch gemacht, die Einführung seiner Function $\tau(a)$ (welche die Grenze zwischen der Convergenz und Divergenz des Integrals $\int_0^a \frac{t(a)}{a}$ bilden soll, je nachdem $t(a) < \tau(a)$ oder $t(a) > \tau(a)$) in ausführlicherer Weise zu rechtfertigen. Obschon nun durch diese Auseinandersetzungen die von mir bei früherer Gelegenheit[3]) gegen die Zulässigkeit einer solchen Function $\tau(a)$ erhobenen Einwendungen weit eher bekräftigt, als erschüttert werden, so erscheint es mir doch zweckmässig, zur weiteren Klärung dieser für die Principien der Functionenlehre immerhin wichtigen und interessanten Frage auf die Hauptpunkte jenes Rechtfertigungs-Versuches etwas genauer einzugehen und daran einige allgemeine Bemerkungen über die

[1]) Sitz.-Ber. 1897, S. 152.
[2]) Math. Ann. Bd. 11, S. 158 ff.
[3]) Sitz.-Ber. 1896, S. 605 ff.

Digitized by Google

Unzulänglichkeit gewisser Du Bois Reymond'scher Grund-Anschauungen zu knüpfen.

1.

Zunächst zeigt Du Bois Reymond in ganz correcter Weise und ähnlich, wie ich es gleichfalls a. a. O. kurz angedeutet habe, dass die Annahme, es existire eine solche Function $\tau(a)$, auf unlösbare Widersprüche führt. Anstatt nun aber hieraus den einzig möglichen logischen Schluss zu ziehen, dass also jene Annahme a limine abzuweisen sei, folgert er wiederum nur soviel, dass die fragliche Grenze zwischen Convergenz und Divergenz durch keine bekannte Function d. h. „durch keine genügend gekennzeichnete Abhängigkeit" darstellbar sein könne. Sodann aber fährt er folgendermaassen fort:[1])

„Gleichwohl wird es Niemanden geben, der, vorausgesetzt dass er von den hier auseinandergesetzten Dingen noch nichts weiss, aber geübte geometrische Vorstellungen besitzt, nicht alle Zwischenstufen zwischen dem Nullwerden von

$$\frac{1}{\lg\frac{1}{a}\cdots\lg_n\frac{1}{a}} \quad \textit{und} \quad \frac{}{\lg\frac{1}{a}\cdots\left(\lg_n\frac{1}{a}\right)^{1+\mu}}$$

für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt hielte. Aber auch die genaue Kenntniss der obigen Ergebnisse vorausgesetzt, hätte es, meiner Ueberzeugung nach, nicht den geringsten Sinn anzunehmen, dass es keine Grenze zwischen Convergenz und Divergenz gebe, oder richtiger, eine solche Vorstellung würde unsern eingewurzelten Vorstellungen zuwider laufen.

Wie also diesen Widerspruch zwischen den Ergebnissen der analytischen Untersuchung und der angeborenen Grössenvorstellung versöhnen?"

Ich muss gestehen, dass diese letzten Sätze auf mich ungefähr so wirken, als seien sie in einer völlig fremden Sprache geschrieben. Und ich kann daraus nur soviel ent-

---

[1]) a. a. O. S. 164.

Digitized by Google

nehmen, dass die „eingewurzelten“ oder gar „angeborenen“ Grössenvorstellungen verschiedener Mathematiker offenbar grundverschieden sein müssen. Wenn ich nun aber auf Grund meiner „eingewurzelten“ Grössenvorstellungen mit ganz dem entsprechenden Maasse von apodiktischer Ueberzeugung lediglich den Satz niederschreiben wollte: „Es hat nicht den geringsten Sinn, die Existenz einer Grenze zwischen Convergenz und Divergenz anzunehmen“, so würde hierdurch die Erkenntniss der Wahrheit um keinen Schritt gefördert werden. Ich will also versuchen, dem Gedankengange, welcher der Du Bois Reymond'schen Behauptung zu Grunde liegt, etwas genauer nachzugehen, und hierzu liefert der erste der oben citirten Sätze den genügenden Anhalt.

Darnach soll also ein mit der Natur des vorliegenden Problems nicht genauer vertrauter, aber mit geübten geometrischen Vorstellungen ausgerüsteter Beurtheiler „alle“ Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für gedanklich vorhanden und gleichberechtigt halten; mit anderen Worten, er soll auf Grund seiner geometrischen Vorstellungen unfehlbar zu der Anschauung gelangen, dass die verschiedenen Ordnungstypen des Nullwerdens eine **stetige** lineare Mannigfaltigkeit bilden.

Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass der Versuch, die geometrische Vorstellung eines Linear-Continuums auf die Mannigfaltigkeit jener Nulltypen[1]) zu übertragen, von vornherein vollständig scheitert, und dass daher im Munde jenes geometrisch-denkenden Beurtheilers die Existenz „aller“ möglichen Zwischenstufen des Nullwerdens lediglich eine Redensart ohne Inhalt bedeuten würde.

---

[1]) Ich gebrauche den Ausdruck Null- bezw. Unendlichkeits-Typus hier und im folgenden stets zur Bezeichnung einer Function, welche eine bestimmte Art des Null- bezw. Unendlichwerdens charakterisirt; nicht aber im Sinne des Du Bois Reymond'schen Ausdruckes „Infinitär-Typus“ (s. z. B. den Aufsatz: Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. — Annali di Matematica. Serie II, T. IV, p. 338.

Digitized by Google

Denn, lässt man nur in dem Ausdrucke x^μ den Exponenten μ successive das ganze stetige Gebiet der positiven Zahlen durchlaufen, so entspricht jedem Punkte μ der positiven Zahlen-Linie eine bestimmte Function x^μ, also auch ein bestimmter Typus des Nullwerdens — und umgekehrt. Um sich also nur die Gesammtheit dieser Nulltypen als geordnete lineare Mannigfaltigkeit vorzustellen, um dieselben gewissermaassen auf einer geraden Linie unterzubringen, besitzt die geometrische Phantasie kein anderes Mittel, als sich jeden Punkt dieser Geraden mit einem solchen Nulltypus belegt zu denken. Wenn sodann reinarithmetische Ueberlegungen zeigen, dass es für jeden einzelnen Werth μ unendlich viele Functionen, wie $x^\mu \cdot \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{-\nu}$, $x^\mu \cdot \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{-\nu} \left(\lg_2 \frac{1}{x}\right)^{-\varrho}, \ldots$ $(\nu > 0,\ \varrho > 0, \ldots)$ giebt, welche für $\lim x = 0$ stärker Null werden, als x^μ, aber schwächer als jedes $x^{\mu+\varepsilon}$, wie klein auch die positive Zahl ε angenommen werden mag, so ist für alle diese neuen Nulltypen auf der gedachten Geraden kein Platz vorhanden. Mit anderen Worten, es ist schlechterdings unmöglich, sich etwa eine angebliche „Gesammtheit" von Nulltypen als geordnete lineare stetige Mannigfaltigkeit, also unter dem Bilde einer geraden Linie vorzustellen. Ohne diese Vorstellungs-Möglichkeit hat aber die Aussage: man halte „**alle**" Zwischenstufen des Nullwerdens zwischen zwei bestimmten für „gedanklich vorhanden und gleichberechtigt" nicht den geringsten Sinn, und ein einigermaassen scharfsinniger geometrischer Beurtheiler wird sich sehr wohl hüten, dieses von Du Bois Reymond als selbstverständlich präsumirte Urtheil abzugeben.

„Gedanklich vorhanden" sind eben nur alle diejenigen Nulltypen, welche durch irgend welche Functionen wirklich definirt sind. Solcher Functionen giebt es nun aber thatsächlich stetige unendliche Mannigfaltigkeiten von unendlich hoher Ordnung, z. B.

Digitized by Google

$$(1) \qquad x^{\nu} \cdot \left(\lg_1 \frac{1}{x}\right)^{\nu_1} \cdot \left(\lg_2 \frac{1}{x}\right)^{\nu_2} \cdots = \varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2 \cdots}(x)$$

wo:

$$(2) \quad 0 \leqq \nu < \infty\,, \; -\infty < \nu_1 < +\infty\,, \; -\infty < \nu_2 < +\infty\,, \; \ldots$$

mit der Beschränkung, dass:

$$(2\text{a}) \qquad \begin{cases} \nu_1 \geqq 0\,, \text{ falls } \nu = 0, \\ \nu_2 \geqq 0\,, \text{ falls } \nu = 0,\ \nu_1 = 0 \text{ etc.} \end{cases}$$

Bezeichnet man mit $(m, m_1, m_2, \ldots)$ und $(n, n_1, n_2, \ldots)$ irgend zwei den obigen Bedingungen genügenden Systeme reeller Zahlen, so schreibt man nach Du Bois Reymond's Vorgange:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x) \prec \varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x) \\ \varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x) \succ \varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x) \end{array} \right\}$$

in Worten: $\varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x)$ ist „infinitär kleiner" als $\varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x)$, bezw. $\varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x)$ ist „infinitär grösser" als $\varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x)$, wenn:

$$(4) \qquad \lim_{x=0} \frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x)} = 0\,.$$

Man bemerke nun vor allem, dass diese letztere Bedingung in Wahrheit unendlich viele Bedingungen von der Form:

$$(5) \qquad \frac{\varphi_{m\,m_1\,m_2 \cdots}(x)}{\varphi_{n\,n_1\,n_2 \cdots}(x)} < \varepsilon \text{ für } x < \delta$$

repräsentirt. Nur dadurch, dass man eine solche unendliche Menge von Bedingungen zusammenfasst und für ihr gleichzeitiges Bestehen ein bestimmtes Zeichen (3) einführt, werden die Terme der unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit (1) in dem Sinne mit einander vergleichbar, dass in der That zwischen je zwei ganz beliebig aus ihr herausgegriffenen Termen ausnahmslos eine Beziehung von der Form (3) besteht. Wird nun auch auf diese Weise für die $\varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2 \cdots}(x)$ ein eindeutig bestimmtes Ordnungs-Princip definirt, welches demjenigen der reellen Zahlen möglichst analog ist, so gewinnt hierdurch die stetige unendlich-

Digitized by Google

vieldimensionale Mannigfaltigkeit der $\varphi_{\nu\,\nu_1\,\nu_2\,\ldots}(x)$ keineswegs alle Eigenschaften einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit.

Dergleichen Ordnungs-Gesetze lassen sich für jede mehrdimensionale Mannigfaltigkeit auf unendlich viele Arten definiren, ohne dass hierdurch der eigentliche Charakter ihrer Mehrdimensionalität beseitigt werden kann.

Um den Sinn dieser letzten Bemerkung deutlicher zu machen, will ich den einfachen Fall einer zweidimensionalen stetigen Mannigfaltigkeit etwas genauer betrachten. Eine solche bilden z. B. alle möglichen reellen Zahlenpaare (μ, ν) oder, geometrisch gesprochen, die Punkte einer Ebene. Wird nun durch das Symbol:

$$(6) \qquad (\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$$

ausgedrückt, dass in jeder Folge von Termen (μ, ν) der Term (μ_1, ν_1) dem Terme (μ_2, ν_2) voranzugehen hat, so lässt sich die Existenz einer Beziehung von der Form (6) für jedes beliebig gewählte Paar (μ_1, ν_1), (μ_2, ν_2) in folgender Weise eindeutig festlegen. Es seien $f(\mu, \nu)$, $g(\mu, \nu)$ zwei eindeutige reelle Functionen (die eventuell auch nur von je einer der beiden Veränderlichen μ, ν abzuhängen brauchen z. B. $f(\mu, \nu) = \mu$, $g(\mu, \nu) = \nu$) mit der einzigen Einschränkung, dass das gleichzeitige Bestehen der beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \quad g(\mu_1, \nu_1) = g(\mu_2, \nu_2)$$

ausschliesslich dann möglich sein soll, wenn:

$$(8) \qquad \mu_1 = \mu_2, \quad \nu_1 = \nu_2.$$

Alsdann soll die Beziehung (6) dadurch definirt sein, dass

$$(9) \qquad \begin{cases} \text{entweder: } f(\mu_1, \nu_1) < f(\mu_2, \nu_2) \\ \text{oder: } \quad f(\mu_1, \nu_1) = f(\mu_2, \nu_2), \; g(\mu_1, \nu_1) < g(\mu_2, \nu_2).^{1)} \end{cases}$$

[1]) Man könnte die durch Gl. (7) und (8) den Functionen f und g auferlegte Beschränkung auch fallen lassen. Nur müsste dann zu den beiden Festsetzungen (9) eine dritte hinzukommen, welche sich auf das Eintreten des Falles (7) zu beziehen hätte.

Digitized by Google

Man erkennt ohne weiteres, dass in der That auf Grund dieser zwei Festsetzungen jede endliche Anzahl von Termen (μ, ν) im Sinne der Ungleichung (6) (also in „monoton zunehmender" oder auch umgekehrt in „monoton abnehmender" Folge) vollständig eindeutig geordnet werden kann. Auch lassen sich, wenn $(\mu_1, \nu_1) < (\mu_2, \nu_2)$, aus der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit der (μ, ν) unendlich viele abzählbare monoton zunehmende Mengen herausheben, welche mit (μ_1, ν_1) beginnend die Grenze (μ_2, ν_2) haben; desgleichen unendlich viele monoton zunehmende, stetige lineare Mengen, welche von (μ_1, ν_1) und (μ_2, ν_2) begrenzt werden. Dagegen lässt sich nicht umgekehrt jede aus der Mannigfaltigkeit der (μ, ν) herausgehobene stetige lineare Menge als geordnete (d. h. monoton zu- oder abnehmende) lineare Menge auffassen. Und am allerwenigsten bilden alle möglichen der Bedingung:

$$(\mu_1, \nu_1) < (\mu, \nu) < (\mu_2, \nu_2)$$

genügenden Terme (μ, ν) eine einzige lineare stetige und geordnete Menge, wie mit aller Strenge aus dem bekannten Satze [1]) hervorgeht, dass eine zweidimensionale stetige Mannigfaltigkeit nicht stetig und eindeutig umkehrbar auf eine lineare abgebildet werden kann.

In ganz analoger Weise lassen sich für jede n-dimensionale oder auch unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit mit Hülfe von n bezw. unendlich vielen Bedingungen beliebig viele eindeutige Ordnungs-Gesetze aufstellen. Und der sogenannte „infinitäre Grössen-Begriff" ist lediglich ein derartiger zusammengesetzter Ordnungs-Begriff, durch dessen Einführung die Mannigfaltigkeit der Null- bezw. Unendlichkeits-Typen keineswegs

---

[1]) Lüroth, Erlanger Berichte 1878. — G. Cantor, Ueber einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten. Göttinger Nachr. 1879, S. 127. — Netto, Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Journal f. Math. Bd. 86, S. 263.

Digitized by Google

die Eigenschaften einer unendlich-vieldimensionalen Mannigfaltigkeit vollständig verliert.

Aus der Nichtbeachtung dieses letzteren Umstandes entspringen in Wahrheit alle jene angeblichen „Paradoxen" des Du Bois Reymond'schen „Infinitär-Calcüls", welche eben einzig und allein darin bestehen, dass gewisse aus den gewöhnlichen Grössen-Beziehungen zwischen reellen Zahlen abstrahirte Gesetze und Anschauungen nicht ohne weiteres auf die Objecte jener „infinitären" Grössenbeziehungen (d. h. die Null- bezw. Unendlichkeits-Typen) übertragbar sind. Wirkliche Analogien mit der linearen Mannigfaltigkeit der reellen Zahlen können nämlich nur da erwartet werden, wo lediglich eine lineare, geordnete und stetige oder aus einer solchen entnommene unstetige Menge derartiger Objecte in Betracht kommt.[1]) Sie erscheinen hingegen a priori da ausgeschlossen, wo die Mehr-Dimensionalität der betreffenden Mannigfaltigkeiten in's Gewicht fällt. Und ich muss es, nach dem Gesagten, als auf einem fundamentalen Irrthume beruhend bezeichnen, wenn Du Bois Reymond in seiner Allgemeinen Functionen-Theorie[2]) bezüglich der „infinitären Pantachie", d. h. der Gesammtheit der Unendlichkeits-Typen, die Aussage macht: „*Idealistisch ist sie ein infinitäres Continuum, ähnlich dem Zahlen-Continuum, welches man ebenfalls, wenn auch minder einfach (?) als Punktvielheit auf einer Linie auffassen kann.*"

---

[1]) S. z. B. den oben citirten Aufsatz in den Annali de Matematica, Serie II, T. IV, p. 338. — Im übrigen tritt auch hier schon als fundamentaler Unterschied gegenüber der Menge der reellen Zahlen der Umstand hervor, dass das bekannte Axiom des Archimedes nicht mehr gilt. Vgl. Stolz, Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Math. Ann. Bd. XXII, S. 505—507 Fussnoten. — Derartige dem Axiome des Archimedes nicht genügende Mannigfaltigkeiten sind neuerdings von Bettazzi genauer untersucht worden: Teoria delle grandezze, Pisa 1890. p. 47–58.

[2]) Tübingen 1882, S. 283.

Digitized by Google

2.

Im übrigen handelt es sich ja in dem vorliegenden Falle gar nicht um die Entscheidung der (lediglich von Du Bois Reymond ganz unnöthiger Weise herbeigezogenen) allgemeinen Frage, ob man „alle möglichen" Stufen des Nullwerdens als eine lineare stetige Mannigfaltigkeit ansehen kann, sondern um die wesentlich speciellere, ob zwei ganz bestimmt vorgeschriebene Folgen (also abzählbare Mengen) von Ordnungs-Typen einer gemeinsamen Grenze zustreben; noch genauer gesagt, ob die beiden Functionen-Folgen:

$$(10)\quad \varphi_\nu(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\cdots\lg_\nu\frac{1}{x}},\quad \varphi_{\nu,\varrho}(x) = \frac{1}{\lg\frac{1}{x}\lg_2\frac{1}{x}\cdots\left(\lg_\nu\frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}}$$

eine einzige bestimmte Grenz-Function definiren, wenn ν ganzzahlig in's Unendliche wächst, während ϱ eine beliebig klein anzunehmende, aber feste positive Zahl bedeutet.

Diese Frage dürfte nun freilich der von Du Bois Reymond zu Hülfe gerufene geometrische Beurtheiler in dem folgenden Sinne bejahen: „Die beiden unendlichen Curven-Schaaren:

$$(11)\qquad y = \varphi_\nu(x),\ y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)\ (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

deren Ordinaten für hinlänglich kleine Werthe von x der Bedingung genügen:

$$(12)\qquad \varphi_{\nu,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x),$$

nähern sich für $\lim \nu = \infty$ einer bestimmten Grenz-Curve."

Und er hätte, wie sogleich mit Hülfe der nothwendigen analytischen Ueberlegungen gezeigt werden soll, hiermit vollständig Recht. Nur entspricht das wirkliche Resultat keineswegs der auf den ersten Blick nahe liegenden Vorstellung zweier Curven-Schaaren, die sich, wie Ungl. (12) zu lehren scheint, von verschiedenen Seiten einander unbegrenzt nähern und auf diese Weise eine gewisse Grenz-Curve **ein-**

Digitized by Google

schliessen. Vielmehr wird das Intervall, für welches Ungl. (12) gilt, mit unbegrenzt wachsenden Werthen von ν auch unbegrenzt verkleinert, d. h. die betreffenden Curven durchsetzen sich bei wachsender Ordnungszahl in immer grösserer Nähe des Nullpunktes, und die Grenz-Curve wird von ihnen nicht **ein-**, sondern **aus**geschlossen. Als die fragliche Grenz-Curve erscheint hierbei der positive Theil der Ordinaten-Axe, also gerade die einzige Curve, deren Gleichung nicht auf die Form $y = \tau(x)$ gebracht werden kann. Mit anderen Worten, gerade die Existenz einer ganz bestimmten Grenz-Curve für die beiden Curven-Schaaren $y = \varphi_\nu(x)$ und $y = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$ lässt unmittelbar erkennen, dass die Existenz einer Grenz-Function $\tau(x)$ für die $\varphi_\nu(x)$ und $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$ definitiv ausgeschlossen erscheint, und man gelangt also auf diesem von Du Bois Reymond ausdrücklich zur Unterstützung seiner Behauptung vorgezeichneten Wege nur von neuem zu der Ueberzeugung ihrer Unhaltbarkeit.

Um dieses angedeutete Resultat wirklich abzuleiten, werde gesetzt:

$$(13^a)\quad c_0 = 1,\ c_1 = e,\ c_2 = e^{e_1},\ c_3 = e^{e_2}, \ldots c_\nu = e^{e_{\nu-1}}, \ldots$$

so dass also:

$$(13^b)\quad \lg_1 c_\nu = c_{\nu-1},\ \lg_2 c_\nu = c_{\nu-2}, \ldots \lg_\nu c_\nu = 1,\ \lg_{\nu+1} c_\nu = 0.$$

Hieraus folgt zunächst, dass allgemein $\varphi_{\nu+1}(x)$ und $\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)$ für $x = \frac{1}{c_\nu}$ unendlich gross werden. Da sodann:

$$(14)\qquad \frac{\varphi_{\nu+1}(x)}{\varphi_{\nu+1,\varrho}(x)} = \left(\lg_{\nu+1}\frac{1}{x}\right)^\varrho,\quad \frac{\varphi_\nu(x)}{\varphi_{\nu+1}(x)} = \lg_{\nu+1}\frac{1}{x},$$

und:

$$(15)\qquad \lg_{\nu+1}\frac{1}{x}\begin{cases} < 1 \text{ für } x > \dfrac{1}{c_{\nu+1}} \\ > 1 \text{ für } x < \dfrac{1}{c_{\nu+1}}, \end{cases}$$

so hat man:

Digitized by Google

(16) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) > \varphi_{\nu+1}(x) > \varphi_\nu(x) \text{ für } x > \frac{1}{e_{\nu+1}},$$

und:

(17) $$\varphi_{\nu+1,\varrho}(x) < \varphi_{\nu+1}(x) < \varphi_\nu(x) \text{ für } x < \frac{1}{e_{\nu+1}}.$$

Erst bei der Stelle $x = \frac{1}{e_{\nu+1}}$, welche mit wachsendem ν der Nullstelle immer näher rückt, findet also jenes Durchsetzen der betreffenden Curven statt, welches ihre endgültige Reihenfolge bestimmt.

Um die Gestalt der fraglichen Curven etwas genauer festzustellen, bilde man zunächst aus:

$$\varphi_n(x) = \prod_1^n{}_\nu \frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}}$$

durch Differentiation:

$$\varphi_n'(x) = \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}_\nu \lg_\nu \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\lg_\nu \frac{1}{x}}\right)$$

$$= \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}_\nu \frac{1}{x \lg \frac{1}{x} \ldots \lg_\nu \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \varphi_n(x) \cdot \sum_1^n{}_\nu \varphi_\nu(x),$$

also schliesslich:

(18) $$\varphi_n'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x), \quad \text{wo:} \quad \Phi_n(x) = \sum_1^n{}_\nu \varphi_\nu(x).$$

Da sodann:

$$\varphi_{n,\varrho}(x) = \varphi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho},$$

so folgt mit Berücksichtigung von Gl. (18):

$$\varphi_{n,\varrho}'(x) = \frac{1}{x} \cdot \varphi_n(x) \cdot \Phi_n(x) \cdot \frac{1}{\left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^\varrho} + \varrho \cdot \frac{1}{x \cdot \lg \frac{1}{x} \ldots \left(\lg_n \frac{1}{x}\right)^{1+\varrho}} \cdot \varphi_n(x)$$

Digitized by Google

oder:

$$(19)\quad \varphi'_{n,\varrho}(x) = \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x), \text{ wo: } \Phi_{n,\varrho}(x) = \Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x).$$

Hieraus ergiebt sich durch nochmalige Differentiation zunächst:

$$(20)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x)$$

$$+\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi^2_{n,\varrho}(x) + \frac{1}{x}\cdot\varphi_{n,\varrho}\cdot\Phi'_{n,\varrho}(x),$$

wo nach Gl. (16) und (15):

$$\Phi'_{n,\varrho}(x) = \sum_1^n{}_\nu\,\varphi'_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi'_n(x) = \frac{1}{x}\cdot\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\frac{1}{x}\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x).$$

Man hat nun:

$$\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\sum_1^\nu{}_\mu\,\varphi_\mu(x) = \sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\sum_\nu^n{}_\mu\,\varphi_\mu(x)$$

also:

$$2\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) = \sum_1^n{}_\nu\cdot\varphi_\nu(x)\cdot\sum_1^n{}_\mu\,\varphi_\mu(x) + \sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x)$$

$$= \Phi^2_n(x) + \sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu(x)\cdot\Phi_\nu(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\Phi_n(x) + \varrho\cdot\varphi_n(x)\right\}^2 + \tfrac{1}{2}\left\{\sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)\right\},$$

sodass Gl. (20) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(21)\quad \varphi''_{n,\varrho}(x)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_{n,\varrho}(x)\cdot\Phi_{n,\varrho}(x)\cdot\left\{1 - \tfrac{3}{2}\cdot\Phi_{n,\varrho}(x) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}_\nu\,\varphi^2_\nu(x) - \varrho^2\cdot\varphi^2_n(x)}{\Phi_{n,\varrho}(x)}\right\}$$

Hieraus folgt noch, wenn man speciell $\varrho = 0$ setzt:

Digitized by Google

$$(22)\qquad \varphi_n''(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot\varphi_n(x)\cdot\Phi_n(x)\cdot\left\{1-\tfrac{3}{2}\Phi_n(x)-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\sum_1^n{}_\nu\,\varphi_\nu^2(x)}{\Phi_n(x)}\right\}.$$

Die Gleichungen (15), (16) und (18), (19) lehren, dass die Curven $y=\varphi_\nu(x)$ und $y=\varphi_{\nu,\varrho}(x)$, oder, was auf dasselbe herauskommt, die Curven $y=\varphi_{\nu,\varrho}(x)$ für $\varrho=0$ und $\varrho>0$, bei beliebigen Werthen der ganzen Zahl ν den gleichen sehr einfachen Charakter besitzen. Die Ordinaten haben für $x=0$ den Werth 0 und nehmen, wie Gl. (15), (16) zeigt, mit wachsendem x monoton zu, bis sie für $x=\frac{1}{e_{\nu-1}}$ unendlich gross werden (s. Gl. (10)): die Linie $x=\frac{1}{e_{\nu-1}}$ ist dann die Asymptote der beiden Curven $y=\varphi_\nu(x)$ und $y=\varphi_{\nu,\varrho}(x)$, während sämmtliche Curven die Ordinaten-Axe im Nullpunkte tangiren. Aus Gl. (18), (19) ersieht man, dass die zunächst concav, schliesslich convex gegen die Abscissen-Axe verlaufenden Curven zwischen der Nullstelle $x=0$ und der Unendlichkeits-Stelle $x=\frac{1}{e_{\nu-1}}$ je einen einzigen Inflexions-Punkt besitzen. Da im übrigen die Asymptote $x=\frac{1}{e_{\nu-1}}$ für $\lim\nu=\infty$ mit der Ordinaten-Axe zusammenfällt, so bildet deren positiver Theil in der That die fragliche Grenz-Curve.

Dieses Ergebniss kann sogar in dem Sinne gedeutet werden, dass jene Grenz-Curve *cum grano salis* die wahre Grenze zwischen Convergenz und Divergenz definirt. Wenn man nämlich sagt, dass von den beiden Integralen:

$$\text{(I)}\qquad \int_0^a \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x}\cdot dx,\qquad \text{(II)}\ \int_0^a \frac{\varphi_\nu(x)}{x}\cdot dx$$

das erste convergirt, das zweite divergirt, so ist über die wahre Bedeutung dieser Aussage folgendes zu bemerken:

1) Die obere Integrations-Grenze a ist keineswegs in dem Sinne als constant anzusehen, dass es eine Zahl $a>0$ giebt,

Digitized by Google

welche für jeden noch so grossen Werth von ν die Convergenz des Integrals (I) gewährleistet. Vielmehr muss $a < \frac{1}{e_{\nu-1}}$ angenommen werden, wenn das Integral (I) convergiren soll; und andererseits bleibt das Integral (II) divergent, auch wenn a in der angedeuteten Weise verkleinert wird.

2) Jene Integrale sind sogenannte „uneigentliche", d. h. sie haben lediglich die Bedeutung einer abgekürzten Schreibweise für:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu,\varrho}(x)}{x} \cdot dx, \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\varphi_{\nu}(x)}{x} \cdot dx, \quad \text{wo: } 0 < \varepsilon < a.$$

Da nun auf Grund der sub 1) angestellten Betrachtung für $\lim \nu = \infty$ geradezu $a = 0$ gesetzt werden muss, so kann man nicht etwa sagen, dass sich jene beiden Integrale zugleich mit der Länge des Integrations-Intervalls auf den Werth 0 reduciren, sie hören vielmehr ganz unzweideutig auf, überhaupt zu existiren, und in diesem Sinne sind sie in der That weder convergent, noch divergent.[1]) Zugleich ergiebt

[1]) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass diese Schlüsse keine Aenderung erleiden, wenn man etwa, um das Unendlichwerden der Functionen $\varphi_{\nu,\varrho}(x)$, $\varphi_{\nu}(x)$ für $x = \frac{1}{e_{\nu-1}}$ gänzlich zu eliminiren, dieselben durch andere Functionen $\psi_{\nu,\varrho}(x)$, $\psi_{\nu}(x)$ ersetzt, sodass:

$$\psi_{\nu,\varrho}(x) = \varphi_{\nu,\varrho}(x)$$
$$\psi_{\nu}(x) = \varphi_{\nu}(x)$$

nur für das Intervall: $0 < x < \frac{1}{e_{\nu-2}}$, während über $x = \frac{1}{e_{\nu-2}}$ hinaus $\psi_{\nu,\varrho}(x)$ und $\psi_{\nu}(x)$ als willkürliche, endliche und stetige Functionen gedacht werden können. Denn zerlegt man die betreffenden Integrale in folgender Weise:

$$\int_0^a = \int_0^{\frac{1}{e_{\nu-2}}} + \int_{\frac{1}{e_{\nu-2}}}^a$$

so gelten für das erste Theil-Integral genau wieder die im Texte gemachten Bemerkungen.

Digitized by Google

sich als immerhin einigermaassen werthvolles Resultat dieser vielleicht manchem Leser ziemlich zwecklos erscheinenden Untersuchung eine neue Bestätigung der erfreulichen Thatsache: Die Sprache der Analysis ist von so erstaunlicher Vollkommenheit, dass sie auch auf die verfänglichsten Fragen stets die richtige Antwort giebt, wenn man sie nur richtig anzuwenden versteht.

3.

Anstatt durch ähnliche Betrachtungen, wie sie im vorigen Artikel angestellt wurden, Aufschluss über die wahre Natur jener praesumirten Grenze zwischen Convergenz und Divergenz zu gewinnen, nimmt Du Bois Reymond seine Zuflucht zur Heranziehung einer Analogie, welche ich — ohne diese Auseinandersetzung zu kennen — schon in meinem ersten Aufsatze[1]) als sehr naheliegend, aber durchaus unzutreffend bezeichnet habe, nämlich die (scheinbare) Analogie zwischen jenen „undefinirbaren" Null- bezw. Unendlichkeits-Typen und den Irrationalzahlen. Um diese Analogie näher zu begründen sagt er (a. a. O. p. 165) zunächst folgendes:

„*Wenn wir nun in der gemeinen Zahlenfolge, trotzdem die Folge der rationalen Zahlen unbegrenzt dicht ist, hier durch analytische Betrachtungen, dort durch geometrische Constructionen, dahin geführt werden, Grössen als vorhanden anzunehmen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie* $\sqrt{2}$ *oder* π *dergleichen sind, was Wunder wenn auch in der infinitären Grössenfolge unsere Gedankenverbindungen zu der Annahme einer Art des Wachsthumes uns hinleiten, die man durch analytische Operationen nie wird darstellen können?*"

Also: Wir werden in der gemeinen Zahlenfolge dahin geführt (*sic!*), Grössen als vorhanden anzusehen, welche durch Zahlen nicht ausdrückbar sind, wie z. B. $\sqrt{2}$ und π.

---

1) a. a. O. S. 606 ff.

Digitized by Google

Obschon ich nicht recht verstehe, wie überhaupt irgendwelche „Grössen“ in die „gemeine Zahlenfolge“ hineingerathen, zumal solche, die „durch Zahlen nicht ausdrückbar sind“, so glaube ich diesem etwas merkwürdigen Satze mit Sicherheit soviel entnehmen zu können, dass speciell $\sqrt{2}$ nach Du Bois Reymond's Terminologie „durch Zahlen nicht ausdrückbar“ ist, und möchte dies zum besseren Verständnisse des nun folgenden Satzes ausdrücklich hervorheben. Dieser lautet:

„*Kurzum ich meine, die ideelle Grenze zwischen Convergenz und Divergenz ist ein* irrationales Unendlich, *welches sich zu den convergenten und divergenten unendlichen Operationen ganz ähnlich verhält, wie die Länge der Kreisperipherie zu den von aussen und von innen sich ihr nähernden geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.*“

Du Bois Reymond erblickt also die fragliche Analogie nicht, wie ich seiner ersten Bemerkung ähnlichen Inhalts entnehmen zu müssen glaubte[1]), in der räumlichen Beziehung zwischen den geometrischen Figuren des Kreises und der eingeschriebenen oder umschriebenen Polygone, sondern in der analytischen Beziehung zwischen der Länge der Kreisperipherie und derjenigen der sich ihr nähernden „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge.“

So einfach das klingen mag, so gehört doch immerhin einiger Scharfsinn und guter Wille dazu, um nur zunächst genau zu verstehen, was mit diesen „geschlossenen Linien von numerisch darstellbarer Länge“ gemeint sein mag.

Eine bestimmte Länge kommt nach der üblichen — und von Du Bois Reymond acceptirten[2]) — Ansicht zunächst nur einer geradlinigen Strecke zu. Für den analytischen Längenbegriff einer krummen Linie stellt Du Bois Reymond in seinen Erläuterungen zu den Anfangs-

[1]) cf. S. B. 1897, S. 606.

[2]) s. die Note: „Ueber den Begriff der Länge einer Curve.“ — Acta math., T. VI, p. 167.

Digitized by Google

gründen der Variations-Rechnung[1]) die folgende Definition auf: „Diese Länge ist die Grenze einer Summe nach bestimmtem Gesetz in's Unbegrenzte sich vermehrender und dabei angemessen sich verkürzender wirklich vorgestellter Längen."

Hieraus geht zunächst hervor, dass unter den oben bezeichneten „Linien" (mit numerisch darstellbarer Länge) jedenfalls gerade Linien, also unter den „geschlossenen" Linien gewöhnliche Polygone gemeint sind. Was sind nun aber Polygone mit „numerisch darstellbarer Länge"? „Numerisch darstellbar" kann doch garnichts anderes bedeuten, als: „durch Zahlen ausdrückbar." Da nun Du Bois Reymond in dem unmittelbar zuvor citirten Satze ohne jede Einschränkung ausspricht, dass z. B. $\sqrt{2}$ „durch Zahlen nicht ausdrückbar" sei, so hätte man offenbar unter „numerisch darstellbar" soviel wie „rational" zu verstehen.

Auf der anderen Seite erscheint es mir aber, soweit meine elementar-geometrischen und algebraischen Kenntnisse reichen, völlig unerfindlich, wie es möglich sein soll, eine asymptotische Annäherung an die Kreisperipherie durch eine unbegrenzte Reihe von Polygonen mit rationalem Umfange herzustellen. Und da ich nicht glauben kann, dass Du Bois Reymond hierüber anderer Meinung war, so bleibt nur die weitere Annahme übrig, dass unter den geschlossenen Linien mit numerisch darstellbarer Länge in dem vorliegenden Falle gerade solche mit irrationaler Gesammtlänge zu verstehen sind — eine Annahme, die freilich im Hinblick auf die unmittelbar zuvor proklamirte numerische Nicht-Darstellbarkeit von $\sqrt{2}$ kein besonders günstiges Licht auf die Consequenz und Correctheit der Du Bois Reymond'schen Ausdrucksweise wirft, zumal es sich doch hier um die Erörterung ziemlich schwieriger Principienfragen und die Einführung eines ganz neuen, von vornherein äusserst fragwürdigen Begriffes handelt.

---

[1]) Math. Ann. Bd. XV, S. 285.

Digitized by Google

Steht nun aber einmal die Irrationalität jener Polygone ausser Frage, so ist nicht mehr recht ersichtlich, in wiefern der obige Vergleich dazu dienen soll, die angebliche Beziehung des „irrationalen Unendlich" zu dem „rationalen" deutlicher zu machen. Denn erstens erscheint die Zahl π als Grenze einer Zahlenfolge, deren Terme selbst schon irrational sind; zweitens aber ist die Irrationalität von π selbst in gewissem Sinne rein zufällig, d. h. durch die Natur des betreffenden Problems in keiner Weise gefordert. Wählt man nämlich statt des Kreises, der doch in dem obigen Vergleiche lediglich generell den Typus eines eigentlichen d. h. in jedem Punkte mit einer Tangente versehenen Curvenstückes repräsentirt, eine passende andere Curve, z. B. die vom Kreise mit dem Radius 1 erzeugte Cycloide, so liefert der fragliche Grenz-Process die ganze rationale Zahl 8. Mit anderen Worten: der sogenannte analytische Längen-Begriff ist ein rein numerischer Grenz-Begriff, dessen Inhalt sich in keiner Weise mit der Erzeugung des Irrationalen aus dem Rationalen deckt.

Geht man dagegen auf die ursprüngliche geometrische Bedeutung des Längen-Begriffes zurück, so erscheint derselbe, auch wenn es sich um krumme Linien handelt, immerhin als etwas in unserer Vorstellung a priori vollständig vorhandenes, von jeder Grenz-Vorstellung durchaus unabhängiges: man stellt sich eben unter der Länge eines (eigentlichen) Curvenbogens diejenige geradlinige Strecke vor, in welche er durch Biegung oder Abwickelung übergeführt werden kann. Und die Einführung jenes analytischen Längen-Begriffes erscheint lediglich als ein der empirischen Anschauung angepasstes Hülfsmittel zur numerischen Berechnung der geometrischen Länge.

Bei dieser geometrischen Auffassung des Längen-Begriffes wird dann aber der fragliche Vergleich mit dem „irrationalen Unendlich" erst vollends unverständlich.

Halten wir uns nun schliesslich an die scheinbare Analogie des „irrationalen Unendlich" mit der gewöhnlichen

Digitized by Google

Irrationalzahl, so führt eine genauere Betrachtung des wahren Sachverhalts zu dem Ergebnisse, dass auch hier ein brauchbares tertium comparationis in Wahrheit nicht vorhanden ist. Bei der Einführung der Irrationalzahlen handelt es sich darum, die Lücken[1]) einer unstetigen linearen Mannigfaltigkeit durch Schöpfung einer neuen Zahl-Classe auszufüllen. Und die Schöpfung dieser neuen Zahl-Classe erweist sich als durchführbar, da sich die erforderlichen Eigenschaften ihrer Individuen, sowie deren Beziehungen zu einander und zu den bereits vorhandenen (rationalen) Zahlen eindeutig und widerspruchslos definiren lassen. Im vorliegenden Falle ist dagegen von vornherein eine unendlich-vieldimensionale stetige Mannigfaltigkeit vorhanden, und man erkennt weder das Bedürfniss, noch die Möglichkeit, dieselbe durch Einschaltung neu zu schaffender Individuen noch zu „verdichten." Diese Möglichkeit erscheint aber geradezu ausgeschlossen, da der Versuch, jenes „irrationale Unendlich" zu definiren, wie gezeigt wurde, auf logische Widersprüche führt.

Im übrigen ist der tiefere Grund dieses ganzen Du Bois Reymond'schen Irrthums, wie ich schon in meiner ersten Mittheilung hervorhob[2]) und wie seine „Allgemeine Functionentheorie" beweist, darin zu suchen, dass Du Bois Reymond überhaupt zu keiner mathematisch befriedigenden Auffassung des allgemeinen Zahlbegriffes gelangt ist.

Auch wenn man, wie Du Bois Reymond, die (positiven) Zahlen als Zeichen für bestimmte Quantitäten ansieht, so sind sie doch, geradeso wie die Heine-Cantor'schen rein formalen Zahlen, in erster Linie **Zeichen,** deren Beziehungen und Verknüpfungs-Regeln eindeutig und widerspruchslos definirt werden müssen. Es scheint mir für die Begründung der Lehre von den Irrationalzahlen (im Du Bois Reymond'schen Sinne) ziemlich gleichgültig zu sein,

---

[1]) Genauer gesagt: „Schnitte" = „Lücken zweiter Art" — cf. Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 81.

[2]) a. a. O. S. 606, Fussnote.

Digitized by Google

ob man die Existenz „lineärer" Grenzwerthe und hierdurch definirter irrationaler Quantitäten mit dem Du Bois Reymond'schen „Empiristen" lediglich als eine durch unsere Anschauung näherungsweise bestätigte Fiction oder, mehr idealistisch,[1]) als ein Axiom ansieht. Die Berechtigung, die diesen „irrationalen Quantitäten" zuzuordnenden Zeichen als **Zahlen** in die Arithmetik einzuführen, beruht doch schliesslich einzig und allein auf der Möglichkeit, die Rechnungs-Operationen für diese neuen Zeichen auf Grund der für rationale Zahlen geltenden Rechnungsregeln formal zu definiren.[2]) Die Auffassung der Zahlen als Quantitäts-Zeichen versagt nun aber vollständig bezüglich der negativen Zahlen, ohne deren Anwendung die allgemeine Arithmetik[3]) sich bisher nicht behelfen konnte und wohl schwerlich auch in Zukunft sich behelfen wird.

---

[1]) Ich sage ausdrücklich nicht: im Sinne des Du Bois Reymond'schen „Idealisten." Denn dieser betrachtet die Existenz des Grenzwerthes als eine beweisbare Thatsache. Dass dieser Beweis misslingt, ist selbstverständlich und wird auch von Du Bois Reymond hervorgehoben. Im übrigen wäre es wohl, um dieses negative Resultat zu erreichen, kaum nothwendig gewesen, jenem Idealisten, der keineswegs als abschreckendes Beispiel eines philosophirenden Schwätzers, sondern als ein durchaus ernst zu nehmender Mathematiker eingeführt wird (Allg. Funct.-Theorie, S. 12 und 152), vollkommene Absurditäten, wie die folgende, in den Mund zu legen: *„Die Anzahl sämmtlicher Zahlen ist unendlich. Die Anzahlen werden gemessen durch die ganzen Zahlen: also (!) giebt es unendlich viele ganze Zahlen"* (a. a. O. S. 77). Dagegen *„giebt es der rationalen Zahlen eine unbegrenzt grosse und keine unendliche Menge"* (S. 79).

[2]) vgl. z. B. Illigens, Zur Definition der Irrationalzahlen. Math. Ann. Bd. 35, S. 454. Der Standpunkt des Herrn Illigens bezüglich der Einführung der Irrationalzahlen deckt sich im übrigen genau mit dem oben charakterisirten des „Empiristen," und Herr Illigens befindet sich in einem principiellen Irrthume, wenn er meint, seine Definitionsweise der Irrationalzahlen sei eine rein arithmetische. Rein arithmetische Quantitäten sind eine leere Redensart, und auch die blosse „Fiction" irrationaler Quantitäten ist untrennbar mit der Vorstellung einer stetigen „lineären" Grösse verknüpft.

[3]) Ich verstehe unter allgemeiner Arithmetik die Zahlen-

Digitized by Google

Die Begriffe „grösser" und „kleiner" drücken bei der Uebertragung auf negative Zahlen nicht mehr Quantitäts-Unterschiede, sondern lediglich eine bestimmte Succession

---

lehre im weitesten Sinne, insbesondere also auch die Algebra und Analysis (Functionen-Theorie), keineswegs also jenen speciellen Begriff, den Kronecker (Journal für Math. Bd. 100, S. 491) damit verbindet (nämlich: „die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs") und den er bei anderer Gelegenheit als eigentliche Arithmetik bezeichnet (Journal f. Math. Bd. 101, S. 345). Wenn also Kronecker an der zuzuletzt erwähnten Stelle die Bemerkung macht, man könne aus der eigentlichen Arithmetik „alle ihr fremden Begriffe, den der negativen, der gebrochenen und der algebraischen Zahlen ausscheiden," so wird die im Texte gemachte Aussage hierdurch zunächst in keiner Weise getroffen. Im übrigen besteht doch diese angebliche „Ausscheidung" der negativen und der gebrochenen Zahlen lediglich in einer ebenso scharfsinnigen, wie unbequemen Umschreibung der betreffenden Zahlbegriffe, durch welche deren Gebrauch, bezw. derjenige der entsprechenden Zahlzeichen auch für die eigentliche Arithmetik keineswegs entbehrlich wird. Und dass Kronecker selbst sie nicht entbehren konnte, zeigt auf's deutlichste die nun unmittelbar folgende „Ausscheidung" der algebraischen Zahlen (a. a. O. S. 347 ff.). Darnach besagt die „sogenannte" Existenz algebraischer Zahlen nichts anderes, als dass eine ganze ganzzahlige Function innerhalb gewisser, arithmetisch definirbarer, von zwei gebrochenen Rationalzahlen begrenzter Intervalle ihr Vorzeichen wechsele. Man versuche nur einmal, diesen Satz zunächst so zu formuliren und darauf auch so zu beweisen, dass die Begriffe der gebrochenen und der negativen Zahlen nach dem Kronecker'schen Verfahren vollständig „ausgeschieden" werden! Wenn nun aber Kronecker in diesem Aufsatze „Ueber den Zahlbegriff" sogar so weit geht, es für möglich und einzig erstrebenswerth zu halten, dass auch die Arithmetik im weitesten Sinne alle „Modificationen und Erweiterungen des Zahlbegriffes (ausser demjenigen der natürlichen Zahl) wieder abstreife" (a. a. O. S. 339), und wenn er darin die wahre „Arithmetisirung" der betreffenden Disciplinen erblickt, so fehlt mir hierfür jedes Verständniss.

Nach meinem Dafürhalten besteht doch gerade das Wesen der arithmetischen Disciplinen darin, dass sie es ermöglichen, ganze Gedankenreihen, selbst solche von äusserst verwickelter Natur, durch eine verhältnissmässig geringe Anzahl bestimmter Begriffs-

Digitized by Google

in der geordneten Zahlenreihe aus. Die Multiplication negativer Zahlen kann garnicht anders als rein formal[1]) auf Grund des Princips der Permanenz formaler Gesetze erklärt

---

zeichen darzustellen. Eine Beseitigung der als Frucht der Geistesarbeit von Generationen mühsam erworbenen und erprobten Begriffe und Zeichen würde nach meiner Ansicht nicht einer „Arithmetisirung," sondern einer völligen Vernichtung jener Disciplinen gleichkommen. Nicht darin, dass man die negativen, gebrochenen und irrationalen Zahlen wieder „abstreift," sondern dass man aus ihren Definitionen alle fremdartigen, insbesondere geometrischen Vorstellungen ausscheidet, scheint mir das wünschenswerthe Maass von „Arithmetisirung" zu liegen. Und dieses Ziel dürfte insbesondere durch die Bemühungen von Weierstrass, Cantor und Dedekind vollständig erreicht worden sein.

[1]) Auf der anderen Seite entbehrt die von Du Bois Reymond zur Bekämpfung der formalen Auffassungsweise des Zahlbegriffes vorgebrachte Behauptung (a. a. O. S. 51):

> *„Wie sehr der Formalismus bei den elementarsten arithmetischen Operationen uns im Stiche lässt, zeigt u. A. das Beispiel der Bruchmultiplikation"*

jeder Spur von Berechtigung. Aus den definirenden Gleichungen:

$$b \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = a, \quad b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = a'$$

folgt nämlich zunächst:

$$\left\{b \cdot \left(\frac{a}{b}\right)\right\} \cdot \left\{b' \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a',$$

und daher, wenn der commutative und associative Charakter des Productes erhalten bleiben soll:

$$b\,b' \cdot \left\{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right)\right\} = a\,a'.$$

Da andererseits die Definitions-Gleichung besteht:

$$b\,b' \cdot \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right) = a\,a',$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = \left(\frac{a\,a'}{b\,b'}\right).$$

Die obige Behauptung Du Bois Reymond's erscheint mir hiernach einfach unverständlich.

Digitized by Google

werden, u. s. f. Kurzum: die negativen Zahlen sind rein formale Zahlen, sie sind blosse Zeichen, welche zu den Zeichen der positiven Zahlen und unter einander in bestimmt definirten Beziehungen stehen.

Nun pflegen doch in arithmetischen Formeln positive und negative Zahlen als völlig gleichberechtigt neben einander aufzutreten; ja ein und dasselbe Zeichen kann zumeist ganz nach Belieben eine positive oder negative Zahl vorstellen. Wie man in einer solchen arithmetischen Formel noch eigentliche Quantitätszeichen und blosse Formalzahlen auseinanderhalten will, scheint mir völlig unerfindlich. Und, was Du Bois Reymond lediglich als eine Art Gewöhnung hinstellt (a. a. O. S. 50) nämlich:

> *„dass, wenn wir in eine numerische Ausrechnung oder in eine algebraische Untersuchung vertieft sind, es uns nicht einfällt, unter unseren Zahlen oder Buchstaben, welche unbestimmt gelassene Zahlen bedeuten, wirkliche Grössen beständig uns vorzustellen“* —

das ist in Wahrheit eine absolute und zwingende Nothwendigkeit. Soll also eine solche arithmetische Formel etwas besseres vorstellen, als die graphische Fixirung einer heillosen Begriffsverwirrung, so ist man schon in dem aller-elementarsten Stadium der Arithmetik (nämlich bei und nach der Einführung der ganzen negativen Zahlen) gezwungen, die Auffassung der Zahlen als Quantitätszeichen vollständig fallen zu lassen. In wieweit man bei der Einführung der positiven Zahlen (auch der gebrochenen und irrationalen) aus historischen und didaktischen Rücksichten den Quantitäts-Begriff zu Grunde legen will, ist schliesslich Geschmacks- und Ansichtssache. Eine einheitliche Auffassung der arithmetischen Operationen und ein consequenter Aufbau der allgemeinen Arithmetik ist aber auf diesem Wege nimmer zu erzielen.

Will man hierzu gelangen, so dürfte es am einfachsten erscheinen, schon die positiven ganzen Zahlen nicht als Quantitätszeichen zu definiren, sondern, nach dem Vorgange

Digitized by Google

von Helmholtz[1]) und Kronecker[2]) an den Begriff der Ordnungszahlen anknüpfend, als Zeichen, denen lediglich eine bestimmte Succession zukommt. Diese mit einem bestimmten Zeichen beginnende und unbegrenzt fortsetzbare Zeichen-Folge lässt sich dann auf Grund der für sie definirbaren Rechnungs-Operationen durch Einführung der Null, der negativen, gebrochenen und irrationalen[3]) Zahlen zu einem Zeichen-System ausgestalten, welches im Cantor'schen Sinne eine zweifach unbegrenzte, lineare, stetige Mannigfaltigkeit bildet. Es bietet alsdann keinerlei Schwierigkeit, a posteriori festzustellen, in wieweit die Individuen dieses Zeichen-Systems geeignet sind bestimmte Quantitäten (z. B. Anzahlen discreter Vielheiten, Längen) oder andere Objecte (z. B. Punkte, Strecken der Länge und Richtung nach) vorzustellen, und in welcher Weise die zwischen ihnen möglichen Beziehungen dazu dienen können, die Beziehungen solcher Objecte abzubilden.

Da Du Bois Reymond diese von ihm etwas geringschätzig als „literaler Formalismus" bezeichnete Auffassung der Arithmetik principiell verwirft und ihr nur allenfalls für praktische Lehrzwecke eine gewisse Berechtigung zuerkennen will,[4]) so scheint er garnicht bemerkt zu haben, dass sein ganzer Infinitär-Calcül durchaus auf einem solchen literalen Formalismus beruht, mit anderen Worten, dass dabei garnicht Quantitäts-Vergleichungen, sondern, wie in Art. 1 des näheren erörtert wurde, lediglich — bis zu einem gewissen Grade willkürlich definirte — Successionen in Frage kommen. Und er findet auf Grund seiner „einge-

---

[1]) „Zählen und Messen, erkenntnisstheoretisch betrachtet." Ges. Abh. Bd. III, S. 360.

[2]) In dem schon oben citirten Aufsatze: „Ueber den Zahlbegriff." A. a. O. S. 339.

[3]) Am einfachsten wohl nach Cantor (s. Heine, die Elemente der Functionenlehre. Journ. f. Math. Bd. 74, S. 174 ff. Cantor, Math. Ann. Bd. 5, S. 123 ff. Bd. 21, S. 567 ff.).

[4]) a. a. O. S. 55.

Digitized by Google

wurzelten Grössenvorstellungen" da „Paradoxen", wo in Wahrheit nur eine unzulässige Anwendung von Quantitäts-Vortellungen vorliegt.

4.

Ich möchte bei dieser Gelegenheit noch einen anderen Punkt besprechen, welcher gleichfalls geeignet ist, die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen in Evidenz zu setzen. Auf S. 165 seiner Allgemeinen Functionentheorie heisst es im Hinblick auf das sogenannte „allgemeine Convergenz- und Divergenz-Princip":[1] *„So wenig Beachtung war ihm geschenkt worden, dass ich 1871 einen besonderen Fall des Princips (dass eine Reihe $u_1 + u_2 +$ etc. convergirt, wenn der Cauchy'sche Ausschnitt $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ bei in's Unbegrenzte zunehmenden m und n stets die Grenze Null hat) für eines Beweises bedürftig erklären musste."*[2]

Hierzu will ich zunächst historisch bemerken, dass die fragliche Cauchy'sche Formulirung der Convergenz-Bedingung sich in den Exercices de Mathématiques, T. II, p. 221 vorfindet, und auch anderen Reihen-Theoretikern bereits Anlass zu kritischen Erörterungen gegeben hat. Sie lautet, wenn $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = s_n$ gesetzt wird, in der Originalfassung: „Pour que la série soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que la différence

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+m-1}$$

devienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m."[3] Dabei ist der auf die Zahl m bezügliche Zusatz so zu verstehen, dass

---

[1]) Darunter versteht Du Bois Reymond das bekannte Kriterium für die Existenz bezw. Nicht-Existenz eines bestimmten Grenzwerthes; cf. Allg. Funct.-Th. S. 6.

[2]) Dabei wird auf S. 2 des Antrittsprogramms: „Neue Lehrsätze über die Summen unendlicher Reihen" (Freiburg 1871) verwiesen.

[3]) Aehnlich übrigens bei Abel: Crelle's Journal, Bd. 1, S. 313. (1826).

Digitized by Google

m sowohl eine bestimmte, d. h. bei wachsendem n constante, beliebig gross anzunehmende Zahl vorstellen oder auch gleichzeitig mit n und zwar in ganz beliebiger Weise in's Unendliche wachsend gedacht werden kann.[1]) Dies geht freilich aus der von Cauchy gewählten Fassung allein nicht mit genügender Deutlichkeit hervor. Es folgt aber mit absoluter Sicherheit aus der Art und Weise, wie Cauchy auf den unmittelbar folgenden Seiten der betreffenden Abhandlung „Sur la convergence des séries" jene Convergenz-Bedingung anwendet. So erschliesst er aus derselben die Divergenz von $\sum \frac{1}{n}$, weil hier der fragliche $\lim\limits_{n=\infty} (s_{n+m} - s_n)$ zwar für jedes noch so grosse endliche m verschwindet, dagegen unendlich gross wird, wenn m so unendlich wird, wie n oder ein endliches Multiplum von n (a. a. O. S. 225). Und er folgert ferner die Divergenz von $\sum \frac{1}{n \lg n}$ daraus, dass jener Grenzwerth, der noch verschwindet, wenn m so wie n in's Unendliche wächst, unendlich ausfällt, wenn $m = n(n+1)$ oder $n(n+1)^2$ etc.[2])

Lediglich der Nicht-Beachtung dieser den eigentlichen Sinn der Cauchy'schen Convergenz-Bedingung unzweideutig fixirenden Ausführungen ist es zuzuschreiben, dass Catalan in seinem „Traité élémentaire des séries" (Paris 1860) dieselbe schlechthin für falsch erklärt.[3]) Dabei versteht er jene Bedingung zunächst in der Weise, dass m lediglich jede

[1]) Es genügt sogar, ausschliesslich solche Werthe m in's Auge zu fassen, welche gleichzeitig mit n in beliebiger Weise unendlich werden — vgl. den Schluss dieses Artikels.

[2]) Beiläufig bemerkt wird wohl das auf die Reihe $\sum \frac{1}{n \lg n}$ bezügliche Resultat gewöhnlich Abel zugeschrieben. Die betreffende Mittheilung Abel's: Note sur le mémoire de Mr. Olivier: „Remarques sur les séries infinies etc." (Crelle's Journal, Bd. 3, S. 74) ist aber um ein Jahr später erschienen (1828), als der citirte Band der Exercices.

[3]) a. a. O. S. 4, Fussnote.

Digitized by Google

noch so grosse bestimmte Zahl bedeuten soll, und fügt hinzu, dass sie selbst dann nicht richtig ist, wenn man auch unendlich grosse Werthe von m zulässt. Da er sich aber hierbei ausdrücklich auf das Beispiel der Reihe $\sum \frac{1}{n \lg n}$ beruft,[1]) so geht daraus mit vollster Sicherheit hervor, dass er jene Cauchy'sche Abhandlung garnicht gelesen haben kann und aus diesem Grunde den Sinn der obigen Bedingung missverstanden hat.

Laurent in seiner „Théorie des séries" (Paris 1862) erwähnt (S. 6), dass Catalan jene Bedingung für unzureichend erklärt habe, und fährt dann fort: „Sans oser partager son opinion, je laisserai de côté ce théorème, qui n'est nullement indispensable dans la théorie des séries." Im übrigen steht er, wie einige weitere theils nichtssagende, theils geradezu falsche Bemerkungen beweisen, dieser Frage doch völlig rathlos gegenüber und findet sich damit schliesslich sehr einfach in der Weise ab, dass er sagt: „Marchons droit à notre but et tournons l'obstacle, qu'il serait trop difficile de renverser."

Wie weiter unten gezeigt werden soll, steht die Richtigkeit der Cauchy'schen Bedingung, wenn man nur ihren Inhalt von vornherein richtig auffasst, ausser Zweifel. Du Bois Reymond giebt derselben in dem oben citirten „Antrittsprogramm" (S. 1) die folgende Form:

> *U ist endlich und bestimmt oder U ist es nicht, jenachdem die Summe*
>
> $$u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$$
>
> *Null zur Grenze hat oder nicht, wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden.* (Dabei ist: $U = \lim\limits_{n=\infty} U_n$ und: $U_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$).

Nachdem dann kurz erwähnt ist, dass der auf die Diver-

---

[1]) a. a. O. S. 6.

Digitized by Google

genz von $\sum u_\nu$ bezügliche Theil dieser Aussage leicht erwiesen werden kann, heisst es weiter:

„*Nicht so leicht ist zu beweisen, dass, wenn* $u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n$ *für* $m = \infty$, $n = \infty$ *stets verschwindet, U nicht auch unbestimmt oder unendlich werden könne. Wiewohl man das vorstehende Princip öfters anwendet, ist mir ein strenger Beweis dafür nicht bekannt, und ich werde es hier voraussetzen, diesen Beweis aber, der mir ohne den Begriff des bestimmten Integrals nicht scheint geführt werden zu können, an einer anderen Stelle nachtragen.*“

Dabei wird auf eine „demnächst zu veröffentlichende“ Schrift: Die Theorie der Convergenz und Divergenz bestimmter Integrale und unendlicher Reihen — hingewiesen.

Diese Schrift, welche Du Bois Reymond auch noch an einer anderen Stelle[1]) als demnächst bei B. G. Teubner erscheinend citirt, ist meines Wissens niemals erschienen: aus welchen Gründen, ist mir unbekannt. Aber auch anderwärts scheint der in Rede stehende Beweis nicht publicirt worden zu sein. Immerhin wäre ja in dieser Beziehung ein Irrthum von meiner Seite nicht ausgeschlossen, und ich bin sogar sehr geneigt, an einen solchen zu glauben, da kaum anzunehmen ist, dass ein Mathematiker, der einen für unbewiesen erkannten und für nicht leicht beweisbar erklärten Satz benützt und den Beweis dafür in Aussicht stellt, ganze 11 Jahre später sich ausdrücklich dieser That rühmen sollte, ohne den versprochenen Beweis nachgeliefert zu haben.

Im übrigen genügt die oben citirte, auf die Form dieses Beweises bezügliche Andeutung vollständig, um zu erkennen, dass Du Bois Reymond den eigentlichen Kern der vorliegenden Frage völlig missverstanden hat. Gewiss kann es in manchen Fällen bequemer erscheinen, Eigenschaften unendlicher Reihen als specielle Fälle von Integral-Eigenschaften abzuleiten; ja bei Reihen-Sätzen complicirter Natur kann

[1]) Annal. di Mat. S. II, T. IV, p. 338, Fussnote.

Digitized by Google

dieser Weg möglicherweise als der einzig brauchbare gelten, da die Einführung des Continuitäts- und Infinitesimalbegriffes die Anwendung eines übersichtlichen und wunderbar wirksamen Algorithmus gestattet, für welchen bei der Beschränkung auf discontinuirliche Mannigfaltigkeiten kein Ersatz vorhanden ist. Hier aber handelt es sich lediglich um die principielle Begründung eines einfachen, auf die Existenz des Grenzwerthes einer abzählbaren Menge bezüglichen Fundamental-Satzes. Und wenn jemand behauptet, dieser Satz lasse sich nur durch Anwendung des bestimmten Integrals begründen, so begeht er damit einen schweren logischen Fehler[1]) und zeigt nach meiner Ansicht unwiderleglich, dass er von vornherein mit falschen Grenz-Vorstellungen arbeitet. Um diese meine Ansicht vollends zu rechtfertigen, wird es schliesslich nur noch nöthig erscheinen, den sehr einfachen Beweis des fraglichen Satzes hier wirklich folgen zu lassen.

Bevor ich hierzu übergehe, erscheint es mir zweckmässig, zunächst den Unterschied zwischen der Cauchy'schen Formulirung der Convergenz-Bedingung und der sonst üblichen deutlich hervorzuheben. Diese letztere lautet mit Benützung der oben von Du Bois Reymond angewendeten Bezeichnungen folgendermaassen:

---

[1]) Denselben logischen Fehler begeht übrigens Du Bois Reymond an einer auf die besprochene unmittelbar folgenden Stelle (a. a. O. S. 2, Satz 3); auch: Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen, S. 58, Fussnote), indem er die Beziehung:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$
$$= v_1 (u_1 + u_2 + \ldots + u_r + \vartheta u_{r+1}) + v_n ((1-\vartheta) u_{r+1} + u_{r+2} + \ldots +_n)$$

als eine Folge „seines" Integral-Mittelwerthsatzes hinstellt. Dieselbe ist vielmehr eine ganz direkte Consequenz des bekannten Abel'schen Lemma's (Journ. f. Math. Bd. 1, S. 314) und steht zu dessen gewöhnlicher Form genau in demselben Verhältniss, wie die Du Bois Reymond'sche Form des Mittelwerthsatzes zu der von Bonnet aufgefundenen Fundamentalform, welche keineswegs, wie Du Bois Reymond prätendirt, lediglich einen besonderen Fall „seines" Mittelwerthsatzes darstellt (Zur Gesch. d. trig. R. S. 58).

Digitized by Google

Für die Convergenz der Reihe $\sum u_\nu$ ist nothwendig und hinreichend, dass:

$$(1) \qquad |U_{m_0+\varrho} - U_{m_0}| < \varepsilon \quad \text{für:} \quad \varrho = 0, 1, 2, \ldots$$

d. h. jeder (beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ muss sich eine ganze Zahl m_0 so zuordnen lassen, dass Ungl. (1) für jeden ganzzahligen Werth von ϱ besteht.

Die Richtigkeit dieser Aussage bedarf keines Beweises, dieselbe deckt sich in Wahrheit vollständig mit der Definition der Convergenz, d. h. der Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$. Denn die Ungleichung (1) enthält geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz im Cantor'schen Sinne, die nothwendige und hinreichende Bedingung derselben (das „allgemeine Convergenz-Princip") im Du Bois Reymond'schen Sinne.

Bedeuten dann m, n zwei beliebige ganze Zahlen $\geqq m_0$, so hat man nach (1):

$$|U_m - U_{m_0}| < \varepsilon, \quad |U_n - U_{m_0}| < \varepsilon$$

und daher:

$$(2) \qquad |U_n - U_m| < 2\varepsilon \quad \text{für:} \begin{cases} m \geqq m_0 \\ n \geqq m_0 \end{cases}.$$

Alsdann wird aber allemal:

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} |U_n - U_m| = 0,$$

ohne dass über die Art des Grenzüberganges von m und n irgendwelche besondere Fortsetzung getroffen zu werden braucht.

Also: Aus der üblichen Form (1) der Convergenz-Bedingung lässt sich stets die Existenz der Cauchy'schen Bedingung herleiten.

Aber auch das Umgekehrte kann ebenso einfach gezeigt werden. Angenommen nämlich es bestehe die Cauchy'sche Bedingung (3) in dem von Du Bois Reymond festgesetzten Sinne d. h. mit der Einschränkung $n \geqq m$, oder, um mich ganz

Digitized by Google

genau der Du Bois Reymond'schen Bezeichnungsweise anzuschliessen, es bestehe die Beziehung:

$$(4) \qquad \lim_{m=\infty,\, n=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_n) = 0,$$

wenn m und n mit irgend welcher relativen Geschwindigkeit unendlich werden, so setze man $n = m + p$, wo $p \geqq 0$ wegen $n \geqq m$. Alsdann folgt aus (4), dass:

$$(5) \qquad \lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0,$$

gleichgültig ob p als constant oder gleichzeitig mit m in's Unendliche wachsend angenommen wird. Die Bedingung (5) zerfällt also in Wahrheit in die folgenden zwei Bedingungen:

$$(5a) \qquad \lim_{m=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0$$

für jedes einzelne $p = 0, 1, 2, \ldots,$ und:

$$(5b) \qquad \lim_{m=\infty,\, p=\infty} (u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}) = 0.$$

Die Bedingung (5a) würde selbstverständlich für die Convergenz von $\sum u_\nu$ nicht genügen (sie ist nämlich allemal schon erfüllt, wenn nur $\lim\limits_{m=\infty} u_m = 0$).

Dagegen lässt sich zeigen, dass die Convergenz der Reihe schon aus der Bedingung (5b) allein folgt. Mit anderen Worten: Die Cauchy'sche Bedingung ist für die Convergenz der Reihe nicht nur hinreichend, sondern sie lässt sich sogar von vornherein noch durch eine formal etwas weniger verlangende ersetzen.[1])

---

[1]) Gerade um dies deutlich zu machen, habe ich den vorliegenden etwas umständlicheren Weg eingeschlagen. Andernfalls könnte man auf Grund der Definition des Grenzwerthes einer zweifach-unendlichen Zahlenfolge (s. z. B. meinen Aufsatz über Unendliche Doppelreihen, Sitz.-B. S. 103) aus Ungl. (3) ohne weiteres schliessen, dass:

$$|U_n - U_m| < \varepsilon$$

Digitized by Google

Die Gl. (5b) besagt nämlich: Jeder Zahl $\varepsilon > 0$ lassen sich zwei ganze Zahlen m_0, p_0 so zuordnen, dass:

$$|u_m + u_{m+1} + \ldots + u_{m+p}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } m > m_0,\ p > p_0.$$

Alsdann wird aber:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für: } \varrho = 0, 1, 2, \ldots,$$

also speciell:

$$|u_{m_0} + u_{m_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und daher durch Substraction:

$$|u_{m_0+p_0+1} + \ldots + u_{m_0+p_0+\varrho}| < \varepsilon \text{ für: } \varrho = 1, 2, 3, \ldots$$

oder, wenn man noch $m_0 + p_0 = n_0$ setzt:

(6) $|u_{n_0+1} + \ldots + u_{n_0+\varrho}| = |U_{n_0+\varrho} - U_{n_0}| < \varepsilon$ für: $\varrho = 1, 2, 3, \ldots,$

womit nach Ungl. (1) die Convergenz der betreffenden Reihe erwiesen ist.

---

etwa für $m \geqq m'$, $n \geqq n'$, und daher wenn m_0 die grössere der beiden Zahlen m', n' bedeutet:

$$|U_n - U_{m_0}| < \varepsilon \text{ für: } n \geqq m_0,$$

eine Ungleichung, deren Inhalt genau mit demjenigen der Convergenz-Bedingung (1) übereinstimmt.

Digitized by Google

Sitzung vom 2. Juni 1897.

1. Herr Wilhelm Königs erstattete einen Bericht: „Ueber Oxydations-Produkte der China-Alkaloide.“ Derselbe soll anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Walther Dyck spricht: „Ueber Rechenmaschinen, insbesondere über eine neue, von den Herren O. Steiger und H. Egli in Zürich construirte Maschine.“

Digitized by Google

Sitzung vom 3. Juli 1897.

1. Herr L. Sohncke legt zunächst den Jahresbericht des Münchener Vereins für Luftschifffahrt für das Jahr 1896 vor, dessen Ballon „Akademie“ mit Unterstützung der k. Akademie gebaut wurde. Sodann macht er eine Mittheilung: „Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur.“

2. Herr E. v. Lommel legt der Classe eine Abhandlung: „Theorie der Dämmerungsfarben“ vor. Dieselbe ist für die Denkschriften bestimmt.

3. Herr Alfred Pringsheim spricht: „Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend.“

4. Herr Ferd. Lindemann legt eine Mittheilung des Herrn S. Kantor: „Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^{λ}-Schaaren bilinearer Formen“ vor.

5. Herr Gustav Bauer trägt vor: „Ueber zwei Tetraëder, welche einander zugleich um- und eingeschrieben sind.“

Digitized by Google

Ueber die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur.

Von **L. Sohncke.**

(*Eingelaufen 8. Juli.*)

Diejenige Wärmemenge, welche der Masseneinheit einer Substanz zuzuführen ist, um ihre Temperatur um 1° zu steigern, ist für viele Substanzen zwar nahezu, für keine aber in aller Strenge konstant, sondern sie wächst fast allgemein mit der Temperatur. So ist z. B. nach H. E. Wiedemann die specifische Wärme C_p einiger Gase bei konstantem Druck durch folgende Formeln als Funktion der Temperatur t darstellbar:

Ammoniak	$C_p = 0{,}5009 + 0{,}000310 \cdot t = 0{,}5009 \cdot (1 + 0{,}00062 \cdot t)$
Stickoxydul	$0{,}1983 + 0{,}000230 \cdot t = 0{,}1983 \cdot (1 + 0{,}00116 \cdot t)$
Aethylen	$0{,}3364 + 0{,}000825 \cdot t = 0{,}3364 \cdot (1 + 0{,}00245 \cdot t)$

Nach demselben Beobachter liegt der Temperaturkoëfficient für die Zunahme der specif. Wärme bei verschiedenen Dämpfen zwischen 0,001 und 0,0045.[1]) Die von Hirn beobachtete Zunahme der spec. Wärme einiger Flüssigkeiten lässt sich zwar allgemein nicht durch eine zweigliedrige Formel darstellen. Bildet man aber, des einfacheren Vergleichs wegen, für das Intervall von 0 bis 100° doch eine solche, so erhält man Temperaturkoëfficienten zwischen 0,001 und 0,003, nur der des

[1]) Wenn Herr Linde für Luft von hohem Druck und niedriger Temperatur eine Abnahme der spec. Wärme mit zunehmender Temperatur konstatirt, so hängt das wohl damit zusammen, dass solche Luft nicht mehr sehr fern von der Verflüssigung ist.

Digitized by Google

Alkohol ist 0,0086. Bei festen Körpern endlich ist mit geringen Ausnahmen (z. B. Kohlenstoff) der Temperaturkoëfficient nur von demselben Betrage oder kleiner als bei den anderen Aggregatzuständen. Denn nach Bède ist z. B.

für Zink $C_p = 0{,}0865 + 0{,}000088 \cdot t = 0{,}0865 \cdot (1 + 0{,}00102 \cdot t)$

„ Eisen $0{,}1053 + 0{,}000142 \cdot t = 0{,}1053 \cdot (1 + 0{,}00135 \cdot t)$

„ Zinn $0{,}0500 + 0{,}000088 \cdot t = 0{,}0500 \cdot (1 + 0{,}00176 \cdot t)$

Von der zugeführten Wärme dient bekanntlich nur ein Theil zur unmittelbaren Temperatursteigerung, d. h. zur Erhöhung der molekularen Fortschritts- resp. Schwingungsenergie, während ein anderer Theil zur Leistung äusserer und innerer Arbeit verbraucht wird. Bei festen Körpern ist nun, wegen ihrer sehr geringen thermischen Ausdehnung, die äussere Arbeit ganz unerheblich, und auch bei Flüssigkeiten ist sie noch sehr klein. Bei den Gasen ist sie freilich erheblich, aber sie ist, wegen der sehr angenäherten Geltung des Gay-Lussacschen Ausdehnungsgesetzes, für dasselbe Gas von merklich gleicher Grösse bei verschiedenen Temperaturen.

Also kann die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur im Wesentlichen nur daher rühren, dass die gelegentlich der Temperaturerhöhung um 1° zu leistende innere oder Disgregations-Arbeit nicht für alle Temperaturen denselben Werth hat, sich vielmehr im Allgemeinen steigert mit der Temperatur.

Die innere Arbeit besteht selbst wieder aus zwei Theilen: nämlich aus derjenigen Arbeit, welche bei der Ausdehnung gegen die gegenseitigen Anziehungen der Molekeln zu leisten ist (ich nenne sie äussere Disgregationsarbeit), und aus der Arbeit, welche zur Auflockerung der einzelnen Molekeln und zur Vermehrung der Atombewegungen innerhalb der Molekeln verbraucht wird (sie möge innere Disgregationsarbeit heissen).

Bei idealen Gasen ist die erstere Disgregationsarbeit gleich Null, und auch bei den wirklichen Gasen ist sie unter den gewöhnlichen Bedingungen äusserst unerheblich, wie der be-

Digitized by Google

kannte Thomson-Joule'sche Versuch lehrt. Also kann die Zunahme der specifischen Wärme mit der Temperatur bei den Gasen im Wesentlichen nur daher rühren, dass die Vermehrung der inneren Energie der einzelnen Molekeln bei höherer Temperatur einen grösseren Arbeitsaufwand beansprucht, oder dass die innere Disgregationsarbeit mit der Temperatur wächst, ein Schluss, den z. B. auch Hr. O. E. Meyer in seiner kinetischen Gastheorie II. Aufl. 1895 p. 134/135 bereits gezogen hat, und der auf Grund einfacher Vorstellungen über das Wesen der Molekularkräfte leicht verständlich wird, worauf aber hier nicht eingegangen werden soll.

Bedenkt man nun, dass die Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur für die anderen Aggregatzustände von derselben Grössenordnung ist wie für die Gase, (der Temperaturkoëfficient für die Zunahme ist ja, wie ein Blick auf die obigen Zahlen lehrt, für Gase 0,001 bis 0,0025, für feste Körper durchschnittlich 0,001 bis 0,002, für Flüssigkeiten durchschnittlich 0,001 bis 0,003), so wird es in hohem Grade wahrscheinlich, **dass,** wenigstens in hinreichender Ferne von einer Aggregatzustandsänderung, **die Aenderung der specif. Wärme mit der Temperatur überhaupt für alle Körper vornehmlich durch den Arbeitsaufwand zur Vermehrung der inneren Energie der Molekeln bedingt ist.**

Aus diesem Satze lässt sich eine einfache Folgerung ziehen und durch Beobachtungen prüfen. Wenn nämlich die Molekeln eines Körpers einatomig sind, so kann ihre innere Energie nicht vermehrt werden, d. h. die innere Disgregationsarbeit muss für sie = 0 sein (abgesehen höchstens von einem etwaigen geringen Betrage zur Erhöhung der Rotationsenergie). Nun ist bekanntlich die Molekel des Quecksilberdampfes einatomig. Macht man jetzt die Voraussetzung, dass das flüssige Quecksilber ebenfalls aus einatomigen Molekeln bestehe, so darf die specifische Wärme des Quecksilbers mit steigender Temperatur nicht zunehmen. Und das ist es, was thatsächlich Herr Winkelmann schon 1876 beobachtet hat, und was seither noch durch zwei andere Beobachtungsreihen von H. Naccari

Digitized by Google

(1888) und von H. Milthaler 1889 bestätigt worden ist. (Vgl. z. B. Landolt-Börnsteins physik.-chem. Tabellen, 2. Aufl. 1894, p. 321.) Die spec. Wärme des Quecksilbees C_t erfährt sogar eine geringe Abnahme mit steigender Temperatur t, sie lässt sich nach H. Winkelmann durch die Formel darstellen:

$$C_t = 0{,}03336 - 0{,}0000069 \cdot t$$

Ferner ist der Cadmiumdampf einatomig. Macht man wieder die Voraussetzung, dass auch das feste Cadmium aus einatomigen Molekeln bestehe, so darf auch seine spec. Wärme mit steigender Temperatur nicht zunehmen. Und wirklich fand Herr L. Schütz (Wiedemanns Annal. 46. p. 184/185 1892), dass die spec. Wärme des Cadmiums zwischen -78^0 und $+20^0$ grösser war als zwischen $+20^0$ und $+100^0$. Indessen darf nicht verschwiegen werden, dass H. Naccari (Atti della R. Acc. di Torino 23, 1887) für die wahre spec. Wärme des Cadmiums ein solch aussergewöhnliches Verhalten nicht fand, sondern sie für das Intervall von Zimmertemperatur bis 320^0 durch die Formel darstellt $0{,}05461 + 433{,}4.10^{-6} \cdot t$. Dieser Widerspruch fordert also zu neuen Beobachtungen auf. Endlich sei noch erwähnt, dass H. Schütz (l. c.) auch für Antimon ein entsprechendes Verhalten wie für Cadmium nachgewiesen hat, und dass schon 1886 die HH. Pebal und Jahn die spec. Wärme des Antimons von -76^0 bis 0^0 abnehmend und erst bei weiterer Temperatur zunehmend fanden. (Wiedemanns Annalen 27, 1886 p. 596.) Für dies Verhalten des Antimons steht die Erklärung noch aus.

Hiermit ist die Zahl der chemisch einfachen Körper erschöpft, deren specifische Wärme man als sinkend mit steigender Temperatur kennt oder vermuthet.

Während die obigen Ueberlegungen es ohne Weiteres begreiflich machen, dass bei Körpern mit einatomigen Molekeln eine Zunahme der spec. Wärme mit steigender Temperatur nicht stattfindet, so bleibt noch zu erklären, warum im Gegentheil eine Abnahme eintritt. Auch hiervon kann man sich im Allgemeinen Rechenschaft geben. Die gelegentlich der Tem-

Digitized by Google

peraturerhöhung um 1° zu leistende innere Arbeit besteht im vorliegenden Falle lediglich in der Ueberwindung der gegenseitigen Anziehungen der Molekeln (resp. in der Vermehrung der potentiellen Energie der Molekeln bei ihren vergrösserten Schwingungsbewegungen, vgl. Richarz Ueb. d. Ges. v. Dulong u. Petit Wiedemanns Annalen 48. 1893. p. 709/10), welcher Antheil vorher als äussere Disgregationsarbeit bezeichnet wurde. Nun sind bei höherer Temperatur, wegen der eingetretenenen Volumvergrösserung, die Molekelschwerpunkte weiter auseinander gerückt als zuvor (oder anders ausgedrückt: es befinden sich weniger Molekeln innerhalb der Wirkungssphäre der einzelnen). In Folge dessen wirken die Molekeln mit geringeren Kräften aufeinander. Daher ist jetzt diese Disgregationsarbeit geringer als zuvor. Dieselbe Ursache ist offenbar bedingend für die Abnahme des Widerstandes gegen Formänderung (oder des Starrheitsmodulus) sowie des Youngschen Elasticitätsmodulus mit wachsender Temperatur; endlich auch für die Zunahme des thermischen Ausdehnungskoëfficienten der festen Körper mit der Temperatur.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, dass bereits H. Heilborn (Zeitschr. f. physikal. Chemie. 1891. 7. p. 85) für das Quecksilber die Abnahme der spec. Wärme mit steigender Temperatur aus allgemeinen theoretischen Betrachtungen in Verbindung mit einer von Bosscha gegebenen Formel für die Ausdehnung des Quecksilbers abgeleitet hat. Doch sind seine Erwägungen mit den oben angestellten trotz gewisser Berührungspunkte nicht identisch.

Gegenwärtig sind es drei verschiedene physikalische Eigenschaften des Quecksilbers, welche sich auf die Einatomigkeit seiner Molekeln zurückführen lassen:

1. Der Zahlwerth des Verhältnisses C_p/C_v der beiden specifischen Wärmen des Quecksilberdampfes, der von Kundt und Warburg bekanntlich = 1,67, übereinstimmend mit der Theorie, ermittelt wurde.

Digitized by Google

2. Die Thatsache, dass C_v im Dampfzustand nur halb so gross ist als im festen, theoretisch abgeleitet von H. Boltzmann und von H. Richarz (a. a. O. p. 716).

3. Die Thatsache, dass C_p des flüssigen Quecksilbers mit steigender Temperatur abnimmt statt, wie bei fast allen anderen Substanzen, zu wachsen.

Es ist zu erwarten, dass die Untersuchung der Aenderung der specifischen Wärme mit der Temperatur noch weitere Aufschlüsse auch über die Natur mehratomiger Molekeln zu liefern vermag.

Digitized by Google

Ueber zwei Abel'sche Sätze, die Stetigkeit von Reihensummen betreffend.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 10. Juli.*)

In seiner berühmten Abhandlung über die binomische Reihe hat Abel zwei wesentlich verschiedene, auf die Stetigkeit einer Potenzreihe bezügliche Sätze abgeleitet.[1]) In dem ersten[2]) dieser Sätze wird die Stetigkeit der Summe $S(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ als Function von x erwiesen; bei dem zweiten[3]) treten an die Stelle der constanten Coefficienten a_ν stetige Functionen einer reellen Veränderlichen y, und es handelt sich um die Stetigkeit einer Reihensumme von der Form $S(x, y) = \sum_0^\infty {}_\nu\, f_\nu(y) \cdot x^\nu$ bei constantem x und veränderlichem y.

Zweck der folgenden Mittheilung ist es, zunächst an den ersten dieser Sätze einige historische Bemerkungen zu knüpfen und hierauf eine von Herrn Stolz herrührende Verallgemeinerung desselben etwas anders zu formuliren und elementarer zu beweisen. Sodann sollen die gegen den zweiten Satz erhobenen Einwendungen, welche in Wahrheit nicht die Gültigkeit des Satzes selbst, sondern nur diejenige des Abel'schen

---

[1]) Crelle's Journal, Bd. I, S. 314, 315. — Oeuvres compl., Éd. Sylow et Lie, T. I p. 223, 224.

[2]) a. a. O. Lehrsatz IV.

[3]) a. a. O. Lehrsatz V.

Digitized by Google

Beweises in Frage stellen, sowie die zu seiner Rettung vorgeschlagenen Modificationen besprochen und durch den Nachweis ergänzt werden, dass der fragliche Satz in der von Abel gegebenen Fassung wirklich unrichtig ist.

1.

Der erste der genannten Sätze sagt aus, dass die für irgend einen positiven Werth $x = X$ als convergent vorausgesetzte Reihe $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu x^\nu$ für jeden kleineren positiven Werth x gleichfalls convergirt, und dass sodann ihre Summe $S(x)$ für $x \leqq X$ eine stetige Function von x darstellt.

Was den von Abel gelieferten Beweis besonders auszeichnet, ist der Umstand, dass dabei keineswegs die absolute Convergenz der Reihe für $x = X$ vorausgesetzt, noch von der für $x < X$ sicher vorhandenen absoluten Convergenz Gebrauch gemacht wird. Der Kern des Beweises besteht vielmehr darin, dass — nach heutiger Ausdrucksweise — die gleichmässige Convergenz der Reihe für das Intervall $0 \leqq x \leqq X$ (also insbesondere mit Einschluss der Grenze X) dargethan wird, sofern nur $\sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu X^\nu$ überhaupt (d. h. eventuell auch nur bedingt) convergirt.

Es mag uns heutzutage, wo der Begriff der gleichmässigen Convergenz ein allgemein geläufiger Elementar-Begriff geworden ist, kaum erklärlich erscheinen, dass dieser von Abel schon im Jahre 1827 publicirte, äusserst einfache und völlig einwurfsfreie Beweis lange Zeit überhaupt nicht verstanden oder doch schwer verständlich befunden wurde, und dass noch im Jahre 1862 ein so scharfsinniger Mathematiker wie Lionville ausdrücklich erklärt hat:[1]) er finde den fraglichen Beweis „schwer auseinanderzusetzen und sogar schwer zu verstehen," weshalb er Dirichlet zur Abfassung

[1]) Journal des Math., 2ième Série, T. 7, p. 253.

Digitized by Google

eines anderen Beweises veranlasst habe. In Wahrheit ist aber dieser an der betreffenden Stelle mitgetheilte Dirichlet'sche Beweis nicht nur merklich complicirter als der Abel'sche, sondern auch viel weniger geeignet, die wahre Grundlage der Stetigkeit einer Potenzreihe deutlich hervortreten zu lassen. Und ich kann es mir lediglich aus einem förmlichen Aberglauben gegen den Abel'schen Beweis erklären, dass man an dessen Stelle auch in manchen neueren, schon dem Zeitalter der gleichmässigen Convergenz angehörigen Lehrbüchern[1]) den schwierigeren und weniger prägnanten Dirichlet'schen Beweis findet.

Will man sich ein Bild davon machen, welch' mangelhaftes Verständniss die Abel'sche Abhandlung über die Binominialreihe und insbesondere seine Stetigkeits-Sätze noch bis in die Mitte des Jahrhunderts gefunden haben, so lese man die zum Theil geradezu absurden Einwendungen, welche Björling in seinen „Doctrinae serierum infinitarum exercitationes"[2]) dagegen erhoben hat.[3]) Ohne auf dieselben im einzelnen einzugehen, möchte ich wenigstens einen Punkt hier hervorheben. Bekanntlich ist Abel zur Aufstellung seiner Stetigkeitssätze für die specielle Classe der Potenzreihen durch die Erkenntniss veranlasst worden, dass der von Cauchy (Anal. algébr. p. 131) ausgesprochene allgemeine Stetigkeits-Satz nicht haltbar sei, wie das Beispiel der Reihe $\sum_1^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu x$ beweise.[4]) Dem gegenüber erhält Björling den Cauchy'schen Stetigkeits-Satz vollkommen aufrecht,[5]) und glaubt Ausnahmefälle, wie den eben genannten, durch Aufstellung des folgenden Principes erledigen zu können:

---

[1]) z. B. Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2ième éd. 1875, p. 86.. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Functionen, 1880. S. 48.

[2]) Nova Acta Upsal. T. XIII (1847).

[3]) a. a. O. S. 62. 66. 156.

[4]) s. Fussnote zu Lehrsatz V. a. a. O. S. 316 bezw. 224.

[5]) a. a. O. S. 63.

Digitized by Google

Wenn eine Reihe $\sum f_\nu(x)$ auch für einen gewissen Werth X und für jeden einzelnen Werth $x < X$ convergirt, so folge daraus noch keineswegs, dass sie auch in unendlicher Nähe der Stelle X convergiren müsse (!). Gerade aus der Unstetigkeit der oben genannten Reihe für $x = 0$ gehe aber unzweideutig hervor, dass dieselbe in unendlicher Nähe von $x = 0$ nicht mehr convergire, da für eine in irgend einem Intervalle wirklich „in einem Zuge" d. h. ausnahmslos convergirende Reihe *(series uno tenore convergens)* die Gültigkeit des Cauchy'schen Stetigkeits-Satzes ausser Frage stehe. Selbstverständlich beruht dieser Fehlschluss (genau wie bei Cauchy) auf der Supposition, dass eine in irgend einem Intervalle ausnahmslos convergirende Reihe eo ipso jene Eigenschaft besitzen müsse, die wir heute als gleichmässige Convergenz bezeichnen, während auf der anderen Seite das (von Björling völlig unverstandene) Verdienst Abel's gerade darin besteht, dass er für die specielle Classe der Potenzreihen die Existenz dieser Eigenschaft wirklich bewiesen hat. —

Der in Rede stehende Abel'sche Satz lässt sich bekanntlich ohne weiteres auf den Fall einer complexen Veränderlichen x in der Weise übertragen,[1]) dass daraus die Stetigkeit der Reihensumme bezw. die gleichmässige Convergenz der Reihe hervorgeht für alle Stellen x irgend eines Radius $\overline{0X}$, mit Einschluss des Peripherie-Punktes X (natürlich wieder unter der Voraussetzung, dass für $x = X$ die Convergenz der Reihe feststeht). Herr Stolz hat sodann diesen Satz durch Hinzufügung des Nachweises erweitert, dass die gleichmässige Convergenz erhalten bleibt für alle Stellen eines Strahles $\overline{x_0 X}$, falls x_0 einen beliebigen Punkt im Innern des Convergenz-Kreises bedeutet.[2])

Da der Beweis des Herrn Stolz die Darstellung der complexen Zahlen durch trigonometrische Functionen erfordert,

---

[1]) s. z. B. Briot et Bouquet a. a. O.

[2]) Zeitschr. f. Math. Bd. XX, S. 370. — Bd. XXIX, S. 127. — Vorles. über allg. Arithmetik, Bd. II, S. 157.

Digitized by Google

und es mir andererseits wünschenswerth erscheint, derartige den Elementen der Functionenlehre angehörige Sätze nach dem Vorgange von Weierstrass, soweit als möglich, ohne Anwendung dieses transscendenten Hülfsmittels zu begründen, so möchte ich mir erlauben, einen rein elementaren Beweis des betreffenden Satzes hier mitzutheilen. Dabei halte ich es für zweckmässig, dem letzteren die folgende Fassung zu geben:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für irgend einen Peripherie-Punkt X ihres Convergenz-Kreises, so convergirt sie **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 X x_1$, wo x_0, x_1 zwei beliebige Punkte im Innern des Convergenz-Kreises bedeuten.

Um den Beweis des Satzes etwas zu vereinfachen, bemerke man, dass durch die Substitution:

$$(1) \qquad x = X \cdot x' \quad \left(\text{also: } x' = \frac{x}{X},\ x'_{x=X} = 1\right)$$

die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ in eine solche von der Form: $\sum (a_\nu X^\nu) \cdot x'^\nu = \sum a'_\nu \cdot x'^\nu$ übergeht, welche den Convergenz-Radius 1 besitzt und für die Stelle $x = 1$ noch convergirt. Da sodann vermöge der linearen Relation (1) jeder im Innern des ursprünglichen Kreises verlaufenden Geraden $\overline{xX}$ eine im Innern des Einheitskreises verlaufende Gerade $\overline{x'1}$ entspricht und umgekehrt, so genügt es offenbar, statt des oben ausgesprochenen Satzes den folgenden zu beweisen:

Ist die Reihe $\sum a_\nu$ convergent (wenn auch nur **bedingt**), so convergirt $\sum a_\nu x^\nu$ **gleichmässig** für alle Stellen x im Innern und auf der Begrenzung jedes Dreiecks $x_0 1 x_1$, wo: $|x_0| < 1$, $|x_1| < 1$.

Beweis. Zieht man vom Punkte E, welcher den Werth $x = 1$ repräsentiren soll, eine beliebige Sehne $\overline{EB}$ und fällt von B ein Loth $\overline{BA}$ auf die reelle Axe $\overline{OE}$, so mag gesetzt werden:

$$(2) \qquad \overline{OA} = a, \quad \text{also: } \overline{BA} = \sqrt{1-a^2}.$$

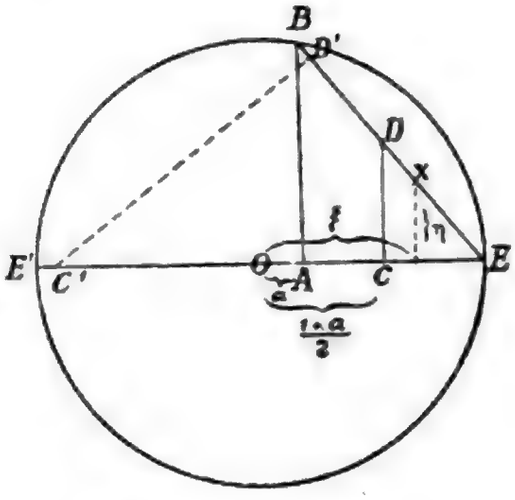
Digitized by Google

Die Coordinaten ξ, η eines jeden auf $\overline{EB}$ gelegenen Punktes $x = \xi + \eta i$ genügen alsdann der Bedingung:

$$\frac{\eta}{1-\xi} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AE}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a} = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}$$

sodass also:

$$\eta = p \cdot (1-\xi), \quad \text{wo: } p = \sqrt{\frac{1+a}{1-a}}. \tag{3}$$



Bezeichnet also ϑ eine dem Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ angehörige Zahl, so werden die beiden Beziehungen:

$$\begin{cases} a \leqq \xi \leqq 1 \\ \eta = \vartheta \cdot p \cdot (1-\xi) \end{cases} \tag{4}$$

die Coordinaten aller möglichen Punkte $x = \xi + \eta i$ definiren, welche der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks BAE angehören.

Es werde nun vorläufig ξ noch in der Weise eingeschränkt, dass:

$$\xi \geqq \frac{1+a}{2} \; (= \overline{OC}) \tag{5}$$

und daher:

$$1-\xi \leqq \frac{1-a}{2}, \quad 1+\xi \geqq \frac{3+a}{2}. \tag{6}$$

Dann soll zunächst bewiesen werden, dass $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen des in der Figur mit DCE bezeichneten rechtwinkligen

Digitized by Google

Dreiecks einschliesslich der Begrenzung gleichmässig convergirt.

In Folge der Convergenz von $\sum a_\nu$ lässt sich einem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n so zuordnen, dass:

$$(7) \qquad \left| R_n^{(n+k)} \right| = \left| \sum_n^{n+k}{}_\nu \, a_\nu \right| < \varepsilon \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Andererseits findet man mit Hülfe der Abel'schen Transformation:

$$\sum_n^{n+k}{}_\nu \, a_\nu x^\nu = \sum_n^{n+k-1}{}_\nu \, R_n^{(\nu)} (x^\nu - x^{\nu+1}) + R_n^{(n+k)} \cdot x^{n+k}$$

$$= x^n (1-x) \left\{ \sum_0^{k-1}{}_\nu \, R_n^{(n+\nu)} \cdot x^\nu + R_n^{(n+k)} \cdot \frac{x^k}{1-x} \right\}$$

und daher mit Berücksichtigung von Ungl. (7):

$$\left| \sum_n^{n+k}{}_\nu \, a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot |x|^n \cdot |1-x| \cdot \left\{ \frac{1-|x|^k}{1-|x|} + \frac{|x|^k}{|1-x|} \right\}.$$

Da aber $|x| \leqq 1$ und: $|1-x| \geqq |1-|x|| = 1-|x|$, so kann man im Nenner des letzten Gliedes $|1-x|$ durch $1-|x|$ ersetzen, sodass sich ergiebt:

$$(8) \qquad \left| \sum_n^{n+k}{}_\nu \, a_\nu x^\nu \right| < \varepsilon \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|}$$

Man hat aber, wenn $x = \xi + \eta i$ dem oben bezeichneten Bereiche angehört, mit Benützung der Beziehungen (3), (4) und (6):

$$\frac{|1-x|}{1-|x|} = (1+|x|) \cdot \frac{|1-x|}{1-|x|^2} < 2 \cdot \frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + \eta^2}}{1-(\xi^2+\eta^2)}$$

$$< 2 \cdot \frac{(1-\xi) \cdot \sqrt{1+\vartheta^2 p^2}}{1-\xi^2-\vartheta^2 p^2 (1-\xi)^2} \quad \text{(s. Gl. (4))}$$

$$< 2 \cdot \frac{\sqrt{1+p^2}}{1+\xi-p^2(1-\xi)}$$

Digitized by Google

$$\leq 2 \cdot \frac{\sqrt{\frac{2}{1-a}}}{\frac{3+a}{2} - \frac{1+a}{1-a} \cdot \frac{1-a}{2}} \quad \text{(s. Gl. (3), Ungl. (6))}.$$

$$< \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}},$$

sodass Ungl. (8) schliesslich in die folgende übergeht:

$$(9) \qquad \left| \sum_{n}^{n+k}{}_{\nu}\, a_\nu x^\nu \right| < \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1-a}} \cdot \varepsilon \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

gültig für jeden Werth x, welcher der Begrenzung oder dem Innern des Dreiecks DCE angehört: die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ convergirt also für diesen Bereich gleichmässig. Da sie im übrigen für jeden einschliesslich seiner Grenze ganz innerhalb des Einheitskreises gelegenen Bereich eo ipso (absolut und) gleichmässig convergirt, so folgt ohne weiteres die Gleichmässigkeit der Convergenz auch für jedes Dreieck, das aus DCE durch passende Verschiebung der Eckpunkte C, D (z. B. bis nach C', D') entsteht. Und da die analoge Beweisführung auch für jedes Dreieck gilt, dessen Spitze dem unteren Halbkreise angehört (während die Grundlinie wieder einen Theil des Diameters EE' bildet), so ergiebt sich schliesslich die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes in dem ursprünglich behaupteten Umfange. —

Als Folgerungen des eben bewiesenen Satzes ergeben sich unmittelbar die folgenden Sätze:

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für die Stelle X auf dem Convergenz-Kreise, so convergirt sie **gleichmässig** auf jedem innerhalb des Kreises verlaufenden Curvenstücke $\widehat{x_0 X}$, welches den Convergenz-Kreis **nicht tangirt.**[1])

[1]) Picard, Traité d'Analyse, T. II, p. 73. Der dort gegebene Beweis stimmt mit demjenigen des Herrn Stolz überein.

Digitized by Google

Convergirt die Reihe $\sum a_\nu x^\nu$ für alle Stellen, welche einen zusammenhängenden Bogen des Convergenz-Kreises ausmachen, so convergirt sie **gleichmässig** auf jeder gebrochenen Linie, die sich der inneren Seite dieses Bogens beliebig nahe anschmiegt.

Dagegen scheint es nicht möglich zu sein, auf diesem Wege irgend etwas bestimmtes über die Gleichmässigkeit oder Ungleichmässigkeit der Convergenz auf dem Kreisbogen selbst auszusagen: man ist in dieser Hinsicht auf diejenigen Hülfsmittel angewiesen, welche durch die Integral-Darstellung der Reihen-Coefficienten geliefert werden.

2.

Der zweite der Abel'schen Sätze würde mit Anwendung der in der Einleitung dieses Aufsatzes gebrauchten Bezeichnungen folgendermaassen lauten:

Sind die Functionen $f_\nu(y)$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ stetig für $a < y \leqq b$ und convergirt die Reihe

$$S(x, y) = \sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot x^\nu$$

für einen gewissen Werth $x = X > 0$ und $a \leqq y \leqq b$, so ist dieselbe auch convergent für jedes positive $x < X$, $a \leqq y \leqq b$ und ihre Summe stellt eine in diesem Intervalle stetige Function von y dar.

Der betreffende Beweis beruht auf der Anwendung der Ungleichung:

$$(10) \quad \left| \sum_n^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot x^\nu \right| = \left| \sum_n^\infty{}_\nu \left(\frac{x}{X}\right)^\nu \cdot f_\nu(y) X^\nu \right| < \left(\frac{x}{X}\right)^n \cdot F(X, y),$$

wo $F(X, y)$ die obere Grenze der Werthe:

$$|f_n(y) \cdot X^n|, \; |f_n(y) \cdot X^n + f_{n+1}(y) \cdot X^{n+1}|,$$
$$|f_n(y) X^n + f_{n+1}(y) X^{n+1} + f_{n+2}(y) \cdot X^{n+2}|, \ldots$$

Digitized by Google

bedeutet. Nun ist eine bestimmte obere Grenze dieser Ausdrücke wegen der vorausgesetzten Convergenz von $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ zwar für jedes einzelne y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$, aber bei veränderlichem y nicht nothwendig für die Gesammtheit dieser y vorhanden. Der Beweis ist also unzulänglich und wird nur dann vollständig, wenn man die Forderung, dass $\left|\sum_n^{n+\varrho}{}_\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|$ für $\varrho = 0, 1, 2, \ldots$ und alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ stets unter einer festen positiven Zahl bleiben soll, ausdrücklich in die Voraussetzung aufnimmt. Hierzu ist hinreichend[1]) (aber keineswegs nothwendig[2]), wenn die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot X^\nu$ als gleichmässig convergent für $a \leqq y \leqq b$ vorausgesetzt wird.

Man kann aber vermöge einer einfachen Modification des Beweises diese Einschränkung auch durch die folgende, offenbar geringere ersetzen, dass die einzelne Terme $f_\nu(y)\cdot X^\nu$ für alle y des Intervalls $a \leqq y \leqq b$ numerisch unter einer festen positiven Zahl G bleiben. Man hat dann nur, wie Herr Sylow in einer Note zu dem fraglichen Satz bemerkt hat,[3]) statt von der Beziehung (10), von der folgenden auszugehen:

$$(11)\quad \left|\sum_n^\infty{}_\nu f_\nu(y)\cdot x^\nu\right| < \sum_n^\infty{}_\nu \left|f_\nu(y)\cdot X^\nu\right|\cdot\left(\frac{x}{X}\right)^\nu < \left(\frac{x}{X}\right)^n\cdot G\cdot\frac{X}{X-x},$$

um zu erkennen, dass dieser Ausdruck für alle in Betracht kommenden Werthe von y lediglich durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann.

Ich möchte dem hinzufügen, dass sich dieses Resultat noch in folgender Weise verallgemeinern lässt. Erstens braucht

---

[1]) Stolz, Allg. Arithmetik, Bd. I, S. 342, Note 29.

[2]) Auch bei einer ungleichmässig convergirenden Reihe können ja die Reste immerhin durchweg numerisch unter einer festen positiven Zahl bleiben.

[3]) Abel, Oeuvres compl., T. II, p. 303.

Digitized by Google

man, wie Ungl. (11) lehrt, die Convergenz der Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot X^\nu$ überhaupt garnicht vorauszusetzen, es genügt schon die blosse Endlichkeit der Terme $f_\nu(y) \cdot X^\nu$. Zweitens erscheint es aber sogar für die Gültigkeit des Satzes schon hinreichend, wenn nur $|\nu^{-p} \cdot f_\nu(y) \cdot X^\nu|$ für eine beliebig gross anzunehmende positive Zahl p unter einer endlichen Grenze bleibt. Denn man kann alsdann die Ungl. (11) durch die folgende ersetzen:

$$(12) \qquad \left|\sum_n^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot X^\nu\right| \leq \sum_n^\infty{}_\nu \left|\nu^{-p} \cdot f_\nu(y) \cdot X^\nu\right| \cdot \nu^p \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^\nu$$

$$< n^p \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^n \cdot G \cdot \sum_0^\infty{}_\nu (\nu+1)^p \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^\nu.$$

Dabei besitzt offenbar der letzte Factor (als Summe einer convergenten Reihe) einen bestimmten endlichen Werth, während $n^p \cdot \left(\frac{x}{X}\right)^n$ durch Wahl von n beliebig klein gemacht werden kann. Man kann also den fraglichen Satz schliesslich durch den folgenden ersetzen:

Bleiben für irgend einen positiven Werth X und für alle dem Intervalle $a < y \leq b$ angehörigen Werthe y, nach Annahme einer beliebig grossen positiven Zahl p, die Terme $|\nu^{-p} \cdot f_\nu(y) \cdot X^\nu|$ unter einer festen positiven Zahl, so convergirt die Reihe $\sum_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot x^\nu$ für jedes x, dessen absoluter Betrag unter X liegt; und ihre Summe ist im Intervalle $a \leq y \leq b$ eine stetige Function von y, wenn die einzelnen $f_\nu(y)$ für jeden endlichen Werth ν diese Eigenschaft besitzen.[1])

Diese Fassung des Satzes zeigt, dass im Falle $X < 1$ ein Unendlichwerden von $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ für gewisse oder auch alle

[1]) Der Satz in dieser Form gilt offenbar auch ohne weiteres für complexe Werthe von x und y: man hat nur an die Stelle des Intervalls (a, b) einen irgendwie begrenzten Bruch T zu setzen.

Digitized by Google

möglichen Werthe von y keinesfalls auszuschliessen ist: die Convergenz der geometrischen Progression x^ν ($|x| < 1$) ist eben eine so überaus starke, dass durch sie ein solches Unendlichwerden von $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(y)$ vollständig paralysirt wird.

Hiernach erscheint es aber keineswegs ganz unwahrscheinlich, dass bei der ursprünglichen (Abel'schen) Formulirung des fraglichen Satzes, wobei die Convergenz der Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu f_\nu(y) \cdot X^\nu$ (für $a < y \leqq b$) zur Voraussetzung diente, eine etwaige Ungleichmässigkeit dieser Convergenz durch Verwandlung von X in einen numerisch kleineren Werth x gleichfalls allemal aufgehoben werden könnte. Mit anderen Worten, es wäre sehr wohl denkbar, dass trotz der Unzulänglichkeit des Abel'schen Beweises der betreffende Satz an sich vollkommen richtig sein könnte. Da es mir von Interesse zu sein schien, hierüber ausreichende Klarheit zu gewinnen, so habe ich das folgende Beispiel construirt, aus welchem in der That schliesslich die Unhaltbarkeit des Satzes in der von Abel gewählten zu allgemeinen Fassung hervorgeht.

Es bedeute m_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen, welche mit ν monoton zunehmen und so in's Unendliche wachsen, dass:

$$\lim \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty, \tag{13}$$

und es werde speciell:

$$m_0 = 0 \tag{14}$$

angenommen (Beispiele: $m_\nu = \nu \cdot e^{\nu^2}$, $e^{\nu^2} - 1$, $\nu^{\nu+1}$, $(\lg \nu + 1)^{\nu+1}$). Setzt man sodann:

$$f_\nu(y) = \frac{m_{\nu+1}\, y^2}{m_{\nu+1}\, y^2 + 1} - \frac{m_\nu\, y^2}{m_\nu\, y^2 + 1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{15}$$

$$= \frac{(m_{\nu+1} - m_\nu)\, y^2}{m_{\nu+1} \cdot m_\nu \cdot y^4 + (m_{\nu+1} + m_\nu)\, y^2 + 1},$$

so erkennt man zunächst, dass die Reihe:

Digitized by Google

$$(16) \qquad S(x, y) = \sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(y) \cdot x^{2\nu}$$

für jedes reelle y und jedes endliche x convergirt. Bringt man nämlich das allgemeine Glied dieser Reihe auf die Form:

$$(17) \qquad f_\nu(y) \cdot x^{2\nu} = \frac{\left(1 - \frac{m_\nu}{m_{\nu+1}}\right) \cdot y^2}{y^4 + \left(\frac{1}{m_{\nu+1}} + \frac{1}{m_\nu}\right) + \frac{1}{m_{\nu+1} \cdot m_\nu}} \cdot \frac{x^{2\nu}}{m_\nu},$$

so bildet der zweite Factor (wegen: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{m_{\nu+1}}{m_\nu} = \infty$) das allgemeine Glied einer beständig convergirenden Potenzreihe in x, während der erste für $y = 0$ durchweg verschwindet, für $|y| > 0$ bei jedem endlichen Werthe von ν einen bestimmten endlichen Werth, für $\lim \nu = \infty$ den Grenzwerth $\frac{1}{y^2}$ besitzt.

Zugleich sind die $f_\nu(y)$ für jeden bestimmten Werth ν stetige Functionen von y im Intervalle $-\infty < y < +\infty$.[1])

Nichtsdestoweniger ist die Summe $S(x, y)$ für $y = 0$ unstetig, sobald x eine reelle Zahl bedeutet, deren absoluter Betrag $\geqq 1$ ist. Man hat nämlich für jeden endlichen Werth von x einerseits:

$$(18) \qquad S(x, 0) = 0.$$

Andererseits ergiebt sich, wenn man zunächst $x = \pm 1$ setzt:

$$(19) \qquad S_n(\pm 1, y) = \sum_0^n {}_\nu \left\{ \frac{m_{\nu+1}\, y^2}{m_{\nu+1}\, y^2 + 1} - \frac{m_\nu\, y^2}{m_\nu\, y^2 + 1} \right\}$$

$$= \frac{m_{n+1}\, y^2}{m_{n+1}\, y^2 + 1},$$

also:

$$(20) \qquad S(\pm 1, y) = \lim_{n=\infty} S_n(\pm 1, y) = 1 \quad (\text{für } |y| > 0).$$

[1]) Dies gilt sogar auch noch für $\lim \nu = \infty$, da $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu(y) = 0$.

Digitized by Google

Nimmt man jetzt $|x| > 1$, so wird, da die $f_\nu(y)$ durchweg positiv sind:

$$S(x, y) > S(1, y) \text{ d. h. } > 1, \tag{21}$$

und man erkennt somit durch Vergleichung der Resultate (20), (21) mit Gl. (18), dass $S(x, y)$ an der Stelle $y = 0$ unstetig ist, sobald man x einen beliebigen Werth $\geqq 1$ bezw. $\leqq -1$ beilegt.

Für $|x| < 1$ bleibt, beiläufig bemerkt, die Gleichmässigkeit der Convergenz und somit die Stetigkeit der Reihensumme $S(x, y)$ auch an der Stelle $y = 0$ erhalten. Denn die $f_\nu(y)$ bleiben für jeden Werth von ν und y numerisch kleiner als 1, es tritt also hier der oben ausgesprochene, modificirte Abel'sche Satz ohne weiteres in Kraft.

Nachtrag zu dem Aufsatze:

„Ueber die Du Bois Reymond'sche Convergenz-Grenze etc."

S.-B. p. 303—334.

Um bezüglich der auf S. 332 gemachten Bemerkung, dass die Bedingung:

$$U_{m+\varrho} - U_m < \varepsilon \quad (\varrho = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

stets die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes $\lim\limits_{n=\infty} U_n$ involvire, jedes Missverständniss auszuschliessen, möchte ich zu dem dort gesagten noch folgendes hinzufügen.

Nur, wenn man die Cantor'sche Definition der Irrationalzahlen acceptirt, enthält die Bedingung (1) geradezu die Definition der Grenzwerth-Existenz und zwar in folgendem Sinne: Auf Grund von Ungl. (1) definirt die Folge der U_ν eine bestimmte Zahl U, mit welcher nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann, sodass also insbesondere auch $|U - A|$ eine wohldefinirte Zahl vorstellt, gleichgültig ob A eine rationale Zahl oder eine solche vom Charakter U bedeutet. Da nun, wie leicht zu sehen:

Digitized by Google

(2) $|U - U_\nu|$ beliebig klein wird, etwa für $\nu > n$,

so nennt man U auch den Grenzwerth der U_ν, in Zeichen:

$$U = \lim_{n=\infty} U_n.$$

Legt man dagegen irgend eine andere Definition der Irrationalzahlen zu Grunde, so bildet, wie ich es auf S. 332 ausdrückte, die Ungl. (1) lediglich die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes, d. h. einer bestimmten Zahl U, welche der Bedingung (2) genügt. Das ist so zu verstehen, dass in diesem Falle die Existenz der Ungleichung (2) erst bewiesen werden muss, aber auch wirklich bewiesen werden kann. Dabei wird natürlich der betreffende Beweis je nach der gewählten Definitions-Form der Irrationalzahlen zu modificiren sein.

Den ersten correcten Beweis auf Grund seiner eigenen Definition hat Herr Dedekind am Schlusse seiner Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen" (1872) publicirt.[1]) Herr Dini hat demselben eine etwas leichter fassliche Form gegeben.

Demnächst hat Herr Stolz, gelegentlich der Besprechung eines unzulänglichen Beweises von Bolzano, einen anderen, auf der Existenz der „Unbestimmtheits-Grenzen" beruhenden Beweis geliefert.[2]) Derselbe ist naturgemäss merklich einfacher und kürzer: nur muss man sich darüber klar sein, dass hierbei der Schwerpunkt des fraglichen Beweises in Wahrheit lediglich in den Nachweis für die Existenz der Unbestimmt-

---

[1]) Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali (1878), p. 27, Art. 22 — mit dem unwesentlichen Unterschiede, dass es sich dort um den allgemeineren Fall einer beliebigen (d. h. nicht nothwendig abzählbaren) Zahlenmenge handelt. Dieser Beweis ist auch in die deutsche Ausgabe (S. 33, § 22) aufgenommen, obschon er dort wegen des veränderten Ausgangspunktes (Annahme der Cantor'schen Definition) in der Hauptsache überflüssig ist.

[2]) B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung. Math. Ann. Bd. XVIII, S. 260 (1881).

Digitized by Google

heits-Grenzen verlegt ist,[1]) wozu wiederum noch die folgenden zwei Sätze erforderlich sind: 1) Jede Menge endlicher Zahlen besitzt eine bestimmte obere bezw. untere Grenze. 2) Jede monotone Folge endlich bleibender Zahlen besitzt einen bestimmten Grenzwerth. — Der Beweis dieser Sätze hängt dann wiederum wesentlich von der Wahl der Irrationalzahl-Definition ab.

Der Beweis, welchen Du Bois Reymond in seiner Functionen-Theorie[2]) für den in Rede stehenden Satz („das allgemeine Convergenz-Princip") giebt, ist eine einfache Modification des Dini'schen Beweises (der sich, beiläufig bemerkt, in analoger Weise auch leicht für die Weierstrass'sche Definitions-Form der Irrationalzahlen adaptiren lässt).

Herr Tannery, der in seiner Introduction à la théorie des fonctions (1886) zunächst von der Dedekind'schen Definition ausgeht, beweist den fraglichen Satz, indem er zeigt, dass jede Irrationalzahl im Cantor'schen Sinne auch eine solche nach Dedekind ist,[3]) mit anderen Worten, dass jede der Bedingung (1) genügende Zahlenfolge einen Dedekind'schen Schnitt definirt. Dieses letztere Princip liegt auch dem von Herrn C. Jordan in der zweiten Auflage seines Cours d'Analyse (1893) mitgetheilten, sehr präcis gefassten Beweise zu Grunde.[4])

[1]) Vgl. Du Bois Reymond, Antrittsprogramm S. 3. Uebrigens enthält der dort gegebene Beweis wiederum einen für die Unklarheit der Du Bois Reymond'schen Grenz-Vorstellungen charakteristischen Irrthum. Es wird dort behauptet und bewiesen (!), dass U_n für $\lim n = \infty$ die Werthe A, B der beiden Unbest.-Grenzen stets unendlich oft annehmen muss. Diese Behauptung hat aber entweder überhaupt keinen bestimmten Sinn, oder sie kann nur soviel bedeuten, dass U_n für noch so grosse endliche Werthe von n immer wieder einmal die Werthe A und B annimmt (in diesem Sinne dürfte sie auch gemeint sein, wie der vorgebliche Beweis — a. a. O. S. 4 — anzudeuten scheint). Dann ist sie aber offenbar falsch, wie ein einziger Blick auf das Beispiel $U_n = \sin n$ lehrt.

[2]) S. 260 (1882).

[3]) a. a. O. Art. 27.

[4]) a. a. O. Art. 9.

Digitized by Google

Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind.

Von **Gustav Bauer.**

(Eingelaufen 9. August.)

1. Es seien $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei Tetraëder; x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Coordinaten eines Punktes im Raum, u_i die Coordinaten einer Ebene in Bezug auf das 1te Tetraëder, x'_i, u'_i die Coordinaten desselben Punktes, resp. derselben Ebene in Bezug auf das 2te Tetraëder, so hat man bekanntlich die Transformationsgleichungen

$$r \cdot x'_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 1)$$

$$\sigma u'_i = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + a_{i3} u_3 + a_{i4} u_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 2)$$

wo die a_{ik} die Coefficienten der Elemente a_{ik} der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ — & — & — & — \\ — & — & — & — \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sind. Nun ist aber der Coefficient a_{ik} in den ersten Gleichungen bis auf einen constanten Faktor die Distanz der i^{ten} Seitenebene des 2ten Tetraëders von der k^{ten} Ecke des ersten. Geht also die i^{te} Seitenebene des 2ten Tetraëders durch die i^{te} Ecke des ersten, $(i = 1, 2, 3, 4)$, so muss

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0 \qquad 3)$$

Digitized by Google

sein. Wir wollen A, B, C, D die 1te, 2te, 3te, 4te Ecke, mithin auch die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten die 1te, 2te, 3te, 4te Seitenfläche des 1ten Tetraëders nennen und analog die Ecken und Seitenflächen des 2ten Tetraëders bezeichnen; dann ist durch die Gleichungen 3) festgesetzt, dass die Ebene $B' C' D'$ durch die Ecke A, $A' C' D'$ durch B, $A' B' D'$ durch C und $A' B' C'$ durch D geht.

2. Ferner ist der Coefficient a_{ik} in den Gleichungen 2) bis auf einen constanten Faktor gleich der Distanz der i^{ten} Ecke des 2ten Tetraëders von der k^{ten} Seitenfläche des 1ten. Machen wir also die Bedingung, dass die i^{te} Ecke des 2ten Tetraëders in der i^{ten} Seitenfläche des ersten liege, $(i = 1, 2, 3, 4)$, so muss sein

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0. \qquad 4)$$

Indem wir diese Annahme machen, setzen wir fest, dass die Ecke A' in der Ebene $B C D$, B' in $A C D$, C' in $A B D$ und D' in $A B C$ liege. Die beiden Tetraëder sind dann einander zugleich eingeschrieben und umschrieben und zwar haben sie die besondere Lage zu einander, dass je drei Seitenflächen des 2ten Tetraëders, welche durch die drei Ecken einer Seitenfläche des 1ten Tetraëders gehen (z. B. A, B, C), sich in einem Punkt (D') derselben Seitenfläche schneiden.

Ein solches Tetraëderpaar bilden, wie bekannt, irgend vier Punkte einer Raumcurve 3ter Ord. und die Osculationsebenen der Curve an diesen Punkten.

3. Man sollte nun glauben, dass wenn zu den 8 Bedingungen 3) und 4) noch zwei Ecken des 2ten Tetraëders in den betreffenden Ebenen des 1ten Tetraëders willkürlich gegeben werden (4 Bedingungen äquivalent) oder zwei seiner Seitenflächen durch die entsprechenden Ecken des 1ten Tetraëders das 2te Tetraëder vollkommen bestimmt wäre. Diess ist aber nicht der Fall; denn die 8 Bedingungen 3) und 4) sind nicht unabhängig von einander und gelten nur für 7 Bedingungen.

Digitized by Google

In der That werden die Gleichungen 4) unter Berücksichtigung der Gleichungen 3)

$$\frac{a_{32}a_{24}a_{43}}{a_{23}a_{42}a_{34}}=-1,\quad \frac{a_{13}a_{34}a_{41}}{a_{31}a_{43}a_{14}}=-1,\quad \frac{a_{21}a_{14}a_{42}}{a_{12}a_{41}a_{24}}=-1,$$
$$\frac{a_{23}a_{31}a_{12}}{a_{32}a_{13}a_{21}}=-1 \qquad 4^{1})$$

und man sieht sofort, dass die drei ersten Gleichungen durch Multiplication die vierte geben.

Hat man also die erste Ebene des 2ten Tetraëders durch A gehend und ebenso die zweite Ebene durch B gehend willkürlich angenommen, so schneiden sich die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der Ebene ABC in dem Punkte D', und ebenso ihre Durchschnittslinien mit der Ebene ABD in dem Punkte C'. Ausserdem schneidet die erste Ebene durch A die Ebene ACD noch in einer Geraden g und die zweite Ebene durch B schneidet die Ebene BCD in einer Geraden h; auf der Geraden g muss der Punkt B' liegen, auf der Geraden h der Punkt A'. Diese Punkte werden ausgeschnitten durch die dritte Seitenebene des 2ten Tetraëders, die durch CD' hindurchgehen muss, aber unbestimmt bleibt, oder auch durch die vierte Seitenebene, welche durch D und C' hindurchgehen muss. Damit also das 2te Tetraëder ganz bestimmt sei, muss ausser den zwei Ebenen durch A und B noch die Stellung der dritten Ebene um eine hiedurch bestimmte Gerade gegeben sein, oder was dasselbe ist, ausser den zwei Ecken D', C' muss noch eine dritte Ecke auf einer durch die Annahme von D' und C' bestimmten Geraden gegeben werden. Dreht sich die dritte Seitenfläche um CD', so dreht sich zugleich die vierte Seitenfläche um DC' und der Durchschnitt dieser beiden Ebenen $A'B'$ gleitet hiebei an den vier Geraden g, h, CD', DC' hin. Diese vier Geraden gehören also zu der einen Regelschaar eines Hyperboloids, das von $A'B'$ beschrieben wird. Die 8 Ecken der zwei Tetraëder liegen auf diesem Hyperboloid.

Digitized by Google

4. Diese eben besprochene Abhängigkeit zwischen den 8 Bedingungen 3) und 4) ist übrigens, wie ich nachträglich gefunden, schon vor langer Zeit von Moebius bemerkt worden. In einer kleinen Schrift, betitelt: „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heissen?“ [1]) bemerkt Moebius zunächst, dass die Forderung paradox erscheine, dass aber das Paradoxe der Forderung verschwinde, wenn die Spitzen der einen auch in den erweiterten Seitenflächen der andern liegen können. Dann fährt er fort: „Heissen nämlich A, B, C, D die vier Spitzen der einen und F, G, H, J die vier Spitzen der andern Pyramide, so lässt sich darthun, dass die acht hierzu erforderlichen Bedingungen:

I) A in GHJ	V) F in BCD
II) B in HJF	VI) G in CDA
III) C in JFG	VII) H in DAB
IV) D in FGH	VIII) J in ABC

sehr wohl neben einander bestehen können und überdies noch, dass jede dieser acht Bedingungen eine Folge der sieben übrigen ist.“ Hierauf gibt er den Beweis dieses Satzes mittelst seines barycentrischen Calcüls.

5. Diese Darlegung von Moebius erfordert aber eine sehr wesentliche Ergänzung; denn nach dem Wortlaut der Schrift scheint Moebius angenommen zu haben, dass zwei Tetraëder, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind, immer die von ihm aufgestellten 8 Bedingungen, (welche mit den Bedingungen 3) und 4) zusammenfallen), erfüllen müssen. Diess ist jedoch keineswegs der Fall; denn halten wir die 4 Bedingungen 3) und ihre dort gegebene Auslegung fest, so können wir die Ecken A', B', C', D' des 2ten Tetraëders noch beliebig auf die Seitenflächen des 1ten Tetraëders vertheilen. Es ändern sich dabei die Bedinguugen 4) und wir

[1]) Crelle's Journ. 1828. Bd. 3 p. 273—278, und Ges. Werke I. p. 439.

Digitized by Google

erhalten damit verschiedene Typen für solche Tetraëderpaare, je nachdem unter den a_{ik}, welche verschwinden sollen, zwei, einer oder keiner aus der ersten Diagonalreihe des Systems der a

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

entnommen ist.[1]) Vertauschen wir die Bedingungen 4) in

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{43} = 0 \qquad 5)$$

so haben wir den 2ten Typus; vertauschen wir sie in

$$a_{11} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{42} = 0 \qquad 6)$$

so haben wir einen 3ten Typus; ersetzen wir sie aber durch

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{41} = 0 \qquad 7)$$

so haben wir einen 4ten Typus.

Hiebei ist zu bemerken, dass sich der Typus nicht ändert, wenn man dieselben zwei Zahlen zugleich in den ersten und in den zweiten Indices vertauscht.

Diese Typen sind geometrisch deutlich von einander geschieden dadurch, dass es in dem Typus II nur noch zweimal, beim Typus III nur einmal, beim Typus IV gar nicht vorkommt, dass die durch drei Ecken des 1ten Tetraëders hindurchgehenden Ebenen des 2ten Tetraëders sich in der Ebene dieser drei Ecken schneiden.

Gelten z. B. die Bedingungen 5), so liegt A' in $B\,C\,D$, B' in $A\,C\,D$, C' in $A\,B\,C$ und D' in der dritten Ebene $A\,B\,D$. Die in A' zusammenstossenden Seitenflächen $A'\,C'\,D'$, $A'\,B'\,D'$,

---

[1]) Drei a aus der Diagonalreihe $= 0$ gesetzt, erfordern natürlich als vierte Bedingung, dass auch das vierte Element der Diagonalreihe $= 0$ gesetzt werde, und man hat dann den 1ten Typus.

Digitized by Google

$A' B' C'$ gehen resp. durch B, C, D; die in B' zusammenstossenden $B' C' D'$, $A' B' D'$, $A' B' C'$ gehen durch A, C, D; hingegen die in C' zusammenstossenden Seitenflächen gehen resp. durch A, B, D; die in D' zusammenstossenden resp. durch A, B, C.

Diese Typen II—IV unterscheiden sich ferner von dem ersten Typus sehr wesentlich dadurch, dass die 8 Bedingungen, welche die zwei Tetraëder erfüllen müssen, von einander unabhängig sind, also für volle acht Bedingungen zählen (mit einer sogleich zu besprechenden Ausnahme). Gibt man mithin zwei Seitenflächen (oder zwei Ecken) des zweiten Tetraëders, so ist letzteres bestimmt. Die Berechnung der übrigen Elemente führt auf eine quadratische Gleichung. Es gibt mithin in allen diesen Fällen je nach der Wahl der zwei ersten Elemente im allgemeinen zwei reelle Lösungen oder gar keine.

6. Ein bemerkenswerther Ausnahmefall des Typus IV ergiebt sich, wenn die vier verschwindenden a symmetrisch zu der Hauptdiagonale des Systems der a liegen. Dieser Typus V ist mithin durch die Bedingungen

$$a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{43} = 0 \qquad 8)$$

charakterisiert. Zu diesem Typus gehört also auch der Fall, wenn die vier a der zweiten Diagonale des Systems der a verschwinden, nämlich

$$a_{14} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{41} = 0,$$

welche durch Vertauschung der Zahlen 2 und 4 aus den Bedingungen 8) sich ergeben.

In diesem Falle besteht nämlich, wie beim Typus I, eine Abhängigkeit zwischen den 8 Bedingungen, sodass sie nur für 7 Bedingungen zählen.

Man findet nämlich leicht, dass, wenn die 4 Gleichungen 3) gelten, die Gleichung besteht

$$a_{12}\, a_{12} + a_{21}\, a_{21} = a_{34}\, a_{34} + a_{43}\, a_{43} \qquad 9)$$

Digitized by Google

Da nun in unserm Problem $a_{12}, a_{21}, a_{34}, a_{43}$ nicht Null sein können, so folgt, dass von den Bedingungen 8) die eine eine Folge der drei andern ist.

Es tritt also auch hier, wie bei Typus I, der Fall ein, dass wenn von dem 2ten Tetraëder entweder zwei Ecken oder zwei Seitenflächen gegeben sind, die Bestimmung des 2ten Tetraëders noch unendlich viele Lösungen zulässt, indem man die dritte Ecke noch auf einer gewissen Geraden willkürlich wählen kann, oder auch die Stellung einer dritten Seitenfläche um eine gewisse Gerade.

7. Dieser Fall hat auch noch das bemerkenswerthe, dass alle vier Ecken des 2ten Tetraëders innerhalb der Dreieckseiten des ersten Tetraëders fallen können, sodass also das zweite Tetraëder ganz innerhalb des ersten liegt (was bei dem Typus I offenbar nicht möglich ist).

Nimmt man z. B. für den Punkt A' den Schwerpunkt der zweiten Seitenfläche $A\,C\,D$, für B' den Schwerpunkt der ersten Seitenfläche $A\,C\,D$, womit die zwei ersten Bedingungen 8) erfüllt sind; nehmen wir ferner die Ecke D als Anfangspunkt der Coordinaten, die Kanten $D\,A$, $D\,B$, $D\,C$ als Axen der x, der y und der z an und sind a, b, c die Längen dieser Kanten, so findet man als Ort des Punktes C' $(x'\,y'\,z')$ in der vierten Seitenfläche $A\,B\,C$ gelegen, die Gerade

$$z' = \frac{c}{2}, \quad \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} - \tfrac{1}{2} = 0;$$

und als Ort des Punktes D' $(x''\,y''\,z'')$ in der dritten Seitenfläche $A\,B\,D$ gelegen, die zur vorigen parallele Gerade

$$z'' = 0, \quad \frac{x''}{a} + \frac{y''}{b} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Die zwei Punkte C', D' sind dann ferner durch die Gleichungen an einander gebunden

$$\frac{y'}{b} = \frac{x''}{a}, \quad \frac{x'}{a} = \frac{y''}{b},$$

Digitized by Google

oder auch

$$x' + x'' = \frac{a}{2}, \quad y' + y'' = \frac{b}{2}.$$

Bewegt sich C' innerhalb des Dreiecks $A\,B\,C$, so bewegt sich auch D' innerhalb des Dreiecks $A\,B\,D$. Die Mitten der beiden Geraden, soweit sie in den Seiten des Tetraëders selbst liegen, sind solche entsprechende Punkte C', D'.

Digitized by Google

Theorie der Aequivalenz von linearen ∞^λ-Schaaren bilinearer Formen.

Von **S. Kantor.**

(*Eingelaufen 3. Juli.*)

Dass nach Herrn Weierstrass die Theorie der Elementartheiler in keiner Weise auf ∞^λ-Schaaren, $\lambda > 1$, ausgedehnt wurde, hat seinen Grund zweifellos darin, dass für $\lambda > 1$ die Zerlegbarkeit der Determinante S_{pq} mangelt. Indessen wird die gegenwärtige Arbeit zeigen, dass sogar eine leichte Umänderung im Ausspruche des Weierstrass'schen Theoremes unerlässlich ist, um daran eine Verallgemeinerung knüpfen zu können.

Von dem Wunsche, die linearen ∞^λ-Systeme von Correlationen im R_r zu erschöpfen, wurde ich zu einer Verallgemeinerung der Theorie der Aequivalenz geführt, von der es mir schwer wird, sie nicht als die einzig mögliche anzusehen. Die Theorie der Weierstrass'schen Elementartheiler tritt in eine neue Beleuchtung und der geometrische Beweis für das Aequivalenztheorem scheint eine paradigmatische Bedeutung zu besitzen, sodass ich mich entschloss, den folgenden, hinreichend deutlichen Auszug meiner Theorie in die Oeffentlichkeit zu bringen.[1])

---

[1]) Mit der von Gordan begründeten Theorie der Combinanten zunächst und unter höheren Gesichtspunkten mit der Theorie der Formen von l durch unabhängige lineare Substitutionen $H_1\, H_2 \ldots H_l$ transformirten Variabelnreihen steht der gegenwärtige Gegenstand, wenn auch nicht meine Behandlungsweise desselben, in engster Verbindung. Cf. auch Frobenius Cr. J. Bd. 86, § 13.

Digitized by Google

§ 1. Das Problem.

Sind $p_1 P_1 + \ldots + p_{\lambda+1} P_{\lambda+1} \ldots .$ 1) und $p_1 P'_1 + \ldots + p'_{\lambda+1} P'_{\lambda+1} \ldots .$ 2) zwei Schaaren bilinearer Formen, wo allgemein $P = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$, so stellt sich die Algebra die Frage nach den nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit durch die simultanen und successiven Transformationen $H \ldots . x_\alpha = \Sigma h_{\alpha\gamma} u_\gamma \ldots (\alpha, \gamma = 1, \ldots . r + 1)$ und $K \ldots . y_\beta = \Sigma k_{\beta\gamma} v_\gamma \ldots (\beta, \gamma = 1, \ldots r + 1)$, durch welche in P entsteht $A'_{\alpha\beta} = \Sigma h_{\delta\beta} k_{\alpha\gamma} A_{\alpha\beta}$, die Schaar 1) in 2) übergeführt werden könne unter der Voraussetzung, dass die $h_{\delta\beta}$, $k_{\alpha\gamma}$ sämmtlich frei von den p sind. Beim Variiren der $A_{\alpha\beta}$ beschreibt P eine lineare Mannigfaltigkeit von $\sigma = (r + 1)^2 - 1$ Dimensionen, einen R_σ.[1]) Die durch $H(\cdot) K$ bewirkte Transformation der $A_{\alpha\beta}$ in die $A'_{\alpha\beta}$, welche eine lineare Substitution des R_σ ist, soll Ω heissen. Wegen $|P'| = |H| \, |P| \, |K|$ folgt, dass alle Ω die Mannigfaltigkeit $S = |A_{\alpha\beta}| = 0$ des R_σ in sich transformiren.

§ 2. Eigenschaften von S und Ω.

Ich führe sie ohne Beweise an, die aber unschwer geliefert werden können.

S ist ein Monoid der Ordnung $r + 1$. — S besitzt nur continuirliche i-fache Mannigfaltigkeiten, für jedes i von 2 bis r nur eine. Diese Vielfachheiten sollen als $V^{(i)}$ bezeichnet werden. — Jede $V^{(i)}$ ist in der $V^{(i-1)}$ i-fach enthalten. — Geometrisch interpretirt repräsentiren die $V^{(i)}$ $(i = 1, \ldots r)$ die Correlationen des R_r, welche zwei ganz singuläre O_{i-1}, O'_{i-1} in den R_r, R'_r besitzen. — Die $M_{\sigma-1} \equiv S$ besitzt also keine anderen vielfachen Mannigfaltigkeiten als jene, welche die Correlationen mit resp. zwei singulären O_1, O'_1;

[1]) Wird P als Correlation gedeutet, so stellt jeder Punkt des R_σ eine Correlation dar, aber man hüte sich vor der umgekehrten Angabe, dass jede Correlation durch 1) repräsentirt werden könne. Der Begriff der Correlation erscheint also hier nicht als etwas Absolutes, sondern als etwas an die Bestimmungsweise durch 1) Gebundenes. Hievon ist die Auffassung der abzählenden Geometrie (Zeuthen, Schubert) verschieden.

Digitized by Google

$O_2, O_2'; \ldots O_{r-1}, O_{r-1}'$ repräsentiren. — Die Mannigfaltigkeit $V^{(i)}$ hat die Dimension $\sigma_i = (r+1)^2 - i^2 - 1$ und ist abbildbar.[1]) Die $V^{(r)}$ enthält zwei getrennte ∞^r-Schaaren von R_r: R_r^x, R_r^y und keine lineare Räume höherer Dimension. Durch jeden Punkt von $V^{(r)}$ gehen zwei R_r.[2]) — Verbindet man irgend zwei R_r^x oder zwei R_r^y durch einen R_{2r+1}, so ist derselbe in der $V^{(r-1)}$ enthalten und $V^{(r-1)}$ enthält keine höheren linearen Räume. — Verbindet man irgend $r-i$ R_r^x (oder R_r^y) der $V^{(r)}$ durch einen $R_{(r-i)(r+1)-1}$, so ist derselbe ganz in der $V^{(i-1)}$ enthalten und $V^{(i-1)}$ enthält keine höheren linearen Räume. — Die Gesammtgruppe der linearen Transformationen im R_σ, welche S invariant lassen, besteht aus zwei getrennten Schaaren; die eine bewahrt die R_r^x, R_r^y-Schaaren, die andere vertauscht sie.[3]) — Eine allgemeinste lineare Transformation der 1. Schaar hat ihre $\sigma+1$ Doppelpunkte in $V^{(r)}$. Denn sie lässt sich zusammensetzen aus zwei Transformationen, von denen die eine jeden R_r^x, die andere jeden R_r^y ungeändert lässt. In einem festen R_r^x entstehen dann $r+1$ Doppelpunkte, sodass $r+1$ invariante R_r^x, $r+1$ R_r^y existiren, welche sich in den

---

[1]) Es ist weit schwieriger, die Ordnung der $V^{(i)}$ zu berechnen. Hierauf beziehe man einige von Herrn Reye für Polarsysteme im R_3, von Schröter für Flächen 3. O. (das Geradensextupel), von mir für Collineationen im R_3 und R_r bestimmte Anzahlen.

[2]) Nimmt man in den O_{r-1}, O_{r-1}' zweier Correlationen 4 Coordinatenräume, so werden die Formen $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ und es ist nicht jede Correlation der Schaar $x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 = 0$ in $V^{(r)}$ enthalten. Dies findet nur statt, wenn die beiden O_{r-1} oder O_{r-1}' coincidiren; der jedesmalige O_{r-1}' oder O_{r-1} kann dann im ganzen R_{r-1}' oder R_{r-1} variiren, woraus der Inhalt des Theoremes.

[3]) Die zweite Schaar entspricht auch der Transposition der Variabeln reihen in der bilinearen Form. Herr Weierstrass hat diese Aenderungen von P gewiss mit Absicht unbeachtet gelassen, bei Kronecker deutet eine Bemerkung über „die Zuweisung der beiden Variabelnreihen" darauf hin. Hier darf er nicht fehlen.

Digitized by Google

$(r+1)^2 = \sigma + 1$ Doppelpunkten schneiden.[1]) — Ersetzt man in einer Determinante $|A_{\alpha\beta}|$ jedes Element durch eine lineare Function aller Elemente der Determinante, so bleibt $|A_{\alpha\beta}|$ nur dann ungeändert, wenn die lineare Substitution die Form hat $A'_{\alpha\beta} = \Sigma h_{\delta\beta} k_{\alpha\gamma} A_{\alpha\beta}$ oder diese combinirt mit $A'_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$. — Dieses Theorem sollte auf den ersten Seiten jedes Lehrbuches der Determinanten stehen. — Die linearen Transformationen des R_σ, welche $V^{(r)}$ (also auch S) unter Bewahrung jeder der R^x-, R^y-Schaaren invariant lassen, stimmen genau mit den durch die Weierstrass'schen Transformation HAK hervorgerufenen Ω überein.

Die $M_{\sigma-1} = S$ hat die Eigenschaft, dass unter den Punkten des R_σ und ihren linearen Polaren nach S eine birationale Verwandtschaft besteht, die von der Ordnung r ist und die $S, V^{(2)}, \ldots V^{(r)}$ als Fundamentalmannigfaltigkeiten besitzt.[2]) — Die Hesse'sche Co-

---

[1]) Dies stimmt mit den Correlationen überein. Denn die Composition PAQ lässt, wenn P allgemein sind, nur $(r+1)^2$ singuläre Correlationen invariant. Nämlich: P in R_r hat $r+1$ Doppelräume D_i, Q in R'_r hat $r+1$ Doppelräume D'_r, die $(r+1)^2$ Correlationen, welche die singulären Axen $D_i D'_k$ besitzen, sind die invarianten. — Die Theoreme VII, VIII und besonders IX in § 6 von Herrn Frobenius' so wichtiger Arbeit in Cr. J. Bd. 84 sind also nicht richtig.

[2]) Es sei X'_{ik} die zu X_{ik} in 7) gehörige Unterdeterminante. Dann sind die X'_{ik} homogene Functionen der $(r+1)^2$ Grössen X_{ik}. Dass jedesmal $2r+1$ X_{ik} fehlen, soll uns nicht aufhalten. Ich schreibe $X'_{ik} = f_{ik}(X_{11}, \ldots X_{r+1,\, r+1})$. Dann fasse ich dies als eine eindeutige Transformation der $(r+1)^2$ X_{ik} in die $(r+1)^2$ X'_{ik} auf. Die Coefficienten in den Transformationsformeln sind nun ± 1. Wiederhole ich die Transformation und setze $X''_{ik} = f_{ik}(X'_{11}, \ldots X'_{r+1,\, r+1})$, so heisst das, wie man sieht, nichts anderes, als: ich setze in die f_{ik} selbst wieder die f_{ik} ein; hierauf applicirt sich ein bekannter alter Determinantensatz, wonach $X''_{ik} = S^r \cdot X_{ik}$ wird. Also definiren die Ausdrücke der $(r+1)^2$ Unterdeterminanten in den $(r+1)^2$ Elementen eine involutorische birationale Transformation im R_σ. Hieraus folgt sofort das Theorem des Textes.

Digitized by Google

variante H von S ist für r ungerade identisch Null[1]) und für r gerade die $S(r-1)$-fach gezählt, $H = S^{r-1}$. — Alle Covarianten der σ-ären Form S verschwinden entweder identisch oder sind eine Potenz von S selbst.[2]) Alle Polaren von S haben die Eigenschaft, dass sie keine variable absolute Invariante mehr besitzen. Aus allem Gesagten ziehe ich die **Conclusion:** Auf der $M_{\sigma-1} = S$ befindet sich ausser den $V^{(2)}, \ldots V^{(r)}$ nichts, was gegen alle linearen Transformationen Ω invariant wäre.

§ 3. Definition der Elementarzahlen für eine ∞^λ-Schaar bilinearer Formen.

Die Schaaren 1) und 2) werden im R_σ durch zwei R_λ, R'_λ repräsentirt und es wird gefragt, wann R_λ in R'_λ durch eine Ω übergeführt werden könne. Dass ihre Schnittmannigfaltigkeiten $M_{\lambda-1} = \Lambda$, $M'_{\lambda-1} = \Lambda'$ mit S, in deren Gleichungen $|\Sigma p_i P_i| = 0$, $|\Sigma p_i P'_i| = 0$ sind, in einander überführbar sein müssen, ist nothwendig, aber nicht hinreichend. Denn es könnten die Singularitäten der Λ, Λ' auf verschiedene Arten aus den $V^{(i)}$ von S entstanden sein. Das allgemeinste Verhalten von R_λ gegen S ist das folgende: Es seien

---

[1]) S ist somit ein Beleg für die von Gordan und Nöther in Math. Ann. Bd. X nachgewiesene Möglichkeit, dass die Hesse'sche Covariante identisch verschwinde, ohne dass die Form sich auf weniger Variabeln reduciren liesse.

[2]) Die Giltigkeit dieses Theoremes ist aber unerlässlich für die Giltigkeit des Weierstrass'schen Aequivalenztheoremes. Denn seien C eine Covariante, T, T^1 zwei Punkte von S. Dann kann man zwei Geraden ziehen, von denen die eine in T die $S(r-1)$-punktig berührt, aber die C nirgends berührt, die andere die S in T $(r-1)$-punktig berührt und auch C in irgend einem Punkte einfach berührt. Wenn nun T und T^1 beide nicht in $V^{(2)}$ enthalten sind, so ist es nach dem Weierstrass'schen Theoreme möglich, eine Transformation Ω zu finden, welche R_1 in R'_1 verwandelt. Ω transformirt also S in sich, also auch C in sich, daher müsste eine Tangente von C in eine Nichttangente verwandelt werden.

Digitized by Google

$T_1^{(0)}, T_2^{(0)}, \ldots . T_{\varrho_0}^{(0)}$ die einzelnen Punkte (M_0)

$T_1^{(1)}, T_2^{(1)}, \ldots . T_{\varrho_1}^{(1)}$ die einzelnen irreductibeln Linien (M_1)

. . . . . .

$T_1^{(\nu)}, T_2^{(\nu)}, \ldots . T_{\varrho_\nu}^{(\nu)}$ die einzelnen irreductibeln M_ν

vielfach für die Λ und sie seien so entstanden, dass $T_x^{(v)}$ der $V^{(i_{x,v})}$ nicht aber der $V^{(i_{x,v}+1)}$ angehöre. Dann wird der R_λ sich in $T_x^{(v)}$ noch verschieden gegen S verhalten können. Es habe R_λ mit S längs $T_x^{(v)}$ mit $V^{(i_{x,v})}$ einen $l^{x,v}_{i_{x,v}-1}$-punktigen Contact, sodass $T_x^{(v)}$ so vielfach im Schnitte des R_λ mit $V^{(i_{x,v})}$ zählt. Längs derselben $T_x^{(v)}$ habe R_λ mit $V^{(i_{x,v}-1)}$ einen $l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2}$-punktigen Contact, längs ihrer mit $V^{(i_{x,v}-2)}$ einen $l^{(x,v)}_{i_{x,v}-3}$-punktigen Contact u. s. w., endlich mit $V^{(2)}$ einen $l_1^{(x,v)}$-punktigen und längs derselben $T_x^{(v)}$ mit S einen l-punktigen Contact. Es bestehen also die folgenden Zahlen, welche sämmtlich Contactordnungen von R_λ mit den V längs den T bezeichnen:

D)
$$\begin{array}{lll}
l^{(x,0)}_{i_{x,0}},\ l^{(x,0)}_{i_{x,0}-1}, \ldots\ldots l^{(x,0)}_{\pi_0} \ldots\ldots l_1^{(x,0)},\ l^{(x,0)} & x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_0 \\
l^{(x,1)}_{i_{x,1}},\ l^{(x,1)}_{i_{x,1}-1}, \ldots\ldots l^{(x,1)}_{\pi_1} \ldots\ldots l_1^{(x,1)},\ l^{(x,1)} & x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
l^{(x,v)}_{i_{x,v}},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1}, \ldots\ldots l^{(x,v)}_{\pi_v} \ldots\ldots l_1^{(x,v)},\ l^{(x,v)} & x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_v \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}},\ l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-1}, \ldots\ldots l^{(x,\nu)}_{\pi_\nu} \ldots\ldots l_1^{(x,\nu)},\ l^{(x,\nu)} & x \text{ von } 1 \text{ bis } \varrho_\nu .
\end{array}$$

Diese Zahlen sind gewiss für die Ω im R_σ und daher auch für die $H(\cdot\,\cdot)K$ im R_τ invariant, solange $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$.

Es kommt nun darauf an, diese Zahlen an der Formenschaar algebraisch zu fixiren. Dazu sind die „gemischten Ableitungen der Punkte von R_σ nach S" tauglich und nothwendig. Die i-ten Ableitungen gehen sämmtlich $(l-i)$-fach durch $V^{(l)}$, also verhalten sich die 1., 2., . . . μ . . . . gemischten Ableitungen Π nach S so gegen R_λ, dass dieser in T_x die $(i_{x,v}-1)$-fachen, $(i_{x,v}-2)$-fachen, ... 2-fachen Varie-

Digitized by Google

täten von $\overset{1}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ (also die $V^{(i_{x,v})}$, $V^{(i_{x,v}-1)}$, ... $V^{(2)}$) und die $\overset{1}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ selbst gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2},\ \ldots\ l^{(x,v)}_{1}\text{-fach berührt,}$$

allgemein die $(i_{x,v}-\mu)$-fachen, $(i_{x,v}-\mu-1)$-fachen, ... 2-fachen Varietäten von $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ (also wieder die $V^{(i_{x,v})}$, $V^{(i_{x,v}-1)}$ .... $V^{(2)}$ und die $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ selbst gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1},\ l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2},\ \ldots\ l^{(x,v)}\text{-fach berührt.}$$

Also: Wenn der eine Schaar 1) repräsentirende R_λ in R_σ gegen S das in D) beschriebene Verhalten besitzt, so schneidet derselbe die sämmtlichen allgemeinsten 1. Ableitungen in

$$L_1)\quad \begin{array}{lllll} l^{(x,0)}_{i_{x,0}-1}, & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-1}, \ldots & l^{(x,v)}_{i_{x,v}-1}, \ldots & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-1} & \text{mit} \\ T^{(0)}_{x^0}, & T^{(1)}_{x^1}, \quad \ldots & T^{(v)}_{x^v}, \quad \ldots & T^{(\nu)}_{x^\nu} & \end{array}$$

$$(x^{(v)} \text{ von 1 bis } \varrho_v;\ v \text{ von 1 bis } \nu)$$

zusammenfallenden Varietäten, schneidet sämmtliche allgemeinsten 2. gemischten Ableitungen von S in

$$L_2)\quad \begin{array}{lllll} l^{(x,0)}_{i_{x,0}-2}, & l^{(x,1)}_{i_{x,1}-2}, \ldots & l^{(x,v)}_{i_{x,v}-2}, \ldots & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-2} & \text{mit} \\ T^{(0)}_{x^0}, & T^{(1)}_{x^1}, \quad \ldots & T^{(v)}_{x^v}, \quad \ldots & T^{(\nu)}_{x^\nu} & \end{array}$$

zusammenfallenden Varietäten und allgemein die sämmtlichen allgemeinsten μ gemischten Ableitungen gerade und genau in

$$L_\mu)\quad \begin{array}{lllll} l^{(x,0)}_{i_{x,0}-\mu}, & l^{(x,1)}_{i_{x,1}-\mu}, \ldots & l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu}, \ldots & l^{(x,\nu)}_{i_{x,\nu}-\mu} & \text{mit} \end{array}$$

denselben

$$T^{(0)}_{x_0},\quad T^{(1)}_{x^1},\quad \ldots\ T^{(v)}_{x^v},\quad \ldots\ T^{(\nu)}_{x^\nu}$$

zusammenfallenden Varietäten.

Die Zahlen aus D) erscheinen also hier wieder, sind aber jetzt aus einem anderen Grunde als invariant zu beurtheilen. Auch sind jetzt die Verticalreihen mit den Horizontalreihen vertauscht. Sie waren für die erste Auffassung nach den T geordnet und sind es jetzt nach den Π.

Digitized by Google

Es sind nun statt der Ableitungen $\overset{\mu}{\Pi}$ ihre Schnittvarietäten mit dem R_λ einzuführen auf Grund folgender Theoreme: Hat R_λ in den $T_x^{(v)}$ das in D) beschriebene Verhalten, so haben die Schnittvarietäten mit allen $\underset{\sigma-1}{\overset{\mu}{\Pi}}$ in $T_x^{(v)}$ gerade und genau

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu} \quad \text{gemeinsame Varietäten.}$$

Findet das letztere statt, so hat R_λ das Verhalten von L_μ gegen die $\underset{\sigma-1}{\overset{\mu}{\Pi}}$. Findet dieses statt, so hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S und gegen die $V^{(i)}$.

Hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S, so haben die Schnittvarietäten der gemischten μ-Ableitungen $\underset{\sigma-1}{\overset{\mu}{\Pi}}$ mit dem R_λ allgemeinst gerade und genau

L_μ) . . . . . (wie oben)

T) mit resp.

$T_{x0}^{(0)}$, $T_{x1}^{(1)}$, ... $T_{xv}^{(v)}$ .... $T_{xr}^{(r)}$

i) zusammenfallende

$i_{x,0}-\mu+1$, $i_{x,1}-\mu+1$, ... $i_{x,v}-\mu+1$, ... $i_{x,r}-\mu+1$-fache Varietäten gemeinsam.

§ 4. Die Subdeterminanten.

Sind $X_y^{(r+1-\mu)}$ die $(r+1-\mu)$-ten Subdeterminanten von S, wo y ein conventioneller Index, $X^{(\mu)}$ die complementäre Subdeterminante, so ist die μ-Ableitung eines Punktes Σ^4 nach S: $\Sigma \pm \Sigma^{4(\mu)}_y X_y^{(r+1-\mu)}$. Also stellen die $(r+1-\mu)$-Subdeterminanten μ-Ableitungen nach S dar. Daher stellen ferner die Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ die Schnitte des R_λ mit gemischten Ableitungen nach S dar und zwar als Gleichungen in $p_1, \cdots p_{\lambda+1}$ genommen und diese Schnitte sind linear unab-

Digitized by Google

hängig und haben also keine höheren gemeinsamen Varietäten und in diesen keine höheren Vielfachheiten und längs diesen keine höheren Contacte als die $\overset{\mu}{\underset{\sigma-1}{\Pi}}$ i. A. Daraus:

Hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S, so haben die durch die μ-Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ dargestellten Varietäten $M_{\lambda-1}$ der Ordnung $r+1-\mu$ in den

	T)	(siehe oben)
gerade und genau	L_μ)	(siehe oben)
zusammenfallende	i)-fache	(siehe oben)

Varietäten gegenseitig gemeinsam.

Haben die sämmtlichen durch die μ-Subdeterminanten von $|\Sigma p_i P_i|$ dargestellten Varietäten $M_{\lambda-1}^{r+1-\mu}$ das gegenseitige eben beschriebene Verhalten, so hat R_λ das in D) beschriebene Verhalten gegen S.

§ 5. Das Aequivalenztheorem.

Nothwendig und hinreichend, damit die Schaar 1) in 2) durch $H(\cdot\cdot)K$ übertragbar sei, wo H, K von $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ unabhängig sind und $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$, ist, dass

1. die Mannigfaltigkeit $|\Sigma p_i P_i| = 0$ in den Variabeln $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ linear überführbar sei in $|\Sigma p_i P'_i| = 0$, dass also ihre Formensysteme in Bezug auf $p_1, \ldots p_{\lambda+1}$ übereinstimmen und aber dass

2. für jede vielfache Varietät $T_x^{(v)}$ dieser Mannigfaltigkeit die durch den gegenseitigen Schnitt aller μ-Subdeterminanten zu bestimmmenden Zahlen

$$L_\mu) \quad l^{(x,0)}_{i_{x,0}-\mu}, \quad l^{(x,1)}_{i_{x,1}-\mu}, \ldots \quad l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu}$$

oder die Differenzen

$$l^{(x,v)}_{i_{x,v}-\mu} - l^{(x,v)}_{i_{x,v}-(\mu-1)} = l^{(x,v)}_{i_{x,v}-(\mu-1)}$$

übereinstimmen.

Digitized by Google

Hier sind dann die $l_1^{(x,v)}, l_2^{(x,v)}, \ldots . l_{i_{x,v}}^{(x,v)}$ die auf $T_x^{(v)}$ bezüglichen **Elementarzahlen.**

Im Weierstrass'schen Falle, also $\lambda = 1$ kann v nur den einen Wert Q annehmen, die $T_x^{(0)}$ sind die vielfachen Wurzeln der $S_{p,q}$ und er nennt $(\varrho - c_x) l_{i_x}$ den meiner Elementarzahl entsprechenden Elementartheiler. Diese Festsetzung hört auf möglich zu sein für $\lambda > 1$. Ich werde den Beweis des Aequivalenztheoremes für $\lambda = 1$ geben, dem er für $\lambda > 1$ nachgebildet werden kann.

Ich behaupte: Sind die Bedingungen des Aequivalenztheoremes befriedigt, so können stets unendlich viele Transformationen Ω des R_σ construirt werden, welche R_1 in R_1' überführen. Ich construire wie folgt: $M_{\sigma-1} = S$ ist ein Monoid, ich projicire es aus einem Punkte seiner $V^{(r)}$, etwa X_{ik}, der zugleich Coordinateneckpunkt sein kann, auf den $R_{\sigma-1}$ herunter, bilde es auf diesen $R_{\sigma-1}$ ab. Wenn eine Collineation Ω des R_σ S invariant lässt und ausserdem das Centrum X_{ik}, so sind sie nach $R_{\sigma-1}$ in eine neue Collineation Ω_1 abgebildet. Ω_1 hat keine andere Bedingung zu erfüllen, als den Schnitt-$X_{\sigma-2}$ des Osculationskegels von S in X_{ik} mit dem $R_{\sigma-1}$ in sich zu transformiren. $X_{\sigma-2}$ ist sogar ein Kegel und es kann eine Collineation von $X_{\sigma-2}$ in sich schon construirt werden, wenn eine Collineation bekannt ist, welche den Schnitt mit einem $R_{\sigma-2(r+1)}$, der also den Scheitelraum nicht mehr trifft, in sich transformirt. Dieser Schnitt hat aber als Gleichung die erste Unterdeterminante X_{ik}' von S, ist also abermals ein Monoid derselben Art.

Bei der ersten Projection, welche ich die erste wesentliche nenne, sind jene T_x von R_1, welche auf S, aber nicht auf $V^{(2)}$ waren, in freie Punkte des $R_{\sigma-1}$ gekommen, auf $X_{\sigma-2}$ bleiben alle übrigen Punkte T. Sie bleiben auch noch weiter auf dem jedesmaligen Schnitte bei den darauf folgenden Zwischenprojectionen, durch welche der Scheitelraum des Kegels erschöpft wird, also bis im $R_{\sigma-(2r+1)}$. Das erhaltene Monoid projicire ich abermals wie das erste; dies ist die 2. wesentliche Projection; bei dieser werden jene Punkte T freie Punkte des

Digitized by Google

$R_{\sigma-(2r+2)}$, welche auf $V^{(2)}$, aber nicht auf $V^{(3)}$ waren und die übrigen bleiben auf dem Osculationsschnitte, bis der Scheitelraum des neuen Kegels erschöpft ist. Bei der 3. wesentlichen Projection werden die T, welche auf $V^{(3)}$, aber nicht auf $V^{(4)}$ waren, freie Punkte u. s. w. Auf $X_y^{(r-1)}$ werden sich also nur jene T befinden, welche auf $V^{(r)}$ waren. Ich setze dieses Projectionsverfahren fort bis herab zu den $X_y^{(r-1)}$ 2. Ordnung und behalte dabei immer im Auge, dass es meine Aufgabe war, eine Collineation zu construiren, welche R_1 in R_1' überführt. Es werden schliesslich im R_3 nebst den $X_y^{(r-1)}$ 2. Ordnung zwei Geraden erhalten, auf welchen je ϱ Punkte $T_1, \ldots T_\varrho$ und $T_1', \ldots T_\varrho'$ gegeben sind, sodass der Wurf der ersten projectiv zum Wurfe der zweiten ist und wenn ein Punkt T der $X_y^{(r-1)} = M_2^2$ zugehört, ist es auch mit T der Fall. Beide Schnittpunkte von R_1 (oder R_1') mit der M_2^2 können nicht von Punkten T herstammen, weil meist die Gerade R_1 (oder R_1') in S enthalten gewesen wäre. Die entscheidende Aufgabe ist nun, eine Collineation des R_3 zu construiren, welche M_2^2 in sich transformirt und die Punktgruppe $T_1, \ldots T_\varrho$ auf R_1 in die projective Punktgruppe $T_1', \ldots T_\varrho'$ auf R_1' überführt. Ueber die Lösbarkeit dieser Aufgabe habe ich kein Wort zu verlieren. — Die einzige Schwierigkeit, die sich hiebei in den R_{r-1}, $R_{(r-1)^2-1}, \ldots R_3$ nach den wesentlichen Projectionen zu bieten scheint, dass nämlich die Schnittpunkte der projicirten R_1, R_1' mit den X-Varietäten, welche nicht von Punkten T herstammen, ebenfalls der Bedingung der Projectivität genügen, ist nicht thatsächlich; denn diese accidentiellen Schnittpunkte sind nicht von den wesentlichen unabhängig.

Ein 2. Beweis ist vollständig enthalten in der **Conclusion** des § 2, wenn dieselbe als streng bewiesen angesehen wird.

Einen 3. Beweis habe ich, wenigstens für ∞^1-Schaaren alternirender Formen in meiner Arbeit aus Cr. J. 1897 geliefert. Derselbe beruht ebenfalls darauf, eine Collineation direct zu construiren. Ich schneide die ∞^{λ}-Systeme mit R_{r-1}, R_{r-1}', setze das Theorem als giltig für diese voraus, construire ein die in R_{r-1}, R_{r-1}' entstehenden Correlationssysteme äqui-

Digitized by Google

valent machendes Collineationspaar, indem, wenn die Bedingungen des Theoremes für den R_r erfüllt sind, sie es nothwendig auch für den Schnitt-R_{r-1} sind, beweise dann, dass in Folge der 1. Bedingung — die 2. braucht kaum mehr erwähnt zu werden — ein Collineationspaar möglich ist, welche zwei Correlationen des Büschels im R_r in zwei Correlationen des Büschels im R'_r, deren Wahl eben möglich ist, überträgt und jenes unter R_{r-1}, R'_{r-1} construirte Collineationspaar enthält. Während im ersten Beweise der Schluss von n auf $n+1$ in der successiven Wahl der Projectionscentra versteckt ist, ist er hier im Schnitte mit R_{r-1} offenbar.

§ 6. Fall, wo die Determinante $|\Sigma p_i P_i|$ identisch verschwindet.

Die obigen Deductionen bleiben streng aufrecht. Der R_λ gehört, wann alle Subdeterminanten $(l+1)\cdot$, aber nicht alle $l\cdot$Ordnung verschwinden, der $V^{(r-l+1)}$ an. Da sicher jeder Punkt von $V^{(r-l+1)}$ in jeden anderen ihrer Punkte transformirt werden kann, so kommt es nur auf die Contacte von R_λ mit den $V^{(r-l+2)}, \ldots V^{(r)}$ an und es sind die obigen Deductionen statt für $V^{(2)} \ldots V^{(r)}$ nur für diese V anzustellen. Daher das Theorem:

Verschwinden alle Subdeterminanten $(l+1)\cdot$ aber nicht alle $l\cdot$Ordnung von $|\Sigma p_i P_i|$ identisch, so ist für die Aequivalenz nothwendig und hinreichend, dass: 1. der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $l\cdot$Ordnung für 1) und 2) derselbe sei und 2. alle darauf folgenden (d. h. für diesen Theiler gebildeten) Zahlen l für beide Schaaren dieselben seien.

Ad notam. Ich kenne für den von Kronecker behandelten Fall $\lambda = 1$ die Tragweite der hiemit ausgesprochenen Behauptung. Sie sagt nichts anderes aus, als dass die Invarianten m_k (die niedrigsten Grade der Relationen unter den 1. Ableitungen) von Kronecker nicht unabhängige Invarianten, sondern an die m_k gebunden sind, obzwar er weder 1868 noch 1874 noch 1890

Digitized by Google

dies erwähnt, sondern sogar einmal die Wendung gebraucht, dass die Anzahl der numerischen Invarianten in den Fällen $S \equiv 0$ dieselbe bleibe wie bei Weierstrass. Ich will versuchen, meine Behauptung direct zu erproben in dem Falle der symmetrischen Formen, weil für diesen eine weitere Aeusserung von Kronecker in einer von C. Segre bei ihm erbetenen und dann in den Atti di Torino Vol. XIX mitgetheilten brieflichen Aufklärung vorliegt.

Der Schnitt mit einem R_{r-1} trifft die R_0-Kegel — ich setze etwa der Einfachheit der Sprache wegen voraus, dass die 1. Subdeterminanten nicht sämmtlich verschwinden — in einer Schaar von M^2_{r-2}, deren invariantiver Character gegen $H(\cdot\cdot)K$ nach dem Weierstrass'schen Theoreme genau in den singulären M^2_{r-2} und deren projectivem Wurfe enthalten ist. Diese sind: 1. R_0-Kegel, deren Spitzen in dem Schnitte mit dem Scheitelorte des Kegelbüschels sind also m und diese sind in dem allen M^2_{r-2} gemeinsamen R_{m-1} enthalten, 2. R_0-Kegel, deren Spitzen Schnitte von R'_{r-1} mit den R_1-Axen des gegebenen Büschels sind. Der grösste gemeinsame Theiler liefert diese $r-2m$ Kegel. Stimmen die beiden Zahlen in $(p_1 P_1 + p_2 P_2)$ und $(p_1 P'_1 + p_2 P'_2)$ überein, so schliessen wir aus der geometrischen Deutung, dass beide Schaaren den Scheitelort je in einem R_m haben und also aus der blossen Uebereinstimmung der Exponenten des grössten gemeinsamen Theilers ist schon zu schliessen, dass, weil gleichzeitig S identisch verschwindet, die M^2_{r-2} einen R_{m-1} gemeinsam haben, woraus dann folgt, dass die übrigen $2m$ Scheitel sich auf R_{m-1} befinden müssen, aber zu zweien coincident in insgesammt m Punkten. Diese m Punkte besitzen im R_{m-1} keine Invariante, ebensowenig die Curve M^m_1 im R_m durch den R_{m-1}, welche nach der geometrischen Deutung existiren muss. Sind die Bedingungen des Theoremes erfüllt, so lässt sich eine lineare Transformation im R_{m-1} finden, welche das M^2_{r-2}-Büschel von $(p_1 P_1 + p_2 P_2)$ in das von $(p_1 P'_1 + p_2 P'_2)$ überführt und also R_{m-1} in R'_{m-1}, daher im R_r eine Transformation, welche die soeben genannte enthält und die Ortscuvre

Digitized by Google

M_1^m des R_m in die Ortscurve $M_1'^m$ des R'_m überführt. Dass dabei auch die Scheitel der Kegel 2. Species in die von R'_r übergeführt werden, folgt aus der Projectivität, kann aber erschlossen werden, wenn man das ganze Büschel aus zwei Kegeln mit den Scheiteln R_0^1, R_0^2 zusammensetzt, wo die Gerade R_0^1, R_0^2 die R_{m-1} in einem Punkte R_0^x trifft, welcher mit den dortigen m Punkten immer noch keine Invariante im R_{m-1} besitzt. Dabei muss ich den Lesern auch des Segre'schen Aufsatzes noch zu bedenken geben, dass die dort behauptete Invariante μ (für ϱ-Species) nicht von dem grössten gemeinsamen Theiler der ϱ-Subdeterminanten unabhängig sein kann.

§ 7. Fall, wo eine Substitutionsdeterminante verschwindet.

Die Ω, welche den $H(\cdot\,\cdot)\,K$ entsprechen, wo ϱ der höhere unter den Rängen von $|H|$, $|K|$ ist, verwandeln den ganzen R_σ in $V^{(\varrho)}$, aber $V^{(\varrho+1)}, \ldots V^{(r)}$ jeder in sich.[1]) Dann lautet das Aequivalenztheorem:

Nothwendig und hinreichend, damit 1) in 2) übergehe, ist, dass jene $l_\mu^{(x)}$ übereinstimmen, wo $\mu \geqq h$, wenn h der grössere unter den beiden Rängen von $|H|$ oder $|K|$ ist.

§ 8. Symmetrische und alternirende Formen.

Die Eigenschaften von S und Ω übertragen sich auf diesen Fall mit geringen Aenderungen, z. B. ist nur eine R_r-Schaar vorhanden. Die Dimension von $V^{(i)}$ ist hier im symmetrischen Falle $[r(r+3) - i(i+1)] : 2$. Die birationale Verwandtschaft besteht auch hier. Wegen des Pfaff'schen Satzes enthält S unendlich viele $R_{(r-1)(r+3):2}$, welche sie längs einer Varietät $M_{(r-1)(r+2):2-1}$ berühren. Diese $\sqrt{S_2}$ besitzt nur vielfache $V^{(2)}, V^{(3)}, \ldots V^{\frac{(r+1)}{2}}$.[2]) Das Aequivalenztheorem spricht sich

---

[1]) Vom Standpunkte der Gruppentheorie enthält die Beibehaltung von $|H| \gtrless 0$, $|K| \gtrless 0$ eine Discontinuität.

[2]) Es entsteht so die bisher nicht aufgeworfene Frage nach anderen linearen Räumen, welche S längs einer einzigen irreductibeln Varietät

Digitized by Google

für ∞^λ-Schaaren ähnlich wie bei Weierstrass aus.[1]) 1896 bis 1897 (Washington).

---

berühren, osculiren, etc., also es soll, wenn man die Elemente einer Determinante als gegen rationale Functionen von λ Parametern ausdrückt, die Determinante eine Potenz einer Function dieser Parameter werden. — Andere besondere Räume für S werden durch die in der Theorie der Thetafunctionen auftretende Determinaute (Nöther, Prym) geliefert.

[1]) Dass lineare Relationen unter den Subdeterminanten m. Ordnung einer symmetrischen Determinante bestehen müssen, sieht man bei der Auffassung des § 3 sehr leicht. Denn man erhält im R_σ Schnitt des $R_{\sigma'}$ (wo $R_{\sigma'}$ der Raum der symmetrischen Formen ist) mit gemischten $(r+1-m)$ten Ableitungen und diese dürfen kein höheres lineares System als das im $R_{\sigma'}$ für die S_1 gebildete zusammensetzen, also bestehen $N_{r_1,m} - N_{r',m} - \frac{1}{2}\binom{r+1}{m}^2 + \binom{r+1}{m}$ lineare Relationen, wo $r' = \frac{r(r+3)}{2}$, $r_1 = (r+1)^2 - 1$ und $N_{r,m}$ die Dimension der gemischten $(r+1-m)$ten Ableitungen nach M_{r-1} im R_r ist.

Aus demselben Grunde scheint es, dass auch unter den Subdeterminanten einer schiefen Determinante lineare Relationen bestehen müssen, ungeachtet der gegentheiligen Behauptung von C. Runge Cr. J. Bd. 93. Auch für die Nöther'sche Determinante wird man lineare Relationen unter den Subdeterminanten finden.

Digitized by Google

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 138. Stiftungstages

am 27. März 1897.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heute stattfindende öffentliche Festsitzung der Akademie der Wissenschaften ist zur Feier ihrer Stiftung, welche am 28. März 1759 erfolgte, angeordnet. Sie dient jährlich dazu, der verstorbenen Mitglieder zu gedenken und den Anwesenden Thatsachen mitzutheilen, welche mit dem Gedeihen der Wissenschaft zusammenhängen. Schliesslich wird unser Mitglied Herr Reichsarchivrath Baumann die angekündigte Festrede halten.

Das mit der Akademie der Wissenschaften verbundene Generalkonservatorium der wissenschaftlichen Staatssammlungen hat im verflossenen Jahre wieder werthvolle Schenkungen erhalten.

Seine Königliche Hoheit Prinz Ludwig haben die offizielle goldene Medaille auf den Tod des Kaisers Alexander III. von Russland und die offiziellen goldenen und silbernen Medaillen auf die Krönung des Kaisers Nicolaus II. und der Kaiserin Alexandra dem k. Münzkabinet mit der Bestimmung zur Aufbewahrung zu übergeben geruht, dass diese Medaillen nach Höchstihrem Ableben in das Eigenthum des Staates übergehen. Diese äusserst werthvolle Schenkung von historisch und theils auch künstlerisch sehr interessanten Medaillen beweist aufs

Digitized by Google

Neue, dass der traditionelle hochherzige Sinn der Wittelsbacher gegenüber dieser von ihnen vor mehr als 300 Jahren gegründeten und stets aufs freigebigste vermehrten Sammlung in unserem Königshause fortlebt.

Herr Otto Günther, Direktor der Liebig-Fleischextrakt-Gesellschaft in Fray Bentos, Uruguay, hat durch eine neue werthvolle Sendung fossiler Säugethierreste sein früheres Geschenk ergänzt. Die paläontologische Staatssammlung ist dadurch in Besitz von zwei Schädeln und nahezu aller wichtigen Skelettheile von Mastodon Humboldti gelangt. Die kostbaren Reste nebst einer Anzahl anderer Knochen von fossilen Säugethieren aus Uruguay bilden jetzt eine Zierde unseres reichen Museums.

Noch bedeutender ist die Schenkung einer grossen Sammlung fossiler Säugethierreste aus den tertiären Ablagerungen von Dakota durch Herrn Kommerzienrath Theodor Stützel dahier. Die berühmten Fundstellen am White River wurden in den letzten Jahren durch mehrere Expeditionen unter der sachkundigen Leitung des Herrn Professor W. B. Scott in Princeton ausgebeutet. Die Ausgrabungen lieferten eine grossartige Sammlung, von welcher ein Theil im Museum von Princeton verbleibt, während der übrige Theil dem hiesigen paläontologischen Museum angeboten wurde. Herr Theodor Stützel, welcher sich seit einer Reihe von Jahren in lebhaftester Weise für unsere wissenschaftlichen Staatssammlungen interessirt und sich namentlich um die prähistorische Sammlung verdient gemacht hat, entschloss sich, die genannte Sammlung zu erwerben und dem paläontologischen Museum zu schenken. — Sie enthält die meisten der aus den White River-Ablagerungen bekannten Gattungen und Arten in prachtvoller Vertretung, namentlich vollständige Skelette von Titanotherium und Oreodon und circa 30 Schädel und sonstige Skelettheile verschiedener Gattungen. Nachdem das hiesige paläontologische Museum im vorigen Jahre durch Herrn Professor Henry Fairfield Osborn eine fast vollzählige Serie der ältesten tertiären Säugethiere aus den sogenannten Puerco-Schichten in Neu-Mexiko erhalten

Digitized by Google

hat, dürfte in Folge der überaus werthvollen Schenkung des Herrn Kommerzienrath Stützel kein europäisches Museum eine gleich vollständige Vertretung der nordamerikanischen Säugethierfauna aufzuweisen haben.

Der Münchener Bürgerstiftung ist unser Mitglied Herr Professor Dr. Königs mit einem namhaften Betrage beigetreten.

Zum ersten Male kommen in diesem Jahre Mittel aus der Münchener Bürgerstiftung für wissenschaftliche Arbeiten zur Verwendung. Die im Statut der Stiftung vorgeschriebene Kommission hat für zwei wissenschaftliche Untersuchungen Mittel bewilliget, für eine, welche unser Mitglied Herr Ferdinand Lindemann, Professor der Mathematik, und für eine, welche Herr Hans Buchner, Professor der Hygiene und Vorstand des hygienischen Institutes dahier, ausführen wird.

Archäologische Funde haben von jeher das Interesse aller Gebildeten erregt, weil sie für jeden Denkenden sprechende und greifbare Wahrzeichen längst dahingegangener Zeiten und menschlicher Kulturperioden sind. Unter vielem Anderen hat man auch Formstücke aus Stein und Erz, Polyeder, insbesondere Dodekaeder gefunden, deren Herstellung man bisher den alten Griechen um das fünfte Jahrhundert vor Christus zuschrieb. Nun ist aber Herr Lindemann auf ein Dodekaeder aufmerksam geworden, dessen Provenienz schliessen lässt, dass sein Entstehen weit über die genannte Zeit der Griechen zurückreicht. Es gelang Lindemann, das fragliche Stück mit anderen, meist aus Gallien stammenden, augenscheinlich jüngeren Dodekaedern in Verbindung zu bringen, deren Beschreibung und Abbildung in archäologischen Werken und Zeitschriften vorliegen. Diese Polyeder trugen wahrscheinlich auf ihren Seitenflächen Zeichen aus roh gebildeten Strichen, wie sie auf jenem zuerst erwähnten Exemplare noch erhalten sind. Diese Zeichen liessen sich durch Vergleichung mit entsprechenden Zeichen auf gleich alten Steingewichten als ägyptische bez. babylonische Zahlzeichen erkennen.

Die in verschiedenen Museen aufbewahrten Polyeder müssen nun auch mit mathematischen Augen angesehen werden, und es müssen analoge Marken, welche sich auf vielen Gegenständen

Digitized by Google

der Bronze- und Hallstadt-Zeit finden, genauer untersucht werden. Abbildungen, wie sie für archäologische Zwecke hergestellt sind, genügen für diesen Zweck kaum, da es auf jeden Strich und auf die genaue Richtung ankommt, in welcher der Strich geführt ist. Ueberdies erscheint es wahrscheinlich, dass in den Museen noch manches hier in Betracht kommende Fundstück aufbewahrt wird, das bisher noch keine Beachtung fand.

Man begreift leicht die Wichtigkeit dieser Untersuchungen nicht nur für die Geschichte der Mathematik, indem Entdeckungen und Lehrsätze, welche bisher den alten Griechen, z. B. Pythagoras zugeschrieben wurden, vermuthlich einer weit älteren Geschichtsperiode angehören, sondern auch für die Klärung der bisher noch mangelhaften Kenntniss der Zahlzeichen der ältesten Kulturvölker und hiemit auch des Verkehrs dieser Völker untereinander.

Herr Lindemann wird nun behufs Vollendung seiner Untersuchungen auswärtige Museen, namentlich oberitalienische besuchen.

Die Untersuchungen, welche Herr Hans Buchner mit Hilfe der Münchener Bürgerstiftung ausführen wird, beziehen sich wesentlich auf die sogenannte Selbstreinigung der Flüsse. Der Gegenstand ist zunächst vom hygienischen Standpunkte aus interessant und von grosser Wichtigkeit und hat ausserdem noch ein ganz besonderes Interesse für uns Münchener.

Sie alle erinnern sich wohl, mit welcher Heftigkeit vor wenigen Jahren noch gestritten wurde, ob man das Abwasser der Münchener Siele, der Kanäle in die Isar leiten darf, ohne befürchten zu müssen, die isarabwärts gelegenen Städte Freising, Moosburg und Landshut zu schädigen. Ich sprach mich bekanntlich sehr entschieden für das Schwemmsystem aus, behauptend, dass Krankheitskeime in München der Isar übergeben nicht einmal bis Freising, noch viel weniger bis Landshut gelangen könnten. Ich wagte diese Behauptung auf Grund genauer, jahrelang fortgesetzter epidemiologischer und chemischer Untersuchungen, von mir und meinen Schülern ausgeführt. Allerdings die Frage, wie und wodurch der viele Unrath aus

Digitized by Google

München in der rasch strömenden Isar so rasch verschwindet, konnte ich nicht bestimmt beantworten: ich konnte nur behaupten, dass sich in Freising und Landshut davon nichts mehr findet, ähnlich wie dieser Unrath nicht der Gesundheit schadet und rasch verschwindet, wenn er auf Getreidefelder, auf Wiesen oder in Gemüsegärten gebracht wird.

Die Staatsregierung hat dann bekanntlich angeordnet, dass während einer längeren Zeit das Isarwasser oberhalb und unmittelbar unterhalb München, dann auch in Freising und Landshut zu verschiedenen Zeiten, bei Hoch- und bei Niederwasser untersucht werden soll.

Die heftigste Opposition gegen das Schwemmsystem von München ging bekanntlich von Landshut aus. Um ja recht unparteiisch zu sein, wurde die Untersuchung des Isarwassers in Landshut vom Ministerium dem dortigen Stadtchemiker Herrn Dr. Willemer übertragen, der auch bakteriologische Kenntnisse hatte. Die Untersuchungen wurden bis jetzt fortgesetzt, aber auch während des Jahres 1896 konnte in Landshut keine Verunreinigung der Isar durch das in München bereits bestehende Schwemmsystem nachgewiesen werden. Die Gemüther in Landshut scheinen sich jetzt auch ganz beruhiget zu haben, denn der Magistrat Landshut hat beschlossen, seine Stadt nach Münchener Muster zu kanalisiren und auch abzuschwemmen und die Arbeit Herrn Oberingenieur Niedermayer übertragen, welcher die Kanalisation in München durchführt.

Diese Selbstreinigung der Flüsse wurde übrigens in neuester Zeit auch anderwärts als Thatsache konstatirt, z. B. an der Limmat in Zürich, am Rhein bei Köln, an der Oder bei Breslau u. s. w.

Das entbindet aber die Wissenschaft doch nicht von der Pflicht, nun genauer zu ergründen, was bei der thatsächlichen Selbstreinigung der Flüsse eine Rolle spielt. Einiges wurde bereits von Botanikern, Bakteriologen, Pflanzenphysiologen gefunden. Solche wissenschaftliche Befunde haben schliesslich für die Praxis dann oft wieder einen grossen praktischen

Digitized by Google

Nutzen, wie ihn z. B. die wissenschaftlichen Studien über die Natur der Hefe für die Bierbrauerei gehabt haben.

Professor Hans Buchner hat sehr schlagende Experimente über den Einfluss des Sonnenlichtes auf pathogene Bakterien ausgeführt. Wenn man Agargallerte mit Cholera- oder Typhusbazillen infizirt in grosse Uhrgläser giesst und diese dann in den Brutapparat bringt, der eine Temperatur von 30 bis 35° C. hat, so entwickeln und vermehren sich die Keime so üppig, dass sich in der anfangs ganz klar scheinenden Gallerte durch zahllose kleinste Bakterienhäufchen eine Trübung bildet, welche noch deutlicher hervortritt, wenn man eine Farblösung (Anilinfarben) darüber giesst, die Lösung wieder ausgiesst und die Schaale auswäscht. Die Bakterienhäufchen binden den Farbstoff, färben sich roth oder blau und treten dadurch noch deutlicher hervor.

Wenn man aber diese mit Agargallerte gefüllten und mit Bakterienkeimen besäten Glasschaalen, ehe man sie in den Brutapparat bringt, dem Sonnenlichte aussetzt, dann entwickelt sich im Brutapparat keine Spur von solchen Bakterienhäufchen mehr, bleibt die Schaale ganz klar, nimmt auch keine Farbe mehr an, weil den Farbstoff ja nur die Bakterien und nicht die Gallerte oder das Glas binden und festhalten.

Das ist gewiss ein sicheres Zeichen, dass das Sonnenlicht vorher alle Keime getödtet hat.

Diese Thatsache springt noch viel augenscheinlicher hervor, wenn man die Kehrseite solcher Gallertschaalen theilweise mit für das Licht undurchdringlichen Stoffen, z. B. mit ausgeschnittenen Buchstaben belegt, und die Schaalen dann erst dem Sonnenlichte aussetzt. Wenn nun das Sonnenlicht auf die Schaale fällt, so werden die unter den Buchstaben liegenden Theile der infizirten Gallerte nicht getroffen. Bringt man nun solche von der Sonne beschienene Schaalen in den Brutapparat, so wachsen Mikroorganismenhäufchen nur an den beschattet gebliebenen, von der Sonne nicht getroffenen Stellen, und diese Stellen haben natürlich die Form der aufgeklebten Buchstaben und können dann auch gefärbt werden.

Digitized by Google

Die Buchstaben, welche Sie hier auf diesen Schaalen sehen, sind sozusagen mit Bakterien geschrieben oder gedruckt, hier das ganze Wort Typhus mit Typhusbazillen.

Man hat nun weiter gefunden, dass Sonnenlicht nicht nur auf solche Mikroorganismen zerstörend wirkt, sondern auch auf andere organische Stoffe. Der französische Chemiker Duclaux hat schon vor Jahren nachgewiesen, dass z. B. Oxalsäure in Wasser gelöst dem Sonnenlichte ausgesetzt zu Kohlensäure wird. Hans Buchner findet, dass das Sonnenlicht auch noch auf andere organische, im Wasser gelöste oder suspendirte Stoffe wirkt, und will diese Versuche weiter verfolgen, wozu Reisen an verschiedene Gewässer, Experimente in Gegenden von verschiedener Höhenlage nothwendig sind. Die Sonnenstrahlen wirken nämlich verschieden kräftiger oder schwächer, je nachdem sie mehr oder weniger Luftschichten zu durchdringen haben, wie jeder Bergsteiger weiss, wenn er mit oder ohne Schleier über einen Gletscher geht.

Es ist ja auch auffallend, dass z. B. die Lungenschwindsucht, die Tuberkulose, in gewissen Höhen nicht mehr vorkommt, was allerdings kaum mit der Besonnung, sondern auf andere Art zu erklären ist.

Herr Professor Hans Buchner wird nun untersuchen in wie weit die Sonnenstrahlung bei der thatsächlichen Selbstreinigung der Flüsse betheiliget ist.

Aus den Zinsen der hochherzigen Cramer-Klettstiftung, welche gegen Ende des vergangenen Jahres der Akademie zu Theil wurde, konnte noch nichts vergeben werden, da die Zinsen erst im Laufe dieses Jahres anfallen.

Digitized by Google

Darauf theilte der Classensekretär, Herr C. v. Voit, die vielen und schweren Verluste mit, welche die mathematisch-physikalische Classe in dem vergangenen Jahre erlitten hat. Es sind ihr durch den Tod entrissen worden: zwei einheimische ordentliche Mitglieder, der Mathematiker Philipp Ludwig v. Seidel und der Anatom Nikolaus Rüdinger, ferner elf auswärtige Mitglieder: der Mathematiker Carl Weierstrass in Berlin, der Astronom Hugo Gyldén in Stockholm, die Chemiker August Rekulé in Bonn und Georg Harley in London, der Physiologe Emil Du Bois-Reymond in Berlin, der Anatom Joseph von Gerlach in Erlangen, der Botaniker Ferdinand v. Müller in Melbourne und die Mineralogen und Geologen Gustav Adolf Kenngott in Zürich, Heinrich Ernst Beyrich in Berlin und Gabriel August Daubrée in Paris, endlich der Afrikaforscher Gerhard Rohlfs in Godesberg.

Dem Mathematiker Philipp Ludwig v. Seidel wird sein Nachfolger im Amte Herr Ferdinand Lindemann eine besondere Denkrede widmen.

Nikolaus Rüdinger.

Am 25. August 1896 starb unerwartet nach kurzer Krankheit in Tutzing am Starnbergersee, wo er bei Beginn der Herbstferien Erholung von den Anstrengungen des Berufes suchte, der Professor der descriptiven Anatomie an der hiesigen Universität Nikolaus Rüdinger. Eine zahlreiche Trauerversammlung umstand das Grab des in weiten Kreisen unserer Stadt bekannten und beliebten Mannes; namentlich in den wissenschaftlichen und ärztlichen Kreisen hat man seinen Tod tief bedauert, denn er hätte nach menschlichem Ermessen noch längere Zeit der Wissenschaft und dem Lehramt zu dienen vermocht. Er war einer der genauesten Kenner der Formen des menschlichen Körpers und es ist ihm gelungen die descriptive Anatomie, welche man gewöhnlich als eine abgeschlossene Wissenschaft anzusehen geneigt ist, mit neuen Erkenntnissen zu bereichern, insbesondere war er auch ein unermüdlicher,

Digitized by Google

pflichtgetreuer Lehrer, wodurch er an unserer Universität eine höchst erspriessliche Wirksamkeit entfaltete.

Es war Rüdinger nicht beschieden, sich in der gewöhnlichen Weise die Vorbildung zu den höheren Studien und zum gelehrten Berufe, welche Tausende ohne besondere Mühe sich aneignen, zu erwerben; es ist ihm dieselbe vielmehr ganz ungemein schwer gemacht worden. Der regelmässige Unterricht im Gymnasium ist ja gewiss für die Mehrzahl der beste Weg, sich die Erziehung des Geistes für das Leben zu verschaffen, es ist jedoch nicht der einzige Weg zur Bildung. Einzelne besonders kraftvolle Naturen erreichen in der Wissenschaft das gleiche Ziel auf ganz anderen Pfaden und es ist für die Pädagogik stets sehr lehrreich, die Entwicklung solcher Männer zu verfolgen.

Nicht selten sieht der Glücklichere auf denjenigen, der sich mühsam emporringt, als auf einen nicht ganz gleichstehenden und nur halb gebildeten herab; aber ist es denn nicht ein ungleich grösseres Verdienst und besonders hoch zu schätzen, wenn ein Jüngling in unstillbarem Wissenstriebe sich selbst die Kenntnisse erwirbt, als wenn Andere zum Theil mit Noth durch die Schulen kommen und man später öfter nicht begreift, wie so wenig Begabte und so wenig im Denken Geübte als reif haben bezeichnet werden können.

Ein klassisches Beispiel solcher Selbsterziehung ist das eines der grössten Naturforscher, von Faraday. Eines armen Schmiedes Sohn hatte er nur einen dürftigen Elementarunterricht in der Volksschule eines kleinen Dorfes bei London erhalten, als 13jähriger Knabe Zeitungen durch die Strassen Londons getragen und als Lehrling und Gehilfe bei einem Buchbinder zugebracht, wo er aus den Büchern, welche er heftete, seinen Hunger nach Kenntnissen stillte. Ein chemisches Werk fesselte ihn der Art, dass er die Vorlesung des bedeutendsten englischen Chemikers seiner Zeit, von Sir Humphrey Davy, besuchte, das Gehörte niederschrieb und Davy mit der flehentlichen Bitte übersandte, ihn aus den Fesseln des Handwerks zu erlösen. Er wurde darauf hin Hilfspräparator

Digitized by Google

in Davy's Laboratorium, auch sein Kammerdiener auf Reisen. Aber der Diener, der dem Meister bei seinen wissenschaftlichen Versuchen Handlangerdienste thut, lauscht diesem sein Wissen ab, begreift den Sinn und den Zusammenhang der Erscheinungen und steht in wenigen Jahren gleich begabt und gleich an Kenntnissen und Ruhm da. Er ist der erste Experimentator vielleicht aller Zeiten geworden und ein Lehrer und Gelehrter, der die Wissenschaft mit den reichsten Gaben beschenkt hat. Von seltener Bescheidenheit fand er seine Genugthuung in dem Bewusstsein das Wissen vermehrt zu haben und lehnte darum alle Ehren, welche ihm das dankbare Vaterland erweisen wollte, ab. Wer aber wird einen Stein auf ihn werfen, weil er keine Schulen durchgemacht hat, und wer wird ihn nicht wegen seines Strebens nach Höherem bewundern?

Rüdinger wurde im Jahre 1832 in dem Dorfe Erbes-Büdesheim bei Alzey in Rheinhessen geboren. Er war das jüngste von 12 Kindern wenig bemittelter Landleute; der Vater starb früh und hinterliess die zahlreiche Familie in recht dürftigen Verhältnissen, so dass es der Mutter nicht möglich war, den Knaben in die Schule zu schicken. Aber es nahm sich seiner der menschenfreundliche katholische Pfarrer des Dorfes, Namens Böhm, väterlich an, indem er ihn, allerdings mit dem Wunsche, ihn dem geistlichen Stande zuzuführen, in den Anfangsgründen der lateinischen und griechischen Sprache unterrichtete. Der lebhafte Knabe fand jedoch mehr Freude an einer praktischen, ihn rascher fördernden Thätigkeit, als an den Regeln der Grammatik und so gieng er, noch nicht 15 Jahre alt, zu einem Bader in Alzey in die Lehre. Nachdem er fast vier Jahre lang dieses Geschäft betrieben hatte, genügte ihm dasselbe nicht mehr, er wollte weiter kommen und zum Mindesten die Prüfung als Wundarzt bestehen. Er begab sich zu diesem Zwecke an die Universität Heidelberg, woselbst damals Bader, welche die Prüfung als Chirurgen machen wollten, auf besonderen Bänken an den anatomischen und chirurgischen Vorlesungen Theil nehmen durften. Besonders waren es die Anatomen Arnold und Henle, welche

Digitized by Google

durch die klare und geistvolle Darstellung der Formen des menschlichen Körpers sein höchstes Interesse erweckten, so dass in ihm der lebhafte Wunsch rege wurde, sich noch weiter in der Medizin auszubilden. Durch den Tod seiner Mutter fiel ihm zu dieser Zeit ein kleines Erbe zu, mit dem er in Heidelberg während vier Jahren sämmtliche medizinische Vorlesungen, allerdings unter vielen Entbehrungen, hörte. Nun begab er sich (im Herbst 1854) nach der Landesuniversität Giessen, um sich der Prüfung als Wundarzt zu unterziehen. Da erhielt sein Leben eine für seine weitere Entwicklung entscheidende glückliche Wendung, ohne die er vielleicht ein Wundarzt geworden und geblieben wäre. Bei der Ablegung des anatomischen Theiles dieser Prüfung wurde er nämlich mit dem berühmten Anatomen und Physiologen Theodor Bischoff, diesem Meister in der Präparirkunst, bekannt; die grosse Fertigkeit des jungen Mannes sowie seine Strebsamkeit sich weiter zu bilden, fielen ihm auf, und als er im Frühjahr 1855 dem Rufe als Professor der Anatomie und Physiologie an die hiesige Universität folgte, nahm er Rüdinger, nachdem dieser die wundärztliche Prüfung abgebrochen hatte und vorher ohne Dissertation zum Doctor medicinae extraneus in Giessen promovirt worden war, als Prosektor mit.

In München bot sich dem jungen Prosector ein reiches Feld für seine Thätigkeit und für die Ausnützung seines Talentes; es schienen auch für ihn die grössten Schwierigkeiten in dem Kampfe um's Dasein überwunden zu sein.

Das Eintreten Bischoff's, dieses unübertrefflichen Lehrers und energischen Organisators, war für unsere medizinische Fakultät von der grössten Bedeutung und ihm gebührt ein grosser Antheil an dem jetzigen Aufschwunge derselben. Die anatomische Anstalt befand sich noch in dem Zustande wie sie Ignaz Döllinger bei seiner Pensionirung verlassen hatte; die Sammlung war ganz ungenügend und veraltet; von wissenschaftlicher Thätigkeit in der Anstalt war nichts zu bemerken und die medizinische Fakultät überhaupt ausser jeder Verbindung mit der an anderen Universitäten so regen Entwicklung

Digitized by Google

in der wissenschaftlichen Medizin; um in ein Mikroscop blicken zu können, mussten die strebsameren Mediziner sich an den Privatgelehrten Hessling oder an den Prosektor Thiersch wenden, die ihnen Sonntags ihre Zeit widmeten. In diese Dürre brachte Bischoff neues Leben; durch seine etwas gewaltsame Art das Uebel zu beseitigen, hat er zwar anfangs vielfach Anstoss erregt, aber es gieng nicht anders und gereichte der Sache nur zum Vortheil.

In der Herstellung einer musterhaften anatomischen Sammlung, welche lange Zeit als eine der besten und schönsten dastand, sowie bei der anstrengenden Arbeit im Präparirsaale war ihm Rüdinger, in dem Gefühle der Dankbarkeit, ein nie erlahmender, aufopferungsvoller Helfer. In wenigen Jahren war die anatomische Anstalt neu gestaltet, namentlich durch das wahrhaft künstlerische Talent des Prosektors, die Präparate äusserst schön und in hohem Grade anschaulich und wirkungsvoll, das Wesentliche heraushebend, darzustellen. Bischoff, welcher grosse Ansprüche machte, aber gütig war, wenn man seine Pflicht erfüllte, that hinwiederum Alles, um den ihm unentbehrlich gewordenen zu fördern; er war und blieb der Ueberzeugung, dass Rüdinger diese Förderung verdiene, und man muss sagen, dass er schliesslich Recht behalten hat.

Rüdinger hätte sich ja wohl seiner Ausbildung nach mit der erreichten Stelle eines Prosektors begnügen können, aber er hatte sich schon ein weiteres Ziel gesteckt. Er begann wissenschaftlich zu arbeiten; es erschien (1857) eine erste Schrift „über die Gelenknerven des menschlichen Körpers", sowie eine kleine Abhandlung: „ein Beitrag zur Mechanik der Aorten- und Herzklappen", mit welcher er in einen zwischen dem Anatomen Hyrtl und dem Physiologen Brücke heftig geführten Streit über den Verschluss der Herzarterien bei der Zusammenziehung der linken Herzkammer eingriff. Auf Grund dieser wissenschaftlichen Thätigkeit glaubte er seine Befähigung zur akademischen Laufbahn dokumentirt zu haben und stellte er das Gesuch ihn, mit Dispens von einem Gymnasialabsolutorium und den medizinischen Prüfungen, zur Habili-

Digitized by Google

tation als Privatdozent zuzulassen. Das Gesuch wurde von dem Senat und dem Ministerium abgewiesen. Dieser damalige Entscheid war ein vollkommen correkter und heute noch würde er ebenso ausfallen müssen.

Rüdinger liess sich dadurch nicht abschrecken; mit bewundernswerther Energie suchte er das, was er sich vorgesetzt hatte, zu erreichen, indem er in seiner Bildung das nachholte, was ihm durch die Ungunst der Verhältnisse früher zu erlernen nicht möglich war. Nachdem er den Tag über seinen anstrengenden Arbeiten in der Anatomie nachgekommen war, nahm er in den Abendstunden im Alter von 26 Jahren Privatunterricht in den Lehrgegenständen des humanistischen Gymnasiums; zuletzt gewährte ihm Bischoff Urlaub von den zeitraubendsten Geschäften in der Anatomie und so konnte er schon im Herbste des Jahres 1858 an dem Gymnasium zu Darmstadt mit gutem Erfolge die Maturitätsprüfung bestehen. Dieser Erfolg bewog ihn, abermals die Bitte zu stellen, sich als Privatdozent an der Universität habilitiren zu dürfen oder wenigstens zu dem damaligen Staatskonkurs an der Universität Erlangen zugelassen zu werden. Aber auch dieses Gesuch konnte nicht gewährt werden, da man dazu die Admissionsprüfung und die Fakultätsprüfung nöthig hatte.

Nach dem Erscheinen seines ausgezeichneten Atlasses des peripherischen Nervensystems des menschlichen Körpers wurde er (1863) mit pragmatischen Rechten zum Adjunkten an der anatomischen Anstalt, welche zu den Sammlungen des Generalconservatoriums gehört, ernannt; der damalige Generalconservator J. v. Liebig hatte die Ernennung auf das Wärmste befürwortet. Mit dieser Stelle war die Erlaubniss an der Anstalt Vorlesungen zu halten verbunden; diese benützend gab er Repetitorien und Curse mit Erfolg. Nun glaubte er, da er sich als akademischer Lehrer und in der Wissenschaft bewährt, sich voll berechtiget abermals unter Dispens um die Venia legendi, unter Vorlage einer Abhandlung über die Verbreitung des Sympathicus in der animalen Röhre, dem Rückenmark und Gehirn, nachsuchen zu dürfen. Die medizinische Fakultät be-

Digitized by Google

fürwortete die Genehmigung des Gesuches; Rüdinger hatte so manche seiner früheren Gegner durch seine Tüchtigkeit und seltene Ausdauer besiegt und für sich eingenommen, aber Senat und Ministerium giengen, sowie auch auf eine vierte Eingabe, nicht ein und behielten ihren früheren Standpunkt bei.

Damals schien es, als ob für Rüdinger die akademische Laufbahn für immer verschlossen bleiben sollte; aber hier stellte sich wiederum die mächtige Hilfe des Generalconservators Liebig ein, der mit Ueberschreitung seiner Befugnisse bei dem Ministerium beantragte, den Prosektor und Adjunkten Rüdinger zum ausserordentlichen Professor an der Universität zu ernennen. Der Minister wollte den Titel eines Honorar-Professors gewähren, wenn die Fakultät und der Senat ihre Zustimmung aussprächen. Nachdem im Senate Pettenkofer, auf den namentlich die Nachholung des Gymnasialabsolutoriums grossen Eindruck gemacht hatte, für Rüdinger gesprochen und dadurch auch in dieser Körperschaft ein günstiges Votum erlangt worden war, erfolgte (1868) die Ernennung zum Honorarprofessor und 1½ Jahre später die zum ausserordentlichen Professor.

Damit war endlich das ersehnte Ziel durch eigene Kraft unter den grössten Anstrengungen erreicht und die Widerstände siegreich überwunden. Rüdinger hat wohl anfangs manche Fehler gemacht und durch sein etwas zu grosses Selbstbewusstsein Anstoss erregt. Jedoch verstummten nach und nach auch diese Vorwürfe und wichen der Achtung Aller.

Als Bischoff (1878) wegen Kränklichkeit von seinem Lehramte zurücktrat und C. Kupffer aus Königsberg an seine Stelle berufen wurde, erfolgte zwischen ihm und Rüdinger, welchem in der Zwischenzeit die Abhaltung der Vorlesungen über descriptive Anatomie und der Präparirübungen übertragen worden war, die Theilung der Lehraufgabe in der Art, dass Ersterer die Histologie und Entwicklungsgeschichte, Letzterer die descriptive Anatomie erhielt. Diese Theilung der Arbeit, welche ein einziger Vertreter des Faches bei der grossen Anzahl von Medizinern nicht hätte bewältigen können, hat sich

Digitized by Google

als durchaus richtig und als eine für die medizinische Fakultät besonders glückliche erwiesen, aber es bedurfte dazu auch eines Mannes wie Kupffer, welcher ausschliesslich die Sache im Auge hatte. Rüdinger wurde dann zum ordentlichen Professor der descriptiven Anatomie und zum zweiten Conservator der anatomischen Anstalt befördert; auch die Akademie nahm ihn auf den Vorschlag Kupffer's wegen seiner Verdienste um die Wissenschaft in die Reihen ihrer Mitglieder auf.

Bei seinen wissenschaftlichen Arbeiten stellte sich Rüdinger zwar keine grossen, allgemein wichtigen Probleme, ja er bewegte sich im Wesentlichen auf dem Gebiete der schon so vielfach ausgebeuteten descriptiven Anatomie, während die Mehrzahl der jüngeren Anatomen sich der zur Zeit ungleich fruchtbareren Histologie und Embryologie zuwandten. Es hieng dies zusammen mit seiner Aufgabe als Prosektor und der anfänglichen ausschliesslichen Ausbildung in der descriptiven Anatomie; in späterer Zeit benützte er jedoch in einzelnen Fällen das Mikroscop zur Untersuchung der feineren Struktur der Theile, und auch der Entwicklungsgeschichte blieb er nicht ganz fremd. Sein Hauptverdienst lag aber in der ersteren Richtung, in der er eine fruchtbare Thätigkeit entfaltete.

Sein erstes grösseres, sehr verdienstvolles Werk, mit welchem er alsbald seinen Ruf als Anatom begründete, war der schon erwähnte grosse Atlas des peripherischen Nervensystems des menschlichen Körpers, welcher von 1861—1867 erschien und zwei Auflagen erlebte. Nach den von ihm meisterhaft ausgeführten und wahrhaft künstlerisch aufgestellten Präparaten geschah die naturgetreue Wiedergabe zum ersten Male auf photographischem Wege durch den so ausserordentlich geschickten Photographen Josef Albert; dieses in Fachkreisen grosses Aufsehen machende, bisher nicht übertroffene Werk wird noch lange Zeit seine Bedeutung behalten.

Daran reihte sich die pro venia legendi eingereichte, höchst anerkennenswerthe, von den Anatomen Hyrtl und Henle günstig beurtheilte Schrift „über die Verbreitung des Sym-

Digitized by Google

pathicus in der animalen Röhre, dem Rückenmark und Gehirn" unmittelbar an, wozu er diesen Nerven mit gewohntem Geschick und Fleiss präparirt hatte. Die von Luschka zuerst beschriebenen zurücklaufenden Nerven der Hüllen des Wirbelkanals wurden dabei genauer untersucht und dargethan, dass sie aus spinalen und sympathischen Fasern bestehen.

Lange Zeit hindurch beschäftigte sich Rüdinger mit der Anatomie des Gehörorganes, worüber 13 werthvolle Abhandlungen von ihm vorliegen. Es reizte ihn, den Meister der Präparirkunst, dieses ungemein schwierige Objekt makroscopisch-anatomischer Darstellung, wo auf kleinem Raum, mitten im harten Knochen, die zartesten Gebilde liegen, zu bearbeiten und zu bewältigen. Er untersuchte das häutige Labyrinth, dessen Epithelüberzug und Nerven, die Gelenke der Gehörknöchelchen, die Ohrtrompete, die Entwicklung der häutigen Bogengänge, die Gefässkanäle des Felsenbeins etc. etc. auf das Genaueste. Von besonderem Werthe ist die Beschreibung der für die Fortpflanzung der Schallwellen so wichtigen, eigenthümlichen Gelenke der Gehörknöchelchen, der Zwischenscheibe im Hammer-Ambosgelenk, des die Platte des Steigbügels in ihrer Lage haltenden Muskels und des Baues des diese Platte mit dem ovalen Fenster ringsum verbindenden Bandes. Ferner sind von Werth die Aufschlüsse über die Sicherheitsröhre der Trommelhöhle, die nach der Rachenhöhle führende Ohrtrompete, deren Lumen in ihrem oberen Theile durch zwei Längsfalten stets klaffend erhalten werde, während der untere Theil nur beim Schlingen sich öffne; zu diesem Zwecke heftet sich eine von ihm als Erweiterer der Ohrtrompete bezeichnete Portion des Spannmuskels des weichen Gaumens an den Hacken der Ohrtrompete an.

Eine von der Akademie der Wissenschaften zu Harlem gestellte vergleichend-anatomische Preisaufgabe über die Muskeln der vorderen Extremitäten der Reptilien und Vögel mit besonderer Rücksicht auf die homologen und analogen Muskeln der Säugethiere und des Menschen bearbeitete er und erhielt

Digitized by Google

durch die ausserordentlich geschickte Präparation und treffliche Darstellung dieser Muskeln den Preis.

Von 1873—1878 erschien von ihm ein wichtiges Werk: seine topographisch-chirurgische Anatomie des Menschen, welche namentlich von Seiten der Chirurgen gut aufgenommen und beurtheilt wurde. Der Text des Buches ist, soweit er die praktische Anwendung behandelt, durch die Fortschritte der Wissenschaft zwar vielfach überholt, aber die beigegebenen Abbildungen von Schnittflächen werden bleibenden Werth behalten. Rüdinger hat zu diesem Zwecke dünne, fortlaufende Sägeschnitte durch Kopf, Rumpf und Extremitäten an gefrorenen Leichen nach der von dem Chirurgen Nicolaus Pirogoff angegebenen Methode gemacht; indem er diese Schnitte in gefrorenem Zustande in Weingeist übertrug, konnte er dieselben unverändert erhalten.

Vielfach hat er sich mit der Untersuchung des Gehirns, vor Allem der Grosshirnoberfläche, beschäftiget, wozu er durch die von Bischoff begonnenen Wägungen der Gehirne der Thiere und des Menschen, welche er fortsetzte, angeregt worden war. Wenn man auch den Werth solcher Wägungen des Gehirnes jetzt anders beurtheilt als früher und erkannt hat, dass man aus einem so groben Verhalten nicht im Stande ist auf die geistigen Fähigkeiten und die geistige Ausbildung einen sicheren Schluss zu ziehen, so sind solche Arbeiten doch für die erste Orientirung von Bedeutung gewesen. Es kommt bei diesem complizirtesten Getriebe eben noch auf vieles andere an als auf die Masse, denn es kann der einfachste Mann des Volkes ein ebenso schweres, ja ein schwereres Gehirn besitzen als der grösste Genius; die Masse des übrigen Körpers, welcher im Gehirn vertreten sein muss, bestimmt zum guten Theil auch die Masse des Gehirns. Er studirte ferner den Einfluss der Race, des Alters, des Geschlechtes auf die Ausbildung der Windungen und Furchen der Grosshirnoberfläche; um den Einfluss des Geschlechtes zu erkennen, kam er auf den glücklichen Gedanken, die Unterschiede an den Gehirnen von Zwillingen verschiedenen Geschlechtes zu prüfen, wobei sich in der That

Digitized by Google

herausstellte, dass beim männlichen Geschlechte schon beim Neugeborenen das Stirnhirn relativ grösser ist als beim weiblichen Geschlechte; auch zeigte es sich, dass, wie der Gynäkologe Hecker zuerst bemerkt hatte, die Kurz- und Langköpfigkeit schon beim Neugeborenen ausgeprägt ist.

Man hat in den meisten Fällen der sogenannten Aphasie, wo bekanntlich die Leute zwar wissen, was sie sagen wollen, die Worte dazu aber nicht finden können, an der dritten Stirnwindung des grossen Gehirns und dem Gebiete des versteckten Lappens, der sogenannten Reil'schen Insel, krankhafte Veränderungen, vorzüglich an der linken Seite, vorgefunden und diese Theile daher das Sprachcentrum genannt. Indem Rüdinger die Gehirne von Rednern und geistig hoch stehenden Männern mit denen von anthropoiden Affen verglich, stellte er die grössere Ausbildung dieses Sprachcentrums beim Menschen fest, wie es schon von Bischoff vermuthet worden war.

Von Interesse auf diesem Gebiete ist endlich noch die Bearbeitung der an der Oberfläche des Hinterhauptgehirns liegenden sogenannten Affenspalte und der Hauptfurche des Scheitellappens, der Interparietalfurche bei dem Menschen nach Race, Geschlecht und Individualität. Es wurde dabei nachgewiesen, dass sich in der Entwicklung der Windungen am Scheitel- und Hinterhauptslappen eine Continuität von den schmalnasigen Affen an bis zum Menschen nachweisen lasse und dass auch die Affenspalte zu den typischen Primärfurchen des Menschenhirns gehöre. Die Interparietalfurche soll nach ihm bei geistig tiefer stehenden Menschen einen schrägen Verlauf haben, bei geistig hoch stehenden aber der Gehirnaxe parallel verlaufen, eine Angabe, welche von Anderen bestritten worden ist.

Auch in der Histologie und Entwicklungsgeschichte suchte er, wie erwähnt, seine Kenntnisse zu erweitern. Von dem Wunsche geleitet, zu zeigen, dass er auch auf diesen Gebieten zu arbeiten verstehe, entstanden in den letzten Jahren seine Abhandlungen über die Einwanderung weisser Blutkörperchen in die schlauchförmigen Drüsen des Darms und über die Entwickelung des inneren Ohres und des Auges.

Digitized by Google

Rüdinger war ein ungemein geschickter und eifriger Sammler; von überall her wusste er sich das Material zu verschaffen; seine früheren Schüler, namentlich solche, welche in ferne Länder kamen, trugen ihm werthvolle Objekte für die Sammlung zu: Racenschädel, seltene Deformitäten, Gehirne von Mikrocephalen, von niederen Volksstämmen und von Menschenaffen etc. etc.

Es beseelte ihn eine unzerstörbare Lust zu schaffen und sein Wissen zu vermehren; mit wahrer Begeisterung und immer erneuter Freudigkeit war er in seinem Lehr-Berufe thätig. Sein Vortrag in der Vorlesung war zwar kein ganz tadelloser, aber wirkte doch durch die kunstvollen und instruktiven Präparate auf die Zuhörer und flösste ihnen lebhaftes Interesse an dem Gegenstande ein. Der Schüler fühlte alsbald, dass es diesem Lehrer heiliger Ernst mit der Sache sei und dass er dem Guten persönlich wohl wollte und ihn zu fördern suchte, wo er nur konnte. Rüdinger dachte dabei wohl an die Zeit, in der es ihm auf seiner Laufbahn schwer wurde und ein aufmunterndes Wort des Lehrers ihn stärkte. Die vielen Schüler, die Tausende von Aerzten, gedenken darum in Dankbarkeit und Anhänglichkeit ihres Lehrers in der Anatomie. So Manchen hat er durch seinen Eifer und seine Kenntnisse die ersten Wege in der Wissenschaft gewiesen.

Eifrigen Antheil nahm er an wissenschaftlichen und gemeinnützigen Bestrebungen: an den Verhandlungen des ärztlichen Vereins, der anthropologischen Gesellschaft, der morphologisch-physiologischen Gesellschaft. Stets war er gerne bereit durch sein Wissen die guten Zwecke zu fördern.

Geraden und offenen Sinnes, gesellig und heiter, war er bei Allen, welche seine guten Eigenschaften kennen gelernt hatten, beliebt. Und so dürfen wir ihn in der That bei dem Abschlusse seines Lebens glücklich preisen, denn er hat das erreicht, was er erstrebte, und durch sein Wissen und Können reichen Nutzen gestiftet.[1])

---

[1]) Siehe den Nachruf von Prof. Johannes Rückert in der Münchener medizinischen Wochenschrift 1896 Nr. 42, und von Prof. Carl Kupffer in dem anatomischen Anzeiger 1897 Nr. 7.

Digitized by Google

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass.

Am 19. Februar 1897 verschied zu Berlin der hervorragende Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstrass im 82. Lebensjahre. Mit ihm ist, nachdem seine Mitarbeiter Kronecker und Kummer im Tode vorausgegangen waren, der letzte der drei grossen Mathematiker der Berliner Universität dahin gegangen, welche mit ihren Vorgängern Dirichlet, Steiner und Jacobi zwei Menschenalter hindurch der Universität Berlin den Ruhm eines Mittelpunktes der mathematischen Wissenschaften verschafft haben. Man kann aus diesem Beispiel so recht deutlich erkennen, wie erfolgreich es für eine Universität und für die Wissenschaft ist, wenn durch Vereinigung einer Anzahl von ausgezeichneten Vertretern eines Faches eine Schule geschaffen wird, zu der Alle, welche sich in diesem Fache ausbilden wollen, gerne wandern.

Weierstrass wurde am 31. Oktober 1815 zu Osterfelde im westfälischen Münsterlande geboren. Er studirte anfangs an der Universität zu Bonn Jurisprudenz und Staatswissenschaft; es entwickelte sich in ihm aber immer mehr die Neigung zu mathematischen und physikalischen Studien, welchen er sich mit grösstem Eifer auf der Akademie zu Münster widmete.

Nach Beendigung der Universitätsjahre wurde er Lehrer der Mathematik an dem Gymnasium zu Münster (1840), dann in Deutsch-Krone (1842) und zu Braunsberg (1848). An diesen Orten beschäftigten den Gymnasiallehrer in aller Stille die abstraktesten Probleme seiner Wissenschaft; in den Programmen der Schule erschienen bescheiden seine ersten bewundernswerthen Arbeiten über die Theorie der analytischen Fakultäten, und über das Umkehrproblem bei den hyperelliptischen Funktionen, und vor Allem seine ersten „Beiträge zur Theorie der Abel'schen Integrale," gleich ausgezeichnet durch die Strenge der Methode sowie durch die Eleganz ihrer die Fachgenossen überraschenden Ergebnisse.

Durch diese seine Arbeiten hatte er bald die Aufmerksamkeit auf sich gelenkt; er wurde (1856) als Professor der

Digitized by Google

Mathematik an das damalige Gewerbeinstitut nach Berlin berufen und bald als Mitglied in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen. Hier, an einem der Centren geistigen Lebens in Deutschland fand er reiche und volle Gelegenheit, sein Talent auszubilden und auf zahlreiche Schüler fördernd wirken zu lassen. Im Jahre 1864 erhielt er eine ausserordentliche und dann eine ordentliche Professur für Mathematik an der Universität zu Berlin. Als akademischer Lehrer entfaltete er die ganze Schärfe und Feinheit seines Geistes; er wurde das Haupt einer besonderen Schule der Mathematik und zog viele junge Mathematiker an; er gründete mit Kummer das mathematische Seminar und betheiligte sich bis in das hohe Alter mit jugendlicher Frische an der Leitung desselben. Vom Jahre 1887 an entwickelte sich bei ihm allmählich ein Herzleiden, das ihn im Jahre 1890 nöthigte der Lehrthätigkeit zu entsagen. Er betheiligte sich aber bis zu seinem Tode noch lebhaft an der von der k. preuss. Akademie veranstalteten Gesammt-Ausgabe seiner Schriften und Vorlesungen.

Er hat durch Arbeiten, welche weniger an Zahl, aber von erster Bedeutung für die Wissenschaft sind, einen der vornehmsten Plätze unter den Analytikern Deutschlands eingenommen. Seine bedeutendsten Arbeiten betreffen einerseits die Theorie der Abel'schen Funktionen, anderseits diejenige der von ihm sogenannten Faktoriellen. Beiden hat er ganz neue Seiten abgewonnen und dadurch die Mathematik sehr wesentlich bereichert.

Mein verehrter College, Herr Ferd. Lindemann, hatte die grosse Güte mir die folgende Uebersicht über die wissenschaftliche Thätigkeit von Weierstrass zur Verfügung zu stellen.

Die späteren fundamentalen Arbeiten von Weierstrass über Abel'sche Funktionen sind leider nur durch seine Vorlesungen bekannt geworden. Riemann schien das Problem durch Einführung der nach ihm benannten mehrblättrigen Flächen, durch die daran geknüpfte Definition der einfachsten auf solchen Flächen existirenden Funktionen aus ihren Eigenschaften, endlich durch die Aufstellung der allgemeinen Θ-

Digitized by Google

Funktionen in so eleganter Weise gelöst zu haben, dass die älteren Weierstrass'schen Abhandlungen darüber fast in Vergessenheit geriethen, vollends nachdem Clebsch und Gordan auch das Umkehrproblem, das von Riemann selbst eigentlich nicht behandelt wurde, erledigten und durch ihre geometrisch-algebraische Einkleidung der fraglichen Probleme und Theoreme jene Brücke zwischen den transcendenten Theorien der Abel'schen Funktionen und Integrale und den damals in so hoher Blüthe stehenden geometrischen und algebraischen Forschungen geschlagen hatten, für die durch Aronhold von anderer Seite her das Fundament gelegt war, und deren Existenz von Riemann wohl schon gekannt wurde.

Nichts scheint dem eigenthümlichen Geiste Weierstrass' weniger sympathisch gewesen zu sein, als eine solche Verschmelzung verschiedener, anscheinend heterogener Gebiete mathematischer Erkenntniss. Einheitlichkeit der Methode und der Darstellung gieng ihm über alles; in der einheitlichen und strengen Durchführung aller Beweise lag seine Hauptstärke; in dieser Richtung hat er am nachhaltigsten auf seine Schüler und seine Zeitgenossen gewirkt.

Was die erforderliche Strenge der Beweise angeht, so gelang es ihm in Anlehnung an die sogenannte Bolzano'sche Schlussweise manche Lücke in der Theorie der reellen Funktionen auszufüllen. Die von ihm geleistete Construktion einer stetigen Funktion, die doch an keiner Stelle einen Differentialquotienten besitzt, gab eine nicht minder wichtige als überraschende negative Beantwortung der Frage nach dem Zusammenhange zwischen den Begriffen der Differenzirbarkeit und der Stetigkeit, und gleichzeitig einen schlagenden Beweis dafür, wie vorsichtig man bei der Benutzung geometrischer Vorstellungen und Schlussweisen sein muss, wenn es sich darum handelt, abstrakte Sätze exakt zu beweisen, wie berechtigt daher sein Misstrauen gegen die Verquickung analytischer mit geometrischen Beweismethoden war, während der hohe heuristische Werth anschaulicher Methoden und selbst die beweisende Kraft solcher Methoden in dem begrenzten Bereiche algebraischer

Digitized by Google

Gebilde kaum geleugnet werden kann. Auch in dieser Richtung giengen Riemann's Untersuchungen mit denjenigen von Weierstrass parallel; schon Riemann soll seinen Schülern ein Beispiel einer stetigen nicht differenzirbaren Funktion mitgetheilt haben. Riemann's nachgelassene Abhandlung über die trigonometrischen Reihen, in der zuerst der Begriff des bestimmten Integrals präcise festgelegt wurde, ist das Fundament für eine ganze Reihe von Arbeiten geworden, mit denen die Namen von Heine, P. du Bois-Reymond, G. Cantor, Thomae, Dini und Anderer verknüpft sind, deren Tendenz sich in gleicher Richtung wie diejenige von Weierstrass bewegt, und bei denen die Verfasser vielfach durch letzteren, sei es direkt sei es auf Grund von Mittheilungen seiner Schüler Anregung und Förderung fanden. Die Theorie der trigonometrischen Reihen selbst hat Weierstrass später zu einem gewissen Abschlusse gebracht, indem er in der von Hölder durchgeführten Bearbeitung seiner Gedanken eine hinreichende Bedingung für die Darstellbarkeit in der Fourier'schen Form aufstellte.

In der Theorie der complexen Funktionen war es die Entwicklung in eine Potenzreihe, welche das Fundament aller seiner Sätze und Beweise abgeben musste; und dadurch gelang es ihm, vielleicht in Anlehnung an eine frühere Theorie von Lagrange, in bewundernswürdiger Weise einen einheitlichen Aufbau der Funktionentheorie zu errichten, beginnend mit den einfachsten Rechenoperationen aus der Lehre von den complexen Zahlen und fortschreitend bis zu den allgemeinsten Sätzen über eindeutige analytische holomorphe Funktionen, endlich auch die Theorie der elliptischen Funktionen umfassend, überall die Anwendung der transscendenten Sätze aus der Infinitesimalrechnung, die nach Cauchy und Riemann so gern an die Spitze der complexen Funktionenlehre gestellt werden, consequent vermeidend, alles vielmehr aus den Eigenschaften der Potenzreihen und aus dem Prinzipe der Fortsetzung ableitend. Dieses Prinzip und jene Eigenschaften selbst waren ja bekannt und vielfach angewandt, bei Weierstrass aber geben sie fast die einzigen Hülfsmittel für alle seine Be-

Digitized by Google

weise.[1]) So ist z. B. eine Funktion definirt durch eine Potenz-Entwicklung in einem Bereiche und durch deren Fortsetzungen, nicht durch ihren analytischen Ausdruck. In dem Vermeiden der Definition durch einen solchen Ausdruck begegnet sich Weierstrass wieder mit Riemann; letzterer sucht indessen die Definition durch gewisse Eigenschaften an die Spitze zu stellen, etwa durch ihr Verhalten am Rande eines Gebietes, in dessem Innern gegebene discrete Unstetigkeiten bestimmter Art zugelassen werden od. dergl., und im Anschluss an das Dirichlet'sche Prinzip; die Hauptaufgabe ist, durch eine Kette von Schlüssen, unter möglichster Vermeidung von Rechnung neue Eigenschaften abzuleiten, insbesondere die analytische Darstellbarkeit in bestimmter Form (etwa als Potenzreihe) zu diskutiren. Weierstrass dagegen deckt in dem bisherigen Beweise des Dirichlet'schen Prinzipes Lücken auf, deren Ausfüllung erst später anderen Mathematikern gelungen ist; er vermeidet die Definition durch einen analytischen Ausdruck, weil er die fundamentale Erkenntniss gewonnen hat, dass ein gegebener analytischer Ausdruck in verschiedenen Gebieten der Ebene durch Potenzreihen dargestellt werden kann, von denen die eine nicht durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung aus der anderen entsteht. Einen gleich fundamentalen Einblick in die Natur analytischer Funktionen gewann er durch den Nachweis der Möglichkeit, dass eine Funktion über ein ge-

[1]) Er selbst spricht sein „Glaubensbekenntniss" in einem Briefe an Schwarz (Gesammelte Werke, Bd. II. S. 235) folgendermaassen aus: „Je mehr ich über die Prinzipien der Funktionentheorie nachdenke, um so fester wird meine Ueberzeugung, dass diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muss, und dass es desshalb nicht der richtige Weg ist, wenn umgekehrt zur Begründung einfacher und fundamentaler algebraischer Sätze das „Transscendente", um mich kurz auszudrücken, in Anspruch genommen wird — so bestechend auch auf den ersten Anblick z. B. die Betrachtungen sein mögen, durch welche Riemann so viele der wichtigsten Eigenschaften algebraischer Funktionen entdeckt hat. (Dass dem Forscher, so lange er sucht, jeder Weg gestattet sein muss, versteht sich von selbst; es handelt sich nur um die systematische Begründung.)"

Digitized by Google

gebenes Gebiet hinaus überhaupt nicht fortgesetzt werden könne, durch die Aufstellung von Beispielen für „Funktionen mit natürlichen Grenzen". Die Untersuchungen von Fuchs, Schwarz und Klein in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, der conformen Abbildung von Kreisbogen-Polygonen und der Modelfunktionen haben den Begriff einer nicht fortsetzbaren Funktion zum Allgemeingut der heutigen Mathematik gemacht.

Ueberall war die Kritik die Hauptstärke Weierstrass'; unhaltbares zu entfernen, die Begriffe zu vertiefen und zu erweitern, unsicheres zu festigen, das war seine Hauptaufgabe. Nicht um das Auffinden neuer Lehrsätze war es ihm zu thun; wenn auch selbstverständlich in dieser Richtung sein langes Leben ihm eine reiche Ernte gestattete.

Charakteristisch für seinen Lehrgang sind die Vorlesungen über elliptische Funktionen, die schon früh in zahlreichen Nachschriften verbreitet waren, und durch die er vielleicht am meisten auf seine unmittelbaren Schüler gewirkt hat, da es leichter ist, der in dieser Disciplin unvermeidlichen Rechnung zu folgen als sich in den Tiefen abstrakter Begriffe heimisch zu fühlen. Die Theorie der doppelt periodischen Funktionen erscheint (basirt auf das Additionstheorem) als natürlicher Ausfluss der allgemeinen Theorie eindeutiger analytischer Funktionen. Kaum dass ein elliptisches Integral, durch dessen Umkehrung die Theorie historisch entstanden ist, gelegentlich erwähnt wird; er stellt sich die Aufgabe ohne Anwendung der Integralrechnung möglichst weit in die schwierigsten Gebiete einzudringen. Die von ihm neu eingeführten p- und σ-Funktionen sind durch die Dissertationen seiner Schüler seit lange in allgemeinem Gebrauche; sie stehen in engster Beziehung zu den von Cayley, Sylvester, Hermite, Brioschi, Hesse, Aronhold, Clebsch u. a. ausgebildeten Vorstellungen der algebraischen Invariantentheorie, sowohl bei den binären biquadratischen Formen als bei den ternären kubischen Formen. Die praktische Wahl der Funktionen p und σ beruht wesentlich auf diesem ins Transscendente übertragenen Invarianten-Begriffe. Aber auf solche Zusammen-

Digitized by Google

hänge auch nur hinzuweisen, war nicht Weierstrass' Sache. In diesem strengen Festhalten am einheitlichen Aufbau, im Vermeiden jeden seitlichen Ausblickes auf verwandte Gebiete, in dem fast ängstlichen Verweilen auf dem schmalen, einmal vorher abgesteckten Pfade liegt die Grösse des Weierstrass'schen Systems, vor allem bei Untersuchungen prinzipieller Natur, darin liegt aber auch die Schwäche des Systems in seiner Wirkung auf die Schüler, denen es nicht immer vergönnt sein kann, durch eigene Arbeiten den Ausblick auf andere Wege zu gewinnen, die dem gleichen Ziele der Erkenntniss zustreben, oder vom erreichten Gipfel Umschau über ein weites Gebiet zu halten.

Seine Arbeiten über eindeutige Funktionen hat Weierstrass theilweise selbst in klassischer Form publizirt; seine Resultate in der Theorie der elliptischen und Abel'schen Funktionen harren noch einer zusammenfassenden Bearbeitung durch seine Schüler. Ebenso ist es mit seinen Vorlesungen über Variations-Rechnung; auch hier hat er neue Bahnen gewiesen zur Würdigung der durch die gewöhnlichen Methoden gewonnenen, nicht aber immer ausreichenden Resultate.

Dass ihm auch andere Gebiete nicht fern lagen, zeigen seine Vorlesungen über synthetische Geometrie, seine fundamentalen Arbeiten über Schaaren quadratischer Formen und die damit verbundene Einführung der sogenannten Elementartheiler; ferner seine Untersuchung über die Steiner'sche Fläche und seine Behandlung der Minimalflächen durch geschickte Einführung der für eine solche nothwendigen complexen Funktion, wodurch er die von Enneper schon früher aufgestellten Formeln nicht nur neu begründete, sondern auch in eine solche Gestalt brachte, dass sich zahlreiche andere Arbeiten daran anschliessen konnten.

Aber nicht nur in den Arbeiten und Vorlesungen Weierstrass' muss man die Schöpfungen seines Talentes suchen, auch die Arbeiten seiner zahlreichen Schüler sind mit in Betracht zu ziehen. So hatte sich Weierstrass schon früh mit der Definition einer complexen Funktion durch eine Differential-

Digitized by Google

gleichung beschäftigt und einen Weg betreten, auf dem Briot und Bouquet zu so schönen Resultaten gekommen sind. Wenn Fuchs bei Behandlung der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten den analogen Weg betritt, so führt er Weierstrass als seinen Führer auf dem ersten Theile dieses Weges an, dessen Verfolgung ihn dann zu glänzenden Resultaten leiten sollte. Ebenso beruft sich andererseits Schwarz bei dem Probleme der conformen Abbildung der Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon auf Weierstrass als denjenigen, dem er Methoden verdankt oder der ergänzende Beweise in Händen habe.

Gross war die Zahl seiner Schüler, die ihn persönlich verehrten, die seine Lehren verbreiteten, gross aber auch die Zahl seiner Bewunderer unter den Zeitgenossen aller Nationen, die seine Leistungen hochschätzten und seine Methoden sich aneigneten. Die von der k. preuss. Akademie der Wissenschaften begonnene Gesammtausgabe seiner Werke wird erst voll übersehen lassen, was ihm die Mathematik verdankt: jedenfalls ist es nicht nur Förderung im Einzelnen, sondern zusammenhängende Bearbeitung grosser Gebiete, Ausblicke auf neue Theorien, vor allem aber gefestigtes Fundament für neue Forschungen.

Dem verdienten Gelehrten wurde vielfache äussere Anerkennung zu Theil: er war Ritter des k. preuss. Ordens pour le merite, des k. bayer. Maximilians-Ordens für Wissenschaft und Kunst, Besitzer der Helmholtz-Medaille; unserer Akademie gehörte er seit 1861 als auswärtiges Mitglied an.

Hugo Johann August Gyldén.

Am 9. November 1896 starb in Stockholm der Professor der Astronomie an der Universität, Astronom der Akademie der Wissenschaften und Direktor der Sternwarte Dr. Hugo Gyldén. Sein frühzeitiger Tod ist ein ungemein schwerer Verlust für die Astronomie, da er sich durch seine hervor-

Digitized by Google

ragenden Leistungen auf mehreren Gebieten derselben eine führende Stellung errungen hatte und zu den angesehensten Astronomen der Gegenwart gehörte.

Er wurde am 29. Mai 1841 in Helsingfors in Finnland geboren, woselbst sein Vater Professor der klassischen Philologie an der Universität war. Nachdem er das Examen der mathematisch-physikalischen Fakultät bestanden, begab er sich für ein Jahr nach Deutschland, um sich in der Astronomie auszubilden, für welche er eine besondere Vorliebe gewonnen hatte; er gieng nach Leipzig und dann nach Gotha zu Hansen, dem bedeutendsten astronomischen Rechner seiner Zeit. Im Jahre 1862 promovirte er in Helsingfors, wurde aber bald als Adjunkt-Astronom an die berühmte Sternwarte in Pulkowa bei St. Petersburg berufen, an welcher der aus Fraunhofer's Werkstätte hervorgegangene grosse Refraktor von 38 cm Oeffnung aufgestellt ist. Der Aufenthalt daselbst war für seine spätere Entwicklung von entscheidender Bedeutung, denn er erlernte hier die feine Beobachtungstechnik dieser Stätte der Wissenschaft kennen. Während 6 Jahren nahm er an den Arbeiten des Institutes mit dem Direktor Friedrich Georg Struve und dann mit dessen Sohn Otto Wilhelm Struve den regsten Antheil. Schon hier machte er sich weiterhin durch ausgezeichnete Untersuchungen auf dem Gebiete der theoretischen Astronomie bemerkbar; namentlich rührt von ihm eine langjährige Reihe von Deklinations-Bestimmungen mit dem ebenfalls aus einem Münchener Institut, dem von Ertel u. Sohn, herrührenden grossen Vertikalkreis her; auch veröffentlichte er in den astronomischen Nachrichten Mittheilungen über absolute Störungen der Hebe sowie Beobachtungen und Rechnungen über Kometen.

Im Jahre 1870 wurde er von der Akademie zu Stockholm an Selander's Stelle zum ordentlichen Mitgliede für Astronomie gewählt, mit welchem akademischen Sitze auch die Leitung der Sternwarte verbunden ist; ausserdem erhielt er die Professur für Astronomie an der Universität. Man hätte wohl keine bessere Wahl treffen können; Gyldén blieb auch dieser

Digitized by Google

Stelle treu trotz verlockender Anerbietungen nach Gotha und nach Göttingen.

Gyldén verdankte seine anerkannte Stellung in der Wissenschaft in erster Linie seinen wichtigen und originellen theoretischen Arbeiten, bei welchen er sich die schwierigsten Probleme der rechnenden Sternkunde gestellt hatte, wenn er auch die praktische Astronomie nicht vernachlässigte, indem er ausser seinen vorher erwähnten Beobachtungen mit dem Vertikalkreis noch ausgedehnte Parallaxenbestimmungen mit dem Stockholmer Refraktor ausgeführt hat.

Seine theoretischen Arbeiten aber sind überaus zahlreich und verbreiten sich über viele Gebiete der Astronomie. Ich entnehme ihre Würdigung im Wesentlichen dem durch Herrn H. Seeliger für unsere Akademie verfassten eingehenden Wahlvorschlage.

Durch seine Beschäftigung mit dem grossen Vertikalkreis der Pulkowaer Sternwarte wurde er darauf geführt, sich mit der Theorie der astronomischen Strahlenbrechung zu beschäftigen. Die Bemerkung, dass die vorhandenen Theorien der Lichtbrechung innerhalb unserer Erdatmosphäre in der Nähe des Horizonts nicht völlig den Beobachtungen entsprechen, veranlassten ihn, die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Refraktionstheorie zu diskutiren und namentlich die letzteren wesentlich zu vertiefen und in ihrer Anwendung strenger zu verfolgen. Die aus diesen Studien hervorgegangenen beiden Abhandlungen: „Untersuchungen über die Konstitution der Atmosphäre" sind in vieler Beziehung als klassisch zu bezeichnen. Die hierauf begründeten Refraktionstafeln haben bereits vielfache Anwendungen erhalten, und die Sternwarte zu Pulkowa reduzirt alle dort gemachten Beobachtungen seit etwa 28 Jahren mit ihrer Hilfe. Er untersuchte darin auch genauer den Einfluss der Temperaturabnahme in der Atmosphäre auf die astronomische Strahlenbrechung.

Wohl als eine Nachwirkung des Pulkowaer Aufenthalts sind die schönen Untersuchungen Gyldén's über Veränderlichkeit der Lage der Rotationsaxe der Erde zu betrachten;

Digitized by Google

namentlich hat die grosse Abhandlung: „Recherches sur la rotation de la Terre“ für Untersuchungen der Art anregend und belebend gewirkt; er ist auf ähnliche Gegenstände später noch vielfach zurückgekommen.

Besonders erwähnt zu werden verdient die umfangreiche Abhandlung: „Versuch einer mathematischen Theorie zur Erklärung des Lichtwechsels der veränderlichen Sterne.“ Hier behandelt er ein komplizirtes Rotationsproblem und verfolgt es in alle Details.

Hat sich Gyldén schon in den genannten Arbeiten als ein Mathematiker und Astronom erwiesen, der sich den besten unserer Zeit anreiht, so tritt diese seine Bedeutung noch mehr in den Vordergrund, wenn man seine Bemühungen, das berühmteste und wohl auch wichtigste Problem der theoretischen Astronomie, das Problem der drei Körper, von einer neuen und aussichtsvollen Seite anzufassen, in Betracht zieht. Es gilt dabei für den Fall, dass zwei sich gegenseitig anziehende Massen um ein gemeinschaftliches Attraktionscentrum sich bewegen, die von den beiden ersteren beschriebenen Bahnen zu ermitteln. Schon am Anfang seiner wissenschaftlichen Thätigkeit bearbeitete Gyldén das genannte Problem nach den verschiedensten Richtungen; zunächst anknüpfend an die Untersuchungen Hansen's machte er die schöne Entdeckung, dass die Reihenentwickelungen, durch welche die Störungen einer Kometenbahn ausgedrückt werden, an Eleganz und namentlich an Convergenz gewinnen, wenn gewisse Verbindungen von elliptischen Funktionen ausgeführt werden. In zahlreichen Abhandlungen hat Gyldén diesen Gedanken verfolgt und sich überall als ein Meister in der Beherrschung des mathematischen Calküls erwiesen.

Lange Zeit haben seine Studien endlich einen anderen viel versprechenden Weg eingeschlagen, welcher völlig neue Methoden in die Astronomie einführt und in jedem Falle als originale Leistung ersten Rangs zu betrachten ist. Es sind dies seine Studien auf dem Gebiete der Störungstheorie. Die von Euler, Lagrange und Laplace begründeten Methoden,

Digitized by Google

welche auf der Unterscheidung von Störungen verschiedener Ordnungen basiren, werden dabei ganz verlassen; er meint, dass es nicht thunlich sei, die aus den Kepler'schen Gesetzen folgende Bewegung eines Planeten für alle Zeiten als Näherung an die Wahrheit zu betrachten, vielmehr nimmt er eine andere Bewegung (die intermediäre Bahn), welche durch die anderen Mitglieder desselben Systems in gewisser Weise mitbestimmt wird, als solche Näherung an. Die Tragweite dieser neuen Methode kann noch nicht völlig überblickt werden; als feststehend darf man aber behaupten: die von Gyldén begründete Störungstheorie leistet in vielen Fällen entschieden mehr als die älteren Methoden; ausserdem berührt sie direkt die grossartigen Probleme über die Stabilität des Planetensystems, Probleme, welche bisher, strenge genommen, völlig ungelöst sind, durch Gyldén's Forschungen aber einer strengeren Behandlung zugänglich gemacht worden sind.

Durch sein in schwedischer und später auch in deutscher Sprache erschienenes Werk: „die Grundlehren der Astronomie in ihrer geschichtlichen Entwicklung" hat er ein schönes Zeugniss seiner Vielseitigkeit abgelegt. Es ist dieses Buch keineswegs eine rein compilatorische Arbeit, vielmehr in vielen Theilen durchaus original, und es fand weit über die Kreise der Astronomen hinaus bei den Gebildeten Beachtung.

Gyldén schenkte ausserdem allen sozialen Fragen sowie den Bestrebungen für die Förderung des Arbeiterstandes die lebhafteste Theilnahme; er war der Begründer der Lebensversicherungsgesellschaft „Thule", für welche er das rechnerische Statut ausgearbeitet hatte.

Gyldén's so erspriessliche Thätigkeit in der Wissenschaft hat bei seinen Fachgenossen einstimmige Anerkennung gefunden, und er stand bei ihnen in hohem Ansehen; er wurde in die Vorstandschaft der internationalen astronomischen Gesellschaft gewählt und war Vicepräsident derselben. Die von ihm gegebenen vielfachen Anregungen werden noch lange fortwirken.

Digitized by Google

Friedrich August Kekulé.

Am 13. Juli 1896 starb unerwartet der Professor der Chemie an der Universität Bonn August Kekulé im Alter von 67 Jahren. Er hat an der Entwickelung der jetzt die Chemie beherrschenden Ideen einen ganz hervorragenden Antheil und er ist durch seine Ansichten über die Construktion der organischen Verbindungen der Begründer der Strukturchemie geworden.

Kekulé wurde am 7. September 1829 zu Darmstadt als Sohn eines Oberkriegsrathes geboren. Schon in früher Jugend zeigte er die Neigung zur Beobachtung der Natur, er sammelte eifrig Pflanzen und Schmetterlinge; noch mehr aber trat sein Talent für Mathematik und Zeichnen hervor. Der Vater hatte daher den Wunsch, der Sohn möchte sich der Architektur widmen; derselbe begann auch nach Absolvirung des Gymnasiums im Jahre 1847 an der Landesuniversität Giessen unter der Leitung von Ritgen in das Fach der Architektur einschlagende Vorträge zu hören; jedoch wurde er bald durch die Vorlesungen über Chemie von Liebig auf seinen eigentlichen Beruf geführt. Liebig befand sich damals auf der Höhe seines Schaffens und sein Laboratorium, die erste Schule der Chemie in Deutschland, war der Sammelplatz einer grossen Anzahl der talentvollsten jungen Chemiker aus allen Ländern der Erde geworden. Diese Lust des Arbeitens und Forschens zog den talentvollen jungen Mann mächtig an und er trat in das Laboratorium ein, wo er unter Will seine Dissertation über Aetherschwefelsäuren (1850) ausarbeitete. Er sollte Assistent bei Liebig werden, begab sich aber auf den Rath Liebig's zuerst auf die Wanderschaft, um andere Bildungsstätten kennen zu lernen. Dieselbe führte ihn zunächst nach Paris; er hörte daselbst Fremy, Wurtz, Cahours und Regnault, vor Allem aber Dumas und Gerhardt. Ersterer hatte die Substitutionstheorie kurz vorher aufgestellt, letzterer war eben mit der Ausarbeitung seiner Typentheorie beschäftigt, in welche er den ihm befreundeten Kekulé Einsicht nehmen liess; dies waren neue

Digitized by Google

Vorstellungen, die ihm reiches Material zum Denken gaben. In der Zwischenzeit brachte er ein halbes Jahr auf dem Schlosse Reichenau nächst Chur bei Herrn v. Planta zu, dem er bei chemischen Arbeiten, namentlich über das Nikotin, behilflich war. Dann gieng er als Assistent von Stenhouse nach London, wo er mit Odling und besonders mit Williamson in näheren fruchtbaren Verkehr trat. In London entstanden schon seine ersten Vorstellungen über den chemischen Werth der Atome und über die Art der Bindung der Atome.

Im Jahre 1856 gieng er nach Heidelberg, um sich an der dortigen Universität als Privatdozent zu habilitiren. Er errichtete ein Privatlaboratorium, in dem er eine ungemein rege Thätigkeit als Lehrer und als Forscher entwickelte; zu gleicher Zeit reiften seine vorher genannten Theorien weiter aus.

Seine Arbeiten lenkten bald die Aufmerksamkeit auf den jungen emporstrebenden Chemiker, so dass er im Jahre 1858 auf die Empfehlung von Stas einen Ruf an die belgische Universität zu Gent erhielt.

In Gent (von 1858—1865) war die glänzendste Zeit seines Schaffens gekommen: durch die intensivste Arbeit entstanden eine grosse Anzahl bedeutungsvoller Untersuchungen, er setzte dorten der Strukturtheorie den Schlussstein durch die Benzoltheorie ein, schrieb die wichtigsten Capitel seines klassischen Lehrbuchs der organischen Chemie oder der Chemie der Kohlenstoff-Verbindungen und bildete im Laboratorium viele Schüler aus, so z. B. Hübner, Körner, Ladenburg, Wichelhaus und unseren verehrten Collegen v. Baeyer.

Im Jahre 1865 erfolgte seine Berufung an die Universität Bonn an Stelle von A. W. Hofmann. Daselbst erschienen zwar in der ersten Zeit von ihm noch manche höchst werthvolle Untersuchungen, auch hatte er noch viele Schüler um sich versammelt, und setzte er sein unvollendet gebliebenes Lehrbuch noch fort, jedoch war eine Abnahme seiner vordem so ungewöhnlich grossen Produktivität zu bemerken. Körperliche Leiden mögen dabei eine Rolle gespielt haben, wenigstens lehnte er eine Anfrage von hier an Liebig's Stelle zu treten

Digitized by Google

wegen Kränklichkeit ab. Man kann sich aber auch wohl denken, dass ein Mann, der weittragende allgemeine Gesetze aufgestellt hat, sich nicht mehr mit dem Suchen nach Detail abgeben will.

Wenn auch Kekulé, wie das Vorstehende ergiebt, viele der wichtigsten Thatsachen für die Chemie gefunden hat, so liegt doch der Schwerpunkt seiner Leistungen auf theoretischem Gebiete, indem er Gedanken über den Bau der chemischen Verbindungen aussprach, welche die Chemie bis heute beherrschen. Wir verdanken ihm zwei solcher Theorien von allgemeiner Natur: die über die Werthigkeit der Elementar-Atome und die über die Art der Bindung der Atome.

Nachdem das Gesetz der Verbindung der Elemente in bestimmten Gewichtsverhältnissen, das Gesetz der constanten Proportionen, erkannt war, sowie das Gesetz der multiplen Proportionen, wornach die Elemente sich nach mehreren Gewichtsverhältnissen, meist den Multiplen der kleinsten Menge, sich verbinden, hatte bekanntlich Dalton in seiner Atomtheorie angenommen, dass die Materie aus Atomen bestehe, von denen es so viele verschiedene Arten von bestimmtem Gewichte giebt, als chemische Grundstoffe existiren und durch deren Combination die mannigfaltigen chemischen Verbindungen entstehen. Es war nun für die Chemiker die Frage gegeben, nach welchen Gesetzen die Atome ihre Verbindungen eingehen. Berzelius hat die Elektrizität als Ursache der chemischen Vereinigung und Zersetzung betrachtet; er nahm an, dass die Atome der Elemente zwei Pole, einen elektrisch positiven und einen elektrisch negativen, besitzen, von denen zumeist die eine Elektrizität über die andere überwiegt. Die chemische Verbindung beruht nach ihm auf der Anziehung der ungleichnamigen Pole der Atome und dem Ausgleich der verschiedenen Elektrizitäten; auch in den Verbindungen, den Atomgruppen oder Radikalen, ist noch elektrische Polarität vorhanden, wenn nicht die ganze Menge der Elektrizitäten ausgeglichen ist, wodurch der Verbindung ihr Charakter aufgedrückt wird. Aber es erwies sich bald die Berzelius'sche Lehre für die Erklärung complizirter

Digitized by Google

Kohlenstoffverbindungen nicht ausreichend und man fand namentlich bei den Dumas'schen Substitutionen, dass sich in einer chemischen Verbindung wie z. B. der Essigsäure der elektropositive Wasserstoff durch das elektronegative Chlor ohne wesentliche Aenderung des Charakters der Verbindung ersetzen lasse.

Durch die fast unendliche, täglich sich mehrende Zahl von Verbindungen, welche grösstentheils aus den gleichen Elementen bestehen, wäre das Gebiet der organischen Chemie geradezu unübersehbar, wenn nicht durch gewisse Vorstellungen oder Theorien in dem Chaos der Thatsachen System und Ordnung erkannt würden. Die Anfänge einer solchen systematischen Ordnung wie sie in der von Liebig noch festgehaltenen Theorie der Radikale — wo gewisse Atomgruppen die Rolle von Elementar-Atomen spielen — gegeben waren, entwickelten sich in der Typentheorie Gerhardt's zu einem leicht übersichtlichen System der organischen Verbindungen. Er zeigte nämlich, dass man die organischen Verbindungen unter einige einfache unorganische Typen: den Wasserstoff, das Wasser, die Salzsäure und das Ammoniak unterordnen könne. Limpricht hat das Verdienst diese Typentheorie in Deutschland bekannt gemacht zu haben, aber Kekulé war es, der sie weiter entwickelte und bis zur Strukturchemie vertiefte. Er war im Umgang mit Gerhardt in Paris ein eifriger Anhänger von dessen Typentheorie geworden und fügte noch den Typus Grubengas hinzu auf Grund seiner Entdeckung der sogenannten Vierwerthigkeit des Kohlenstoffs in den Verbindungen, welche ein Atom Kohlenstoff enthalten. Er war nämlich auf die verschiedene Bindungskraft einzelner Atome gegenüber anderen Atomen aufmerksam geworden: das Chlor in der Salzsäure bindet nur 1 Atom Wasserstoff, der Sauerstoff im Wasser 2 Atom Wasserstoff, der Stickstoff im Ammoniak 3 Atom Wasserstoff; und so erkannte er zuerst klar, dass die geringste Menge Kohlenstoff, also 1 Atom desselben, 4 Atome Wasserstoff oder 4 Atome eines 1atomigen Elements binden und an sich ketten kann, er ist vieratomig. Man nennt dies den chemischen

Digitized by Google

Werth der Elementaratome, oder ihre Bindungskraft, ihre Werthigkeit oder Valenz, und die darauf gegründete Theorie die der mehratomigen Radikale. Die gleichwerthigen Atome müssen darnach Verbindungen von demselben Typus bilden, wodurch die Typentheorie ihre Erklärung fand. Es entwickelte sich in Folge davon auch die scharfe Unterscheidung zwischen Atom- und Aequivalent-Gewicht, man bezeichnete von da ab das Atomgewicht des Sauerstoffs zu 16 statt 8 und schrieb die Formel des Wassers H_2O statt HO.

Auf die Theorie von der Vieratomigkeit des Kohlenstoffs gründete sich die zweite berühmte Theorie Kekulé's von der Verkettung der Kohlenstoff-Atome oder die Strukturtheorie als moderne Ansicht über den Aufbau der chemischen Verbindungen. Er hatte die Beobachtung gemacht, dass in den Kohlenstoffverbindungen, welche mehr als 1 Kohlenstoffatom enthalten, die Vierwerthigkeit des Kohlenstoff-Atoms nach bestimmten Gesetzmässigkeiten vermindert erscheint. Dies erklärt Kekulé durch die Fähigkeit der Kohlenstoffatome sich mit einander zu verknüpfen und zu verketten, wodurch ein Theil der Affinität des einen gegen einen ebenso grossen Theil der Affinität des anderen gebunden wird, aber gerade dadurch befähigt werden sehr grosse Moleküle aufzubauen und eine sehr grosse Mannigfaltigkeit der Combinationen zu erzielen. Denn die unendliche Zahl und Mannigfaltigkeit von Verbindungen aus nur wenigen und den gleichen Elementen wird erst verständlich durch die Vorstellung, dass durch Verbindung von Kohlenstoffatom mit Kohlenstoffatom aus dem einen Element eine ganze Reihe verschiedener Elemente entsteht, welche zwar aus dem gleichen Stoff gebildet, aber durch die verschiedene Zahl der zu einem zusammengesetzten Atom vereinigten stofflich gleichen Atome von einander verschieden sind. Kekulé machte sich aus dieser Art der Bindung der Atome eine Vorstellung von der Struktur der chemischen Verbindungen, indem er in den gewöhnlichen organischen Verbindungen die Kohlenstoffatome kettenförmig mit einander verknüpft sich dachte.

Noch weiter gieng er bei der wahrhaft genialen Erklärung

Digitized by Google

der Struktur des Benzols und der von diesem sich ableitenden aromatischen Substanzen. Das kohlenstoffreiche und wasserstoffarme Benzol hatte man zuerst als ein helles flüchtiges Oel bei der Condensation des Leuchtgases, dann aus aromatischriechenden Pflanzentheilen, Harzen und Oelen und aus der Benzoësäure gewonnen; das Nitrobenzol ist die Muttersubstanz der glänzenden Anilinfarben geworden. Die in seiner „Chemie der Benzol-Derivate" dargelegte Benzoltheorie ist der Gipfelpunkt seiner Leistungen. In allen diesen aromatischen Substanzen ist nach ihm eine und dieselbe Atomgruppe oder ein gemeinschaftlicher Kern aus 6 Kohlenstoffatomen enthalten. Diese letzteren denkt er sich zu einem geschlossenen Ring vereiniget, indem jedes Kohlenstoffatom mit zwei anderen benachbarten so verbunden ist, dass es mit dem einen davon eine seiner vier Affinitäten, mit dem anderen aber zwei derselben austauscht, wodurch jedes der sechs Kohlenstoffatome dann noch eine Affinität frei hat; durch die Bindung dieser sechs Kohlenstoffverwandtschaften mit anderen Elementen lassen sich alle aromatischen Substanzen ableiten.

Damit war eine bestimmte Anschauung über den inneren Bau complizirter chemischer Verbindungen gewonnen. Wenn man als Werthmesser für eine solche wissenschaftliche Vorstellung oder Theorie die Fruchtbarkeit derselben ansieht, d. h. die Masse der aus der Theorie sich ergebenden Schlussfolgerungen, welche durch das Experiment Bestätigung finden, dann überragt Kekulé's Theorie der aromatischen Verbindungen an Bedeutung alle früheren chemischen Theorien. In der That die Theorie der Benzolderivate hat eine grosse Anzahl bis dahin unerklärlicher Thatsachen dem Verständniss nahe gebracht, zahllose Untersuchungen und Entdeckungen veranlasst, den Weg zur künstlichen Herstellung vieler chemischen Verbindungen gezeigt und dadurch eine der mächtigsten Bewegungen in der Chemie entfesselt. Obwohl seiner Lehre von der Atomverkettung der Widerstand bedeutender Chemiker wie namentlich von Kolbe und von Frankland nicht fehlte, so ist sie doch im Wesentlichen unerschüttert geblieben, ja es ist

Digitized by Google

durch tieferes Eindringen noch eine weitere Ausbildung derselben z. B. durch Baeyer versucht worden.

Kekulé versinnlichte, um eine klare Anschauung zu ermöglichen, die Verknüpfung der Atome durch die graphischen Strukturformeln und durch seine Atommodelle, welch' letztere ein ganz unentbehrliches Hilfsmittel für den chemischen Unterricht geworden sind. Er wollte damit ursprünglich nur die Bindungsweise der Atome, aber nicht ihre räumliche Lagerung im Molekül ausdrücken. Er hat sich ja wohl auch bestimmte Vorstellungen über die letzteren gemacht, sowie später auch Andere.

Seine Arbeiten haben nicht nur der Wissenschaft genützt, sondern auch der chemischen Technik. Obwohl er niemals ein industriell verwerthbares Produkt hergestellt und niemals mit der technischen Ausbeutung eines solchen sich befasst hat, haben die Techniker doch richtig erkannt, dass die rein wissenschaftlichen Bestrebungen und Gedanken Kekulé's am meisten die Technik gefördert haben. Darum hat auch die deutsche chemische Grossindustrie durch den Maler Angeli A. W. Hofmann's und Kekulé's Bildnisse malen und in der Nationalgalerie zu Berlin aufstellen lassen.

In der merkwürdigen Rede, welche Kekulé bei der ihm von der deutschen chemischen Gesellschaft zum 25 jährigen Gedenktag der Theorie über die Constitution des Benzols vom 10. März 1890 veranstalteten Feier hielt, hat er dargelegt, wie er zu seinen Erfolgen gekommen sei. Neben der Begabung war es die richtige mathematische und naturwissenschaftliche Vorbildung, ein eiserner Fleiss von Jugend an, durch den er einen reichen Schatz von Kenntnissen sich erwarb, die Möglichkeit in verschiedenen Schulen der Chemie sich zu entwickeln, die in der Architektur erworbene Uebung in klarer Raumanschauung, welche ihn befähigten den, wie er sagte, in der Luft liegenden Anschauungen als Erster Ausdruck zu geben.

Seine vornehme Persönlickeit, sein geistvolles Wesen erregten die Aufmerksamkeit; die Klarheit und Formvollendung der Rede, der kritische Verstand, die scharfe Beobachtungsgabe

Digitized by Google

und die Sicherheit im Experiment stempelten ihn zum ausgezeichneten Lehrer und Forscher.

Es wird sich ja auch die Strukturtheorie überleben und es werden neue Anschauungen über den Bau der chemischen Verbindungen an ihre Stelle treten, aber Kekulé's für alle Zeiten bleibendes Verdienst ist es der Chemie neue, fruchtbarste Wege gebahnt zu haben.

Georg Harley.

Am 27. Oktober 1896 starb im Alter von 68 Jahren der verdiente Professor der pathologischen Chemie am University College zu London Dr. Georg Harley.

Er wurde am 12. Februar 1829 in Haddington (East Lothian) geboren. Früh entwickelte sich bei ihm die Neigung zur Medizin, die er an der Universität Edinburg studirte, woselbst er auch im Jahre 1850 den Doktorgrad erwarb. Anfangs wandte er sein Interesse vorzüglich der praktischen Medizin, insbesondere der Geburtshilfe, zu; sein Aufenthalt an auswärtigen Universitäten führte ihn jedoch der theoretischen Medizin, namentlich der chemischen Richtung derselben, zu.

Er besuchte zunächst Paris, woselbst er in den chemischen Laboratorien von Robin, Verdeil und Wurtz arbeitete und dann bei dem berühmten Physiologen Claude Bernard, bei welchem er Untersuchungen über die Zuckerausscheidung im Harn nach Verletzung einer bestimmten Stelle des Gehirns und nach Einspritzung von allerlei Reizmitteln in die Pfortader anstellte. Darnach gieng er an die deutschen Universitäten zu Würzburg, Berlin, Wien und Heidelberg; in Heidelberg war er bei Bunsen thätig, in Würzburg, wo damals die medizinische Fakultät durch das Zusammenwirken junger hervorragender Forscher in hoher Blüthe stand, stellte er in dem Laboratorium des physiologischen Chemikers Josef Scherer aus dem Harn einen eisenhaltigen organischen Farbstoff, den er Urohämatin nannte, dar.

In die Heimath zurückgekehrt wurde er alsbald Curator des anatomischen Museums am University College in London,

Digitized by Google

dann Dozent der praktischen Physiologie und Histologie, hierauf Professor der gerichtlichen Medizin und endlich (1860) Arzt am University College Hospital.

Ausser seiner klinischen Thätigkeit waren es besonders seine zusammenfassenden Schriften über einzelne Gebiete der internen Medizin, durch welche er sich bleibende Verdienste erworben und einen angesehenen Namen gemacht hat z. B. durch seine Werke über die Erkrankungen der Leber, über die Gelbsucht, die Zuckerharnruhr, die Eiweissausscheidung im Harn mit und ohne Wassersucht, und durch sein Handbuch der Lehre vom Harn.

Er hat jedoch auch noch durch einzelne Untersuchungen die Wissenschaft mit neuen Thatsachen bereichert. Eine Zeit lang beschäftigte er sich eifrig mit anatomisch-histologischen Arbeiten, so z. B. über die Organe der Hautrespiration, vorzüglich von Rana temporaria; über die Anatomie einer neuen Spezies Pentatoma; über den feineren Bau der Nebennieren, wofür er den von der k. Gesellschaft der britischen Aerzte gestifteten, alle drei Jahre zur Vertheilung kommenden Preis erhielt.

In Folge der angestrengten mikroscopischen Thätigkeit bekam er eine hartnäckige Entzündung der Netzhaut, welche ihn nöthigte volle 9 Monate hindurch sich in einem vollständig verdunkelten Raume aufzuhalten. Die interessante Geschichte seiner Krankheit und seiner Selbstbeobachtungen, die manche Analogie mit den Schilderungen unseres verstorbenen Collegen Nägeli bieten, beschrieb er in der Zeitschrift „Lancet".

Ausserdem hat er noch Abhandlungen veröffentlicht: über die unmittelbare Wirkung des Strychnins auf das Rückenmark, die Wirkung des Atropins auf die Pupille, die Wirkung der Calabarbohne, über die Menge des vom Menschen abgesonderten Speichels, über die im Speichel enthaltenen Eiweissstoffe, über die Eigenschaft des Mundspeichels Fett zu emulsioniren und nach Ansäuerung mit Salzsäure Eiweiss zu verdauen, über die Menge des vom Hund abgesonderten Magensaftes und über seine Eigenschaft Rohrzucker zu invertiren; über die Erkennung

Digitized by Google

des Endpunktes bei der Liebig'schen Titrirung des Harnstoffs mit Quecksilbernitrat durch ein mit Sodalösung getränktes und getrocknetes Filtrirpapier.

Harley war Mitglied der Royal Society und seit 1862 auf den Vorschlag von Liebig correspondirendes Mitglied unserer Akademie. Er war ein äusserst arbeitssamer und kenntnissreicher Arzt, der sich mannigfache Verdienste um die Wissenschaft erworben hat.

Emil du Bois-Reymond.

Am 26. Dezember 1896 starb in Berlin Emil du Bois-Reymond, der berühmte Physiologe, im 79. Lebensjahre. Mit ihm ist der letzte der vier grossen deutschen Physiologen, denen wir die heutige Entwicklung der Physiologie wesentlich verdanken, aus dem Leben geschieden. Eine überaus fruchtbare und glänzende Periode dieser Wissenschaft ist durch den Weggang von Ernst Brücke, Hermann Helmholtz, Carl Ludwig und Emil du Bois-Reymond, welche wir als die Begründer der deutschen physikalisch-physiologischen Schule bezeichnen, abgeschlossen. Mit dem Gefühle des Stolzes und der Dankbarkeit blicken wir auf ihr Wirken zurück; es wäre unnütz abschätzen zu wollen, welcher von ihnen der Grössere war und welchem das meiste Verdienst zukommt, denn Jeder hat die übrigen in manchen Beziehungen überragt. Aber man kann wohl sagen, dass du Bois-Reymond äusserlich am meisten zum Siege der physikalischen Anschauung in der Physiologie beigetragen hat.

Diejenigen, welche sich an den Zustand der Physiologie am Anfang der fünfziger Jahre erinnern können, wissen wohl am besten zu würdigen, welche Fülle von Erkenntniss in der Lehre vom Leben wir diesen vier Männern, die sich auch persönlich als Freunde so nahe gestanden sind, verdanken. Was aber fast noch mehr an ihnen zu schätzen ist, das ist die Einführung streng naturwissenschaftlicher Methoden und naturwissenschaftlicher Denkungsweise zur Erforschung der so ver-

Digitized by Google

wickelten Lebensvorgänge. Auf diesem von ihnen eingeschlagenen Wege arbeiten wir Nachkommen in der Physiologie weiter und wir hoffen, trotz mancher schlimmen Anzeichen, dass nie mehr eine Zeit kommen werde, wo die mühsame Erforschung von Thatsachen wieder unsicheren, nicht auf dem Boden der letzteren aufgebauten Spekulationen Platz macht. Wenn es ihnen auch nicht gelang, wie sie im ersten Ansturm hofften, die Lebenserscheinungen auf einfache mechanische und physikalische Vorgänge zurückzuführen und somit zu erklären, und wenn wir jetzt auch wissen, dass die Dinge im Organismus nicht so einfach verlaufen, wie sie es sich anfangs zum Theil vorgestellt hatten, da dabei die verwickelten Bedingungen der Organisation mit eingreifen und die grössten Schwierigkeiten der Erforschung entgegenstellen, so ist und bleibt doch der von ihnen eingeschlagene Weg der einzig richtige und wir müssen fortfahren nach ihren Prinzipien das, was die Organisation Besonderes bietet, zu erforschen.

Du Bois-Reymond beschäftigte sich bei seiner wissenschaftlichen Thätigkeit fast ausschliesslich mit der Erforschung der für das Verständniss der Vorgänge im Nerven und Muskel so wichtigen elektrischen Erscheinungen im Thierkörper. Er hatte auf diesem ihm von seinem Lehrer Johannes Müller überwiesenen Felde fast keine Vorgänger und er musste fast alle Methoden der Untersuchung erst schaffen. Mit unendlicher Ausdauer und ganz ungewöhnlichem Geschick hat er die Sache soweit geführt als es zur Zeit geschehen konnte; allerdings war er wohl anfänglich der Meinung, dass es ihm gelingen werde die Geheimnisse der Vorgänge im Nerven und im Muskel weiter zu enthüllen als ihm dies schliesslich möglich war.

Du Bois-Reymond wurde am 7. November 1818 in Berlin geboren. Der Vater, ein aus Neuenburg gebürtiger Schweizer, muss ein merkwürdiger Mann gewesen sein, denn er betrieb zuerst das Uhrmacherhandwerk, bildete sich aber in grossem Wissenstrieb und, wie der Sohn meldet, in leidenschaftlicher Neigung für Erforschung der Natur weiter aus, wurde nach seiner Uebersiedelung nach Berlin Lehrer an der

Digitized by Google

Kadettenschule und schliesslich geheimer Regierungsrath und Vorstand des Bureaus für die Angelegenheiten des wieder an Preussen gefallenen Cantons Neuenburg; er that sich auch als sozialpolitischer Schriftsteller und als Sprachforscher hervor. Die Mutter, von der der Zuname „Reymond" stammt, gehörte einer der aus Frankreich vertriebenen Hugenottenfamilie an, welche die französische Colonie in Berlin bildeten.

Unter den Einflüssen französischer und deutscher Bildung entwickelten sich die Anlagen des Sohnes auf das Glücklichste. Jedoch war er bei dem Uebertritt an die Berliner Universität (Ostern 1837) noch nicht entschieden, welchem Studium er sich widmen wollte; er hörte alle möglichen Vorlesungen bis er in dem Colleg des Chemikers Eilhard Mitscherlich den Experimentirtisch mit den schönen Präparaten sah, wodurch er seinen Beruf erkannte. Dann hörte er noch bei Dove Physik, in Bonn neben Naturwissenschaften auch Geologie, hierauf in Berlin vorzugsweise Mathematik, ohne es aber, wie er berichtete, darin besonders weit zu bringen; jedenfalls hat er sich dabei die streng mathematische Denkweise angeeignet. Auf dem Turnsaale lernte er den Mediziner und Amanuensis von Johannes Müller, Eduard Hallmann, kennen, der ihm sagte, dass die höchsten und letzten lösbaren Probleme in der Physiologie lägen, dass aber der richtige Weg zu dieser Wissenschaft die Medizin sei. So wurde er denn im Wintersemester 1839/40 Mediziner und als Hallmann mit Schwann nach Lüttich gieng, der Nachfolger desselben am anatomischen Museum bei Johannes Müller. Zu dieser Zeit war er wie seine Freunde Brücke und Helmholtz in der Physik gründlich ausgebildet und so wie sie ausgerüstet die physikalischen Probleme im Thierkörper zu verfolgen; die organische Chemie war noch nicht so weit entwickelt, um von ihr in der Physiologie eine ausgedehntere Anwendung machen zu können.

Du Bois hat in der berühmten Vorrede zu seinen Untersuchungen über thierische Elektrizität erzählt, wie ihm im Frühling 1841 Johannes Müller den eben erschienenen Essai sur les phénomènes électriques des animaux von Matteuci mit

Digitized by Google

der Aufforderung übergeben habe, die darin enthaltenen Versuche über den Froschstrom zu wiederholen und womöglich weiter fortzuführen. Dies war der Ausgangspunkt einer Reihe glänzender Untersuchungen, welche fortan sein Leben fast ausschliesslich ausfüllen sollten. Am Ende des Jahres 1842 hatte er, in einem bescheidenen Privatraume arbeitend, schon die Gesetze des Muskel- und Nervenstroms sowie die negative Schwankung des Muskelstroms bei der Contraktion des Muskels entdeckt. Um sich den Erstbesitz zu sichern fasste er (1843) die gewonnenen Resultate in Poggendorff's Annalen in einem „vorläufigen Abriss einer Untersuchung über den sogenannten Froschstrom und über die elektromotorischen Fische" zusammen, der aber ohne Erläuterungen und Methoden keinen besonderen Eindruck machte. Du Bois war damals 25 Jahre alt und drei Jahre vorher zum medizinischen Studium übergetreten; bei den heutigen für die mittelmässigen Talente getroffenen Einrichtungen, bei denen man es zumeist als Zweck der Universität ansieht, dem Mediziner Fertigkeiten in allen möglichen Zweigen der Praxis wie in einer Fachschule beizubringen anstatt ihm eine möglichst breite wissenschaftliche Grundlage zu geben, durch welche er befähiget wird in der Medizin naturwissenschaftlich zu denken und in den speziellen Fällen sich dann leicht selbst zurecht zu finden, wäre es Du Bois in diesem Alter wohl nicht möglich gewesen, sich solche Kenntnisse zu erwerben und für die Wissenschaft ganz neue wichtige Thatsachen aufzufinden.

Er erkannte alsbald, dass er bei seiner Forschung auf einen Gang gestossen sei, der eine glänzende Ausbeute versprach, und er fühlte auch in sich die Kraft den Schatz zu heben. Und so gieng er denn mit einer Ausdauer ohne Gleichen und mit vollständiger Kenntniss der Lehren der Elektrizität sowie mit seltenem Talent der Experimentirkunst an die weitere Verfolgung des schwierigen Gegenstandes. Während einer Reihe von Jahren war „der Frosch und die Multiplikatortheilung seine Welt". Das Resultat dieser angestrengtesten siebenjährigen Arbeit und emsigsten Suchens war sein

Digitized by Google

berühmtes Werk: „Untersuchungen über thierische Elektrizität", von welchem 1848 der erste Band erschien, 1849 der erste Theil und 1860 der zweite Theil des zweiten Bandes. Zum ersten Male sehen wir darin ein ganzes Gebiet der Physiologie nach strengen Methoden der Physik erschlossen; ein neuer Zweig der Physiologie, der der elektrischen Muskel- und Nervenphysik, war entstanden. Zugleich waren neue Methoden, viele neue Vorrichtungen zur physiologischen Forschung geschaffen worden. Ausserdem geschah die Darstellung der Ergebnisse in der vollendetsten Form. Das Werk erregte durch die Fülle und die Bedeutung der neuen Thatsachen, durch die Genauigkeit und Sorgfalt der Beobachtungen das grösste Aufsehen; selten ist wohl ein Werk von gleicher Vollendung auf einen Schlag entstanden.

Er wies nach, dass von den lebenden Muskeln und Nerven der Thiere elektrische Ströme in gesetzmässiger Weise abgeleitet werden können und dass dabei der Querschnitt des Muskels und Nerven sich negativ verhält gegen einen Theil der äusseren Oberfläche oder des Längsschnitts (ruhender Nerven- und Muskelstrom). Er erkannte, dass diese Ströme in dem Augenblicke, wo der Nerv oder der Muskel thätig ist d. h. im Nerven der Bewegung und Empfindung vermittelnde Vorgang, im Muskel die Zusammenziehung stattfindet, an Intensität abnehmen (negative Schwankung). Er studirte den Einfluss eines durch den Nerven gesandten constanten elektrischen Stromes auf jenen ruhenden Nervenstrom (Elektrotonus) und stellte das allgemeine Gesetz der Nervenerregung beim Schliessen und Oeffnen des elektrischen Stromes auf, nach welchem nicht der absolute Werth der Stromdichtigkeit das Erregende für den Nerv ist, sondern die Veränderung dieses Werthes von einem Augenblick zum andern.

Durch diese Erfahrungen war man dem Verständniss der Vorgänge bei der Muskelzusammenziehung und der Thätigkeit der Nerven näher gerückt. Du Bois glaubte allerdings in seinem ersten Enthusiasmus jenen hundertjährigen Traum der Physiker und Physiologen von der Einerleiheit des Nervenwesens

Digitized by Google

und der Elektrizität, wenn auch in etwas abgeänderter Gestalt, zu lebensvoller Wirklichkeit erweckt zu haben. Er suchte die gefundenen Erscheinungen zu erklären, indem er annahm, dass das elektromotorische Verhalten von Nerv und Muskel von regelmässig angeordneten Molekülen herrührt, welche ihre positive Seite dem Längsschnitt und ihre negative Seite dem Querschnitt zukehren, d. h. er sah das elektromotorische Verhalten von Nerv und Muskel nicht als gleichgültige Begleiterscheinung an, sondern als die wesentliche Ursache der inneren Bewegungen, aus denen sich der Vorgang in den Nerven bei der Innervation, und in den Muskeln bei ihrer Thätigkeit zusammensetzt. Dagegen glauben jetzt viele Physiologen nach dem Vorgange von L. Hermann, dass die elektrischen Gegensätze im lebenden Nerv und Muskel nicht präexistiren, sondern durch die Anlegung des Querschnitts erst entstehen; bei der Aktion werden durch chemische Zersetzungen die erregten thätigen Theilchen negativ elektrisch gegen die nicht thätigen; der Elektrotonus ist die Folge der Polarisation eines von elektrolytisch leitender Masse umgebenen Kernleiters.

Wenn es daher auch Du Bois nicht geglückt ist, seiner Lehre den erhofften Abschluss zu geben und wir noch nicht im Stande sind die Vorgänge im Nerv und Muskel physikalisch zu erklären, so muss man doch anerkennen, dass die elektromotorischen Erscheinungen am Nerv und Muskel innig mit dem Leben derselben zusammenhängen und dass die negative Schwankung der Ausdruck der Thätigkeit der genannten Gebilde ist. Und namentlich darf nicht übersehen werden, dass die aus den Thatsachen gefolgerten Theorien stets dem Wandel unterworfen sind, während das Bleibende und Werthvolle die gefundenen Thatsachen sind, und mit vielen solchen Thatsachen hat Du Bois die Wissenschaft bereichert.

Er hat dann durch die Erfindung von Vorrichtungen, welche in allen physiologischen Laboratorien täglich benutzt werden, die Erforschung der Vorgänge am Nerv und Muskel ermöglichet: er hat dem Nobili'schen Multiplikator einen ausserordentlichen Grad von Empfindlichkeit gegeben; das allbekannte

Digitized by Google

Schlitten-Induktorium, den Vorreiber-Schlüssel, das Rheochord zur feinsten Abstufung der Stromstärke, den runden Compensator, den Froschunterbrecher, das Federmyographion, die unpolarisirbaren Elektroden eingeführt. Man kann wohl sagen, dass auch die Elektrotherapie sich wesentlich aus den Untersuchungen Du Bois' entwickelt hat.

Ganz besonderes Aufsehen hat die grosse geharnischte Vorrede zu seinem Werke gemacht und sie hat auf die Anschauungen in der Physiologie einen bestimmenden Einfluss ausgeübt. Sie war vor Allem gegen die damals noch nicht überwundene Lebenskraft als Ursache der Lebenserscheinungen gerichtet, gegen eine Kraft, welche verschieden von allen physikalischen und chemischen Kräften sein sollte. Es war dabei sein Bestreben, sich den ursächlichen Zusammenhang auch dieser complicirten Erscheinungen unter dem mathematischen Bilde der Abhängigkeit vorzustellen. Er that dar, dass in der Organisation den Stofftheilchen keine neuen Kräfte zukommen können, und nur unter dieser Annahme eine Erforschung der Lebensvorgänge möglich sei. In der festen Ueberzeugung, dass alle Lebensvorgänge auf Bewegungen der Materie beruhen und sich auf einfache physikalische und chemische Formeln zurückführen lassen, hielt er eine analytische Mechanik derselben für möglich. Allerdings erschien es ihm im Gegensatze dazu undenkbar, aus Bewegungen materieller Theilchen Empfindung und Bewusstsein abzuleiten, und er erblickte hier die Grenze des menschlichen Erkennens. Man hat gemeint selbst Liebig habe sich der Annahme einer Lebenskraft nicht ganz entziehen können, er habe den chemischen Wirkungen im Organismus nur eine sekundäre Rolle, gleichsam unter der Oberaufsicht der Lebenskraft zugeschrieben. Es finden sich allerdings in den Liebig'schen Schriften über diese Dinge, wie in anderen, vielfach Widersprüche, die sich daraus erklären, dass er eben Chemiker und nicht Physiologe war. So wird man unzweifelhaft Stellen finden, welche die obige Annahme zu beweisen scheinen, aber noch mehr andere, welche darthun, dass er im Organismus das Walten gewöhnlicher physikalischer und chemi-

Digitized by Google

scher Kräfte zu erweisen suchte, deren Wirkungen durch die eigenthümlichen Bedingungen der lebenden Organisation modificirt sind; sein Antheil an der Erkennung des Prinzips von der Erhaltung der Kraft lässt am besten seine wahre Anschauung erkennen. War er doch einer der ersten, welcher erwies, dass viele Vorgänge im Körper sich ebenso abspielen wie ausserhalb desselben im chemischen Laboratorium. Die Unmöglichkeit, schon jetzt die Vorgänge der Entwicklung, des Wachsthums etc. etc. auf physikalische und chemische Prozesse zurückzuführen, hat Manche neuerdings verleitet wieder das Wirken einer besonderen Lebenskraft anzunehmen; du Bois, der sich in dem Kampfe gegen diesen Feind der Forschung die Sporen verdient, ist in seinen alten Tagen dagegen als Streiter und Warner in die Arena getreten. Man stellte sich eben anfangs die Vorgänge zu einfach vor und übersah, dass die so ausserordentlich complizirten Bedingungen der Organisation mit in Betracht gezogen werden müssen und dass diese bei voller Giltigkeit der physikalischen und chemischen Gesetze doch eigenthümliche Erfolge hervorrufen.

Nach dem Erscheinen seines vorläufigen Abrisses (1843) konnte du Bois erst zur Bearbeitung einer Doktor-Dissertation und zur Promotion schreiten und drei Jahre darnach zur Habilitation als Privatdozent; acht Jahre lang hielt er aber, um sein grosses Werk vollenden zu können, keine Vorlesung. Erst im Jahre 1855 wurde der berühmte Mann ausserordentlicher Professor, im Jahre 1858 nach Johannes Müller's Tode ordentlicher Professor und des Letzteren Nachfolger im Amte. Aber die Arbeitsstätte blieb noch lange Zeit die alte, ein Zimmer mit einem langen schmalen Gang und eine Dachkammer, zu der eine steile Wendeltreppe führte; erst nach dem Jahre 1870 entstand das neue würdige physiologische Institut, dessen innere Organisation jedoch von gewissen Mängeln nicht frei ist.

Du Bois blieb Zeit seines Lebens bei dem Probleme, welches er sich bei seinem Eintritt in die Wissenschaft erobert hatte; denn er war ein bedächtiger, schwer arbeitender Forscher,

Digitized by Google

der es für richtig hielt dieses wichtige Problem mit aller Kraft zu verfolgen; unablässig war er mit der Verfeinerung der Methoden und der Ergänzung der Ergebnisse, sowie der Vertheidigung seiner Theorie beschäftiget. In diesem Bestreben folgten seine Theorie der astatischen Nadelpaare, die Untersuchung der Schwingung der Magnete unter dem Einfluss der Astasirung und der Dämpfung, die über die Bedingungen der aperiodischen Bewegung schwingender Magnete, über die Messung des zeitlichen Verlaufs der inducirenden und inducirten Ströme bei Induktorien und im Telephon, über Flüssigkeits-Ketten, über innere Polarisation poröser mit Flüssigkeiten getränkter Leiter, über Polarisation der Elektroden und unpolarisirbare Combinationen von Metallen und Salzlösungen, über elektrische Endosmose, über die kataphorischen Wirkungen des Stroms, über die elektrische Fortführung suspendirter Pulver, über die Ströme beim Schütteln und Drücken der Elektroden u. s. w.

Besondere Mühe verwendete er auf das Studium der Erscheinungen bei den elektrischen Fischen. Der so gewaltige Wirkungen ausübende Schlag des elektrischen Organes dieser Thiere muss als eine der negativen Schwankung des thätigen Nerven und Muskels analoge Erscheinung angesehen werden und es drängt sich unwillkürlich die Ansicht auf, dass die Platten, welche die elektrischen Organe zusammensetzen, in elektrischer Beziehung ähnlich wie die Muskeln wirken. In den elektrischen Organen vermag die Elektrizität wirklich innere Bewegungen und Wirkungen im lebenden Organismus hervorzubringen, wodurch der Gedanke nahegelegt wird, ob nicht auch bei der Thätigkeit von Nerv und Muskel die Elektrizität eine wesentliche Rolle spielt und nicht nur eine nebensächliche Begleiterscheinung ist.

Ausser seiner rein wissenschaftlichen Thätigkeit hat sich du Bois durch seine berühmten Reden, welche er als ständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften und bei anderen Gelegenheiten hielt, in weiten Kreisen bekannt gemacht. In meisterhafter Weise hat er darin naturwissenschaftliche und philosophische Fragen von allgemeinem Interesse behandelt und

Digitized by Google

er hat durch dieselben die Bedeutung der Naturwissenschaft für die Erkenntniss und für die allgemeine Bildung dargethan. Seine umfassenden Kenntnisse in den Naturwissenschaften, der Philosophie und der Literatur, die er sich bei der Beherrschung der Cultur-Sprachen durch eifriges und aufmerksames Lesen erworben hatte, befähigten ihn dazu sich in die Anschauungen der Zeiten zu versenken und die Ansichten der Menschen in geistreicher und formvollendeter Weise zu schildern und lebendig vorzuführen. Auch wenn man mit seinen Darstellungen und Schlussfolgerungen nicht immer einverstanden ist, so wird man diese Reden doch stets mit dem grössten Interesse lesen und durch sie zu weiterem Denken angeregt werden.

An der Universität waren es insbesondere seine Vorlesungen über die neuesten Ergebnisse der Naturwissenschaften sowie über physische Anthropologie, welche durch die klare und schöne Darstellung einen grossen Theil der Studierenden aller Fakultäten fesselten und naturwissenschaftliches Wissen verbreiteten.

Du Bois war eine kraftvolle, energische Persönlichkeit, von würdevollem und förmlichem Wesen; dabei ein Mann von fester Wahrheitsliebe und Ueberzeugungstreue. Als ein geistreicher Gelehrter von ausgebreitetem Wissen nahm er lebendigen Antheil an der Entwicklung der Wissenschaften sowie an allem Guten und Schönen, auch war er bereit Anderen zu helfen, wo er ein redliches Bestreben wahrnahm. In dem unstillbaren Drang nach weiterer Erkenntniss und von hohem wissenschaftlichen Ernst war sein Leben durch geistige Arbeit ausgefüllt, durch welche er die Naturwissenschaft mächtig gefördert hat. Er wird, neben seinen Freunden Brücke, Helmholtz und Ludwig, stets genannt werden als Erretter der Physiologie in Deutschland aus dem unseligen Banne des Vitalismus und als Führer in der Erforschung der Lebenserscheinungen durch das Experiment.

Digitized by Google

Joseph v. Gerlach.

Am 17. Dezember 1896 starb in München der Geheimrath und frühere Professor der Anatomie an der Universität Erlangen, Dr. Joseph v. Gerlach, im Alter von 76 Jahren.

Am 3. April 1820 zu Mainz geboren bezog er nach Absolvirung des Gymnasiums die Universität Würzburg, um Medizin zu studiren, und setzte dann seine Studien in München und Berlin, wohin ihn der Ruhm von Johannes Müller gezogen hatte, fort. Er promovirte hierauf 1841 in München mit einer Abhandlung über das Eiterauge, und liess sich, nachdem er zu seiner weiteren ärztlichen Ausbildung Wien, Paris und London besucht hatte, in seiner Vaterstadt Mainz als praktischer Arzt nieder (1847).

Aber er erwies sich bald als eines jener seltenen Phänomene innerhalb des ärztlichen Standes, die über den Mühen und Sorgen des Berufes hinaus noch die Zeit zu gewinnen verstehen, eingehenden Studien zu obliegen, und in sich selbst Kraft und Talent finden, autodidaktisch sich zur Beherrschung ihnen bisher nur oberflächlich bekannter Gebiete emporzuschwingen. Ein solches Gebiet hatte sich der Arzt Gerlach in der Histologie ausersehen und überraschte die Anatomen im Jahre 1848 durch sein Handbuch der allgemeinen und speziellen Gewebelehre, ein Werk, das man nach maassgebendem Urtheile wohl als die Grundlage der heutigen Kenntniss von den Geweben des thierischen Körpers bezeichnen darf und das sich vor der voraufgegangenen allgemeinen Anatomie Henle's dadurch namentlich vortheilhaft unterschied, dass in demselben die empirische Basis strenge eingehalten wurde. Dieses durch eine Fülle selbständiger Beobachtungen und objektives Urtheil ausgezeichnete Werk erlebte 1852 seine zweite Auflage, und wenn dasselbe später auf dem Markte verdrängt wurde, so erklärt sich dies durch eine zunehmend reichere Ausstattung der konkurrirenden Lehrbücher, denen es als Vorbild gedient hatte.

Der praktische Arzt Dr. Gerlach wurde in Anerkennung

Digitized by Google

dieser seiner Leistung von dem Anatomen J. Arnold als Prosektor nach Tübingen gezogen, erhielt aber bald (1850) einen ehrenvollen Ruf an die Universität Erlangen als Professor der normalen und pathologischen Anatomie und der Physiologie. Da die beiden letzteren Fächer auch in Erlangen wie an anderen Universitäten als selbständige abgezweigt wurden, so gab er im Jahre 1860 die pathologische Anatomie an Zenker, 1872 die Physiologie an Rosenthal ab. Im Jahre 1894 trat er in den Ruhestand und verbrachte das Otium cum dignitate in München oder auf seiner Besitzung in Ambach am Starnbergersee.

Die Universität Erlangen hatte ihre Wahl, die vielleicht Manchem als eine gewagte erschienen sein mag, nicht zu bereuen, sie war eine der glücklichsten für die Hochschule. Denn Gerlach erwies sich als ein ganz vorzüglicher Lehrer der Anatomie; durch seine grosse Liebenswürdigkeit und Freundlichkeit gegen die strebsamen Schüler, durch die bis ins hohe Alter bewahrte jugendliche Frische und durch die klare Darlegung dessen, worauf es ankam, übte er einen nachhaltigen, anregenden Einfluss auf die studirende Jugend aus. Er wurde von dem dortigen Lehrkörper als eines seiner verdientesten Mitglieder und als eine seiner ersten Zierden angesehen. Er blieb auch sein ganzes Leben lang Erlangen getreu; eine Berufung nach Basel und eine weitere nach Giessen hat er dankend abgelehnt. Ich vergesse es ihm nicht, mit welcher Freundlichkeit er mir als ganz jungem Anfänger in der Wissenschaft bei einer Naturforscherversammlung entgegenkam und ermunternde Worte an mich richtete.

In der Wissenschaft hat Gerlach hauptsächlich durch technische Neuerungen in der Anatomie gewirkt. Noch in Mainz hat er im Jahre 1847 die Füllung der Capillaren mit der durchsichtigen rothen Carmin-Ammonium-Gelatine gelehrt, statt der früher von Anderen, namentlich von Hyrtl geübten Injicirung mit durch Zinnober gefärbter undurchsichtiger Wachsmasse; wunderbare, höchst instruktive Präparate der Art sind von ihm hergestellt worden.

Digitized by Google

Seine Abhandlung über den Zottenkrebs und das Osteoid (1852) sind der Zeit entsprossen, wo er noch die pathologische Anatomie zu lehren hatte.

Bahnbrechend trat er durch die Begründung der Färbungstechnik auf, welche jetzt ein unentbehrliches Forschungsmittel geworden ist und die Grenzen der mikroscopischen Wahrnehmung in ungeahnter Weise erweiterte. Seine „mikroscopischen Studien aus dem Gebiete der menschlichen Morphologie" brachten (1858) die erste Kunde von seiner Entdeckung, die mikroscopischen Präparate künstlich zu färben. Er hatte die Eigenschaft des todten Zellprotoplasmas und namentlich des Kerns desselben gefunden, sich mit Carmin in ammoniakalischer Lösung roth zu färben, gleichzeitig mit dem Engländer Beale, er war aber letzterem in der Publikation voraus. Es war dadurch ein bedeutsamer Unterschied des todten und des lebenden Gewebes dargethan worden. Es ist dies unstreitig als seine bedeutendste Leistung zu bezeichnen, denn man hat in der That durch diese in allen biologischen Wissenschaften eingebürgerte Färbungsmethode ganz neue Aufschlüsse über den feineren Bau der normalen und pathologischen organisirten Gebilde erhalten.

Als scharfer Beobachter, objektiv urtheilender Forscher und hervorragender Techniker bewährte sich Gerlach auch in seiner Monographie über die Histologie des Rückenmarks, welche in dem histologischen Sammelwerk von S. Stricker (1872) erschienen ist.

Wenn auch seine Arbeiten über das „Verhältniss der Nerven zu den willkürlichen Muskeln der Wirbelthiere" (1874) nicht von dem Beifall der Fachgenossen begleitet waren, so muss doch zugestanden werden, dass er sich dabei einer vollendeten Technik bediente und sorgfältig beobachtete.

In seinen „Beiträgen zur normalen Anatomie des menschlichen Auges" (1880) hat er Manches bemerkenswerthe zur Anatomie dieses schon so vielfach durchsuchten Organes gebracht.

Endlich hat er sich noch ein Verdienst erworben durch die

Digitized by Google

Benützung der Photographie als Hilfsmittel der mikroscopischen Forschung (1863).

Gerlach gehört unbedingt in den Kreis der hervorragenden Histologen seiner Zeit und man wird sich in der Histologie stets der von ihm geschaffenen Methoden bedienen.

Ferdinand Jacob Heinrich v. Müller.

Am 9. Oktober 1896 starb in Melbourne der Botaniker Freiherr Ferdinand v. Müller, welcher sich ganz hervorragende Verdienste um die Kenntniss der Flora Australiens erworben hat.

Im Jahre 1825 zu Rostock geboren, widmete er sich der Pharmazie; nach Beendigung seiner Lehrzeit in einer Apotheke besuchte er die Universität in Kiel, woselbst er sich, begeistert für die Naturwissenschaft, mit Vorliebe dem Studium der Botanik zuwandte. Es schien sich damals bei ihm ein Lungenleiden entwickeln zu wollen, wesshalb die Aerzte ihm anriethen, ein wärmeres Klima aufzusuchen. Er entschloss sich dazu um so lieber, als ihn der Wunsch, eine ausländische Flora kennen zu lernen, beseelte, und so kam er im Jahre 1847 nach Australien, woselbst er sein ganzes übriges Leben zubringen sollte.

Er verdingte sich zuerst als Gehilfe in einer Apotheke in Adelaide, als welcher er sich bald durch die Beschäftigung mit der dortigen Pflanzenwelt bemerklich machte. Dann unternahm er auf eigene Kosten während vier Jahren grosse botanische Exkursionen in Südaustralien, besonders in der Colonie Victoria, wobei er über 4000 englische Meilen zurücklegte und als einer der ersten die australischen Alpen erklomm. Durch den Bericht über die dabei erhaltenen, für die Pflanzengeographie wie für die Systematik wichtigen Resultate wurde die Aufmerksamkeit der Colonialregierung auf den jungen Forscher gelenkt, so dass er im Jahre 1852 unter dem ersten Gouverneur von Victoria, La Trobe, zum Regierungsbotaniker der Colonie Victoria ernannt wurde.

In dem gleichen Jahre erschien seine erste grössere Mit-

Digitized by Google

theilung über neue Pflanzen Australiens in der Linnaea, 105 Arten und mehrere neue Gattungen aus den verschiedensten Familien umfassend, welcher unmittelbar, unter dem Titel: Plantae Müllerianae, eine Reihe von Darlegungen verschiedener Autoren über Pflanzen folgte, welche Müller ihnen zur Bearbeitung übergeben hatte.

Hierauf betheiligte er sich als Botaniker an der unter A. L. Gregory von der Regierung ausgesandten wissenschaftlichen Expedition (1855—1856) zur Erforschung des Victoria River und anderer tropischer Distrikte in Central- und Nordaustralien. Nach der Rückkehr von dieser Reise, von der er ein reiches Material heimbrachte, wurde er Direktor des von ihm angelegten grossen botanischen Gartens in Melbourne, welches Amt er bis zum Jahre 1873 inne hatte.

Nun entwickelte er eine rastlose Thätigkeit. Um eine Vorstellung davon zu geben, seien von seinen zahlreichen und umfangreichen Veröffentlichungen, welche zumeist in englischer Sprache geschrieben sind, nur die wichtigsten hervorgehoben.

In den Jahren 1858—1882 erschienen die elf Bände seines grossartigen Werkes: „Fragmenta Phytographiae australiae"; von 1860—1865 die einheimischen Pflanzen der Colonie Victoria; 1879 seine Eucalyptographia, ein beschreibender Atlas der australischen Eucalypten oder Gummibäume, deren Wirkung gegen das Wechselfieber er entdeckte; ferner die Iconographie der Acacien; die Monographie der Myoporineen und der Salsolaceen; 1865—1873 die Flora Australiana; 1864 die Studien über australische Moose; 1864 die Vegetation der Chatham-Inseln; 1876 ausgewählte Pflanzen zur Cultur und Einbürgerung in Victoria; 1874—1883 die vegetabilischen Fossilien aus Goldlagern; die Pflanzen von Neu-Süd-Wales; und endlich 1882 der Systematic Census of Australien Plants, eine nach dem natürlichen System geordnete Aufzählung aller australischen Pflanzen mit Angaben der literarischen Quellen, der wichtigsten Compendien und der geographischen Verbreitung.

Ausser dieser seiner wissenschaftlichen Thätigkeit hat sich Müller ein ausserordentliches Verdienst durch seine Mittheilsam-

Digitized by Google

keit und Freigebigkeit erworben. Durch die Güte von Collega Radlkofer habe ich hierüber die folgenden Data erhalten.

Müller war mit liebenswürdigstem Entgegenkommen stets bereit von den botanischen Schätzen, die er in Melbourne zu vereinigen wusste und die zum guten Theile erst seiner rastlosen Thätigkeit ihre Hebung verdankten, auch Anderen das ihnen Wünschenswerthe zukommen zu lassen.

Kein Monograph wendete sich vergeblich an ihn, um das etwa anderwärts nicht zu erreichende australische Material für seine Studien zu erlangen.

Alle botanischen Centren Europa's erfreuten sich seiner Munificenz.

Seltene und kostbare lebende Pflanzen für die botanischen Gärten, auserlesenes Herbarmaterial für die botanischen Museen vertheilte er mit offenen Händen.

Auch unsere Sammlungen in München erfreuten sich schon zu Lebzeiten von Herrn v. Martius erheblicher Zusendungen von Seiten Müller's, und dieser ihm zum Bedürfniss und zur Gewohnheit gewordenen Gepflogenheit blieb er treu bis zu seinem Tode.

Von werthvollen Pflanzen erhielt der hiesige botanische Garten im Jahre 1865 namentlich zwei prachtvolle, mannshohe Baumfaren (Dicksonia antarctica, Endl.) und einen anderen, holzklotzartigen Baumfarn (eine Todea australis, Rob. Brown), von welchen Pflanzen damals wohl jede einen Werth von 200 Mark besass, und welche Müller weit aus dem Inneren Australiens auf eigene Kosten herbeigeschafft hatte.

Das k. Herbarium erhielt wiederholt Sendungen von je 500 und 600 Arten australischer Pflanzen und wohl jeden Monat, ja zeitenweise jede Woche kamen kleinere Packete mit einer Auswahl von Pflanzen aus bald dieser bald jener, gerade erneuter Durchsicht unterzogenen Familie, sowie Sämereien für den Garten.

Auch so ziemlich alle seine Publikationen, darunter werthvolle Tafelwerke, sandte er an die k. Akademie.

Und nicht blos den botanischen Sammlungen Europa's

Digitized by Google

führte Müller von seinen Schätzen zu, sondern auch den paläontologischen, zoologischen, mineralogischen, anthropologischen und ethnographischen Sammlungen hat er seine Aufmerksamkeit und Munificenz zugewendet. So hat er den ehrwürdigen Owen in den Stand gesetzt, die Entwicklungsgeschichte der Monotremen um ein beträchtliches weiter zu führen; er hat es durchgesetzt, dass die grosse, mehr als 8000 Pfund schwere Meteormasse von Western Port einen Platz im brittischen Museum gefunden.

Auch der Industrie und dem Handel hat er durch Entdeckung wichtiger Harze, Oele, Farbstoffe und Holzarten gedient.

Es giebt wohl nicht leicht Jemand, von dem man wie von Müller sagen könnte, dass er die Pflanzenfülle eines ganzen Welttheiles beherrscht und zum guten Theile selbst erst kennen gelernt, sowie der ganzen wissenschaftlichen Welt zugänglich gemacht hat.

Wenn Müller trotz seiner eingehenden Kenntniss der australischen Pflanzenwelt die Herausgabe einer Gesammtflora Australiens, die im Jahre 1861 in Frage kam, einem anderen, G. Bentham nämlich, überliess, und sich bescheidete neben diesem auf dem Titel des in den Jahren 1863—1877 erschienenen, sieben Bände umfassenden Werkes als Mitarbeiter genannt zu werden, so ist das in dem Umstande begründet, dass ihm in der jungen Colonie nicht, wie Bentham, die dazu nöthigen literarischen Hilfsmittel und die diesen zu Grunde liegenden, in den europäischen Herbarien aufgespeicherten authentischen Materialien aus früherer Zeit zu Gebote standen, auf welche ein solches Werk sich stützen musste. Sicherlich aber hat er das grosse Verdienst, diesem Werke durch seine Schriften und seine Sammlungen zu dem Grade der Vollkommenheit verholfen zu haben, den es besitzt, wie auch Bentham in der abschliessenden Vorrede zu dem 7. Bande der Flora australiensis (1877) auf das Anerkennendste hervorhebt.

Es wurden Müller wegen seiner Verdienste viele Ehren zu Theil, auf die er grossen Werth legte. Er war Mitglied

Digitized by Google

der Royal Society sowie Besitzer einer Medaille derselben; correspondirendes Mitglied von 150 gelehrten Gesellschaften; unserer Akademie gehörte er seit dem Jahre 1866 an; vom König von Württemberg wurde er in den Freiherrnstand erhoben; die Geographen haben ihm zu Ehren einen Fluss in Queensland, einen Berg in Spitzbergen, eine Bergkette in Neu-Guinea, einen Wasserfall in Brasilien und einen Gletscher in Neu-Seeland benannt.

Müller hat viel dazu beigetragen, die deutsche Wissenschaft in Australien zur Anerkennung zu bringen und er galt mit Recht als der erste Naturforscher dieses Welttheils. Sein Tod hinterlässt eine Lücke, die auszufüllen kaum möglich sein wird; er wird schwer und lang vermisst werden von allen, die mit ihm in Verkehr gestanden haben.

Gustav Adolf Kenngott.[1])

Der verdiente Mineraloge Gustav Adolf Kenngott, vormals Professor der Mineralogie an der Universität und am Polytechnikum zu Zürich ist am 14. März 1897 in Lugano, wohin er sich nach seinem Rücktritte vom Amte zurückgezogen hatte, um in Ruhe seine Tage zu beschliessen, im 79. Lebensjahre gestorben.

Er kam am 6. Januar 1818 in Breslau als Sohn eines Handschuhmachermeisters zur Welt. Nach Absolvirung des Gymnasiums seiner Vaterstadt studirte er an der Universität daselbst Mathematik und Naturwissenschaften; sein Interesse war von Anfang an vor Allem der Mineralogie zugewandt, so dass er bald auf Grund einer krystallographischen Arbeit den Doktorgrad erlangen konnte. Zwei Jahre darauf (1844) habilitirte er sich als Privatdozent für Mineralogie, Krystallographie und Geognosie an der Universität Breslau. Da er aber daselbst trotz reger Lehrthätigkeit keine Stellung fand, gieng er 1850

[1]) Mit Benützung des Nekrologs von U. Grubenmann in der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 1897 Jahrgang 42. S. 74.

Digitized by Google

nach Wien, wo ihm die reichen Sammlungen des Hofmineralienkabinets unter den Direktoren Partsch und Haidinger vielfache Anregung zu wissenschaftlicher Thätigkeit boten. Nachdem er eben eine Professur für Naturgeschichte an der neu errichteten ersten Oberrealschule in Pressburg angetreten hatte, erhielt er (1852) eine Anstellung als Kustos-Adjunkt an dem Hofmineralienkabinet zu Wien. Von da wurde er im Jahre 1856 als ordentlicher Professor der Mineralogie an das kurz vorher begründete eidgenössische Polytechnikum und dann an die Universität zu Zürich berufen. Er wirkte an diesen Hochschulen 37 Jahre lang als sehr beliebter Lehrer auf das Erspriesslichste, bis er als müder Greis (1893) in den wohl verdienten Ruhestand trat. Von 1875 bis 1881 bekleidete er, in Folge des Vertrauens der Schulbehörde und seiner Collegen gewählt, das schwierige Amt des Direktors des Polytechnikums. Ein grosses Verdienst erwarb er sich auch um beide Anstalten durch die Ordnung und Neuaufstellung der reichen mineralogischen Sammlungen derselben.

Aus der naturgeschichtlichen Schule hervorgegangen, bezog sich die wissenschaftliche Thätigkeit Kenngott's im Wesentlichen auf die genaue Beobachtung und sorgfältige Beschreibung der Objekte, weniger auf die Erforschung der Ursachen der Erscheinungen; der neueren physikalischen Richtung der Mineralogie war er sogar abhold. Er hat aber die Wissenschaft durch eine sehr grosse Anzahl von Einzelarbeiten in ersterer Richtung bereichert. Anfangs beschäftigte er sich zumeist mit krystallographischen Untersuchungen, später mit der Systematik der Mineralien, indem er lokale Vorkommnisse derselben angab, Speziesformen präzisirte, chemische Analysen ausführte und Formeln aufstellte. Bei seinen Studien über kaukasische und isländische Obsidiane (1870) betrat er auch das Gebiet der mikroscopischen Gesteinsanalyse durch Dünnschliffe.

Er hat auch eine Reihe von trefflichen Lehr- und Hilfsbüchern der Mineralogie und Petrographie geschrieben, von welchen mehrere eine grosse Verbreitung gefunden haben. Hier sind vor Allem zu nennen die zwölf Bände seiner Ueber-

Digitized by Google

sichten der Resultate mineralogischer Forschung von 1844 bis 1865; dann die Minerale der Schweiz nach ihren Eigenschaften und Fundorten (1866) beschrieben auf Grund der grossen Mineraliensammlung von Dr. David Wiser; ferner das Lehrbuch der reinen Krystallographie (1846), das in fünf Auflagen erschienene Lehrbuch der Mineralogie, die Elemente der Petrographie (1868), das dreibändige Handwörterbuch der Mineralogie, Geologie und Paläontologie (1882).

Kenngott war ein schlichter Gelehrter, der in treuer Pflichterfüllung ganz seinem Beruf und der Wissenschaft lebte. Seinen Schülern war er ein väterlicher Freund. Unter seinen Fachgenossen fand er wegen seiner Verdienste um die Mineralogie allseitige Anerkennung, wesshalb er auch zum Mitglied vieler wissenschaftlicher Gesellschaften gewählt wurde; unserer Akademie gehörte er auf den Vorschlag von Franz v. Kobell seit dem Jahre 1862 an. Es wird dem strebsamen Forscher ein gutes Andenken in der Wissenschaft bewahrt werden.

Heinrich Ernst Beyrich.[1])

Am 9. Juli 1896 ist zu Berlin der geheime Bergrath, Professor der Geologie an der Universität und Direktor der k. preuss. geologischen Landesanstalt, Heinrich Ernst Beyrich, einer der ausgezeichnetsten Geologen und Paläontologen unserer Zeit gestorben.

Beyrich hat durch seine ausserordentlich sorgfältigen Arbeiten sowie durch seine vielseitigen und tiefen Kenntnisse die geologische Wissenschaft ganz ungemein bereichert; er hat aber durch seine im grossen Maassstabe ausgeführten geognostischen Karten auch auf den Bergbau, den Strassen- und Eisenbahnbau, und auf die Land- und Forstwirthschaft seines Vaterlandes einen sehr förderlichen und segensreichen Einfluss ausgeübt.

Er erblickte zu Berlin am 31. August 1815 das Licht der

[1]) Als Grundlage diente der vortrefflich geschriebene Nachruf von K. v. Fritsch (Leopoldina 1896 Nro. 7).

Digitized by Google

Welt. Schon früh trat seine ungewöhnliche Begabung hervor und er konnte schon im Alter von 16 Jahren, nach Erlangung des Reifezeugnisses an einem Berliner Gymnasium, die Universität seiner Vaterstadt beziehen. Anfangs studirte er mit Vorliebe Botanik, aber durch den Mineralogen Christian Samuel Weiss, der so manche Jünger für seine Wissenschaft begeistert hatte, wurde er angeregt sich der Mineralogie und Geognosie zu widmen. Da er die Bedeutung der Paläontologie für stratigraphische Forschungen erkannt hatte, begab er sich zu Ostern 1834 nach Bonn, woselbst er bei Goldfuss und Nöggerath die Petrefaktenkunde betrieb. Um sich die für sein Fach nöthige eigene Anschauung der Natur anzueignen liess er auf die drei Lehrjahre an der Universität zwei Wanderjahre folgen, während deren er zu Fuss, zumeist in Begleitung seines um vier Jahre älteren Freundes Julius Wilhelm Ewald, fast ganz Deutschland und viele Theile Frankreichs durchzog, eifrig beobachtend und sammelnd.

Dabei entdeckte er in den seit langer Zeit verlassenen Eisensteingruben bei Framont im oberen Breuschthale der Vogesen im Brauneisenerze das merkwürdige Vorkommen von Phenakit, des kieselsauren Berylls, worüber er in einer ersten Veröffentlichung in Poggendorff's Annalen berichtete.

In einer Leopold v. Buch gewidmeten Schrift berichtete er über die im rheinischen Gebiete von ihm gesammelten paläontologischen Goniatiten, diese ältesten Ammoniten; auf Grund dieser Abhandlung wurde er im Jahre 1837 zum Doktor der Philosophie promovirt.

Dann folgte im Jahre 1841 seine Habilitation als Privatdozent an der Universität Berlin. In dem gleichen Jahre wurde er zum ersten Male zu grösseren Aufgaben des Staates, nämlich zu den von Seiten des k. preussischen Handelsministeriums auf den Antrag des Herrn H. v. Dechen beschlossenen geologischen Untersuchungen des Landes, zugezogen. Es war ihm dies um so wichtiger, da er den Nutzen guter, in grossem Maassstabe hergestellter geognostischer Karten für die geologische Wissenschaft erkannt hatte.

Digitized by Google

Im Jahre 1845—1846 erschienen seine bahnbrechenden Abhandlungen über die böhmischen Trilobiten; diese früheren Meerbewohner schliessen sich den Krebsen an und gehören zu den ältesten Formationen der Erdbildung, zu den untersten Schichten des Uebergangsgebirges. Es waren dies wohl seine bedeutendsten wissenschaftlichen Leistungen in der Paläontologie, welche seine Beförderung zum ausserordentlichen Professor der Geologie an der Universität Berlin nach sich zogen.

Von da an beginnt seine energische Thätigkeit für die geologische Landesaufnahme. Das k. Handelsministerium beauftragte ihn (1846) mit der Ordnung und Katalogisirung der ihm zugehörigen bedeutenden Mineraliensammlung sowie mit der Leitung der Herstellung der geologischen Karte von Niederschlesien. Dabei hatte sein Mitarbeiter Gustav Rose vorzüglich die Beschreibung der krystallinischen Felsarten übernommen, Beyrich neben den Gneissen und Hornblendeschiefern bei Freiwaldau die Sedimentbildungen; ausserdem waren auch Justus Roth und Runge bei den Aufnahmen betheiliget. Diese grossartige und mühevolle Arbeit fand nach 19 jähriger Dauer (1860) einen vorläufigen Abschluss, nachdem er schon im Jahre 1849 die Freude gehabt hatte, das erste Blatt der geologischen Karte von Niederschlesien bei dem ersten Vortrage der ersten wissenschaftlichen Sitzung der deutschen geologischen Gesellschaft zu Berlin vorlegen zu können.

In dem ersten Bande der Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft sind zwei von ihm ausgearbeitete Karten enthalten; in der einen sind die interessanten Kreidegebilde zwischen Halberstadt, Blankenburg a. H. und Quedlinburg dargestellt; die andere bringt das Bild der geologischen Massenverbreitung der Umgebung von Regensburg zur Anschauung; die letztere Karte wurde von ihm in der kurzen Zeit der ersten allgemeinen Versammlung der deutschen geologischen Gesellschaft zu Regensburg zur Ueberraschung der Theilnehmer fertig gestellt.

Zu dieser Zeit entwickelte er eine ausserordentliche Thätigkeit; eine grosse Anzahl von Publikationen verschiedenen In-

Digitized by Google

halts sind die Früchte derselben. Aus diesen müssen besonders hervorgehoben werden seine grundlegenden Arbeiten über die Conchylien des norddeutschen Tertiärgebietes und über die Abgrenzung der oligocänen Tertiärzeit. Alle Kenntniss dieses neueren, vierten Zeitalters der Entwicklung der Erde in Norddeutschland fusst auf seinen Beobachtungen über die Verbreitung und Gliederung der Tertiärbildungen und auf den Bestimmungen der darin vorkommenden Thiere, hauptsächlich der Mollusken. Dabei erschien es ihm nothwendig, die obersten Schichten der älteren Gruppe der Tertiärablagerungen als oligocäne von den anderen zu unterscheiden, und er hat durch diese Einführung des Begriffes „oligocän" einen bedeutsamen Fortschritt angebahnt. Ferner muss genannt werden die wichtige Abhandlung über die zu den Stachelhäutern gehörigen Crinoiden des Muschelkalkes (1857).

Mittlerweile hatten seine äusseren Lebensverhältnisse manche Veränderungen erfahren. Er war 1853 Mitglied der k. preuss. Akademie der Wissenschaften geworden; 1855 Custos der Mineraliensammlung der Ministerialabtheilung für Berg-, Hütten- und Salinenwesen. 1857 wurde er mit der Ertheilung des Unterrichtes an die Candidaten für das Bergwesen und später an die der 1860 gegründeten Bergakademie betraut; im gleichen Jahre wurde er zweiter Beamter der k. mineralogischen Sammlung der Universität, dann 1858 nach dem Tode von Weiss Direktor der paläontologischen Sammlung, 1865 ordentlicher Professor der Geologie und Paläontologie an der Universität und endlich 1875 nach dem Tode von Rose Direktor der vereinigten Museen.

Nach dem Abschlusse der Arbeiten in Niederschlesien erwies es sich als nöthig die Landesaufnahme auf den südlichen Theil der Provinz Sachsen und die umgebenden Länder auszudehnen. Im Anfange hatte er die Beobachtungen am südlichen Harz allein vorzunehmen, später wurden ihm jüngere Hilfskräfte zugesellt; er beobachtete bei dieser Gelegenheit die merkwürdige starke Ungleichförmigkeit der Lagerung zwischen dem Zechstein und dem Rothliegenden. Aber die Schwierig-

Digitized by Google

keiten der Aufnahme wuchsen im Harz und in Thüringen der Art, dass noch zahlreiche Hilfsarbeiter zugesellt werden mussten und Beyrich nur mehr die Oberleitung führen konnte. So entstand allmählich unter seinem Einflusse eine grössere Behörde für die geognostische Landesuntersuchung, bei welcher Beyrich die wissenschaftliche Leitung der geognostischen Aufnahme des preussischen Staates erhielt (1868) und dann deren Vorstandsmitglied (1873) und Direktor (1875) wurde. Diese grosse geologische Landesanstalt hat unter seiner Leitung ungemein viel zu Wege gebracht; er hat es verstanden seine Mitarbeiter zum Schaffen anzuregen und ihnen die richtigen Aufgaben zu stellen.

So war er bis in sein Greisenalter an der Universität und der Landesanstalt für die Wissenschaft thätig. Seine Verdienste fanden auch überall die verdiente Anerkennung, indem er zum Mitglied vieler Akademien und gelehrter Gesellschaften gewählt wurde. Er war einer der Begründer der so nützlich wirkenden deutschen geologischen Gesellschaft (1848); als ihr Vorsitzender sowie als Leiter der Geschäfte und als Redakteur der Zeitschrift derselben hat er durch seine Willenskraft und seinen lauteren Charakter für die Entwicklung der Geologie in Deutschland ungemein viel Gutes gethan. Er ist es endlich auch vor Allem gewesen, der die Geologen aller Länder bei ihrer ersten internationalen Versammlung zu Bologna zu bestimmen wusste, eine gemeinsame Aufgabe sich zu stellen, nämlich die geologische Uebersichtskarte von Europa; dieselbe wurde der k. geologischen Landesanstalt zu Berlin übertragen, von welcher schon im Jahre 1895 die erste Lieferung der Karte herausgegeben wurde.

Das Lebenswerk Beyrich's ist mit seinem Tode nicht abgeschlossen, es wird durch seine Schüler in seinem Sinn und Geiste zum Wohle der Wissenschaft fortgesetzt werden.

Digitized by Google

Gabriel August Daubrée.

Am 29. Mai 1896 starb im 82. Lebensjahre zu Paris der berühmte Geologe August Daubrée. Er war lange Zeit hindurch der anerkannte Führer der französischen Geologen, der, durch ausgebreitete Kenntnisse in der Mineralogie und Chemie befähiget, als einer der Ersten das Experiment in die früher nur beobachtende Geologie einführte und im Laboratorium synthetisch das nachzubilden versuchte, was die Natur im Grossen geschaffen.

Er wurde am 25. Juni 1814 in Metz geboren. Frühzeitig begann er mit besonderer Vorliebe sich mit Mineralien und Gesteinen zu beschäftigen, so dass er nach dem Besuch der polytechnischen Schule zu Paris als 20 jähriger Jüngling zu dem Corps des mines zugelassen wurde, bei welchem er im Jahre 1838 als Ingenieur der Bergwerke am Niederrhein zu Strassburg eine Anstellung erhielt. Seine ungewöhnlichen Kenntnisse gaben die Veranlassung, ihn zum Professor der Geologie und Mineralogie an der Universität zu Strassburg zu ernennen, an deren Faculté des sciences er von 1852 an Dekan war. Im Jahre 1861 erfolgte seine Wahl zum Mitgliede der französischen Akademie der Wissenschaften als Nachfolger von Cordier, womit er auch den Lehrstuhl der Geologie am naturgeschichtlichen Museum zu Paris bekam; später wurde er noch Professor der Mineralogie und Direktor an der École des mines und zuletzt Vorstand des gesammten Bergwesens. Im Jahre 1884 trat er von diesen Aemtern zurück und lebte von da an nur seinen wissenschaftlichen Bestrebungen.

Daubrée hat eine ausgebreitete wissenschaftliche Thätigkeit entwickelt, er war ein unermüdlicher Arbeiter und sorgfältiger Beobachter. In den ersten Jahren seiner Laufbahn suchte er sich durch Reisen in Frankreich, in Algier, in den Rheinlanden und in Skandinavien eigene Anschauungen von den Gebilden der Erdkruste zu verschaffen, wobei er als Metallurgist besonders dem Vorkommen des Zinns und anderen Erzlagern, auch den erratischen Blöcken seine Aufmerksamkeit

Digitized by Google

schenkte. Seine erste Veröffentlichung (1838) war eine Abhandlung über die metallführenden Gänge in Cornwall, wo seine Beobachtungen einen Theil der Voyage métallurgique en Angleterre von Dufrenoy und Elie de Beaumont ausmachen. Während seines Aufenthaltes in Strassburg folgte die erste geologische Karte des Niederrheinischen Gebietes sowie eine bewunderungswürdige geologische und mineralogische Beschreibung dieses Departements und der Vogesen. Er zeigte sich in dem letzteren Werke als ausgezeichneter Stratigraph, indem er darin das Gold des Rheins, das Erdpech von Pechelbronn, die Temperatur der Quellen der Vogesen, die Entstehung der eisenhaltigen Mineralien in Folge der Reduktion durch organische Materien seinem Studium unterwarf.

Von nun an nahmen seine Arbeiten die bedeutungsvolle Richtung an, welche für ihn besonders charakteristisch war, das ist der Versuch die natürlichen Mineralien künstlich durch Synthese herzustellen. Die Mineralogie entwickelte sich dadurch wie die organische Chemie, in welcher nach der Analyse und der Erkenntniss der die verwickelten Kohlenstoff-Verbindungen zusammensetzenden Componenten der Aufbau derselben erfolgte. Nach der chemischen Analyse der Mineralien und Gesteine, nach der Untersuchung ihrer Zersetzungsprodukte durch allerlei Einwirkungen suchte er die Bedingungen kennen zu lernen, unter welchen dieselben in der Natur entstanden sind, und sie dann aus ihren Elementen künstlich wieder darzustellen. In dieser Weise entstiegen seinem Schmelztiegel im Jahre 1851 die Oxyde des Zinns und des Titans, der Apatit als der natürliche phosphorsaure Kalk, der edle Topas, dann ahmte er 1876 die Gesteine nach, welche das natürliche Platin begleiten. Im Jahre 1859 konnte er sein ganz auf eigenen lange fortgesetzten und manchmal gefährlichen Untersuchungen beruhendes grundlegendes Werk: „Études et expériences synthétiques sur le métamorphisme et la formation des roches crystallines“ erscheinen lassen, für welches er den von der Akademie ausgesetzten Preis erhielt; er prüfte darin experimentell die Ursachen der allmählichen Metamorphose der krystallinischen Gesteine,

Digitized by Google

nämlich hohe Hitzegrade, mineralische Gase und Dämpfe unter hohem Druck und Wasser; er that dabei dar, dass hohe Temperaturen für sich allein nicht genügen die Erscheinungen der Transformation zu erklären, auch nicht die Einwirkung von Dämpfen, dass es vielmehr vor Allem das in den Gesteinen cirkulirende Wasser ist, welches die letzteren umwandelt. Bei Gelegenheit der Weltausstellung zu Paris im Jahre 1867 fasste er alle seine Erfahrungen in dieser Richtung in den Rapports des progrès de la Géologie expérimentale zusammen und später (1879) in seinen wahrhaft klassischen Études synthétiques de Géologie expérimentale.

Von grossem Interesse für ihn waren auch die Meteoriten; er untersuchte genau ihre chemische Zusammensetzung und ihre Struktur und machte Experimente, sie im Laboratorium künstlich herzustellen; er wollte dadurch Aufschluss erhalten über die chemischen Vorgänge im Weltraum. Bei dieser Gelegenheit gelang es ihm eine grosse und kostbare Sammlung dieser Himmelskörper für das Museum anzulegen.

Viele Zeit widmete er auch den erratischen Blöcken, über deren Entstehung er seine Ansichten äusserte.

In der letzten Zeit seines Lebens beschäftigte er sich viel mit der Hydrologie d. i. der Zusammensetzung und den Wirkungen der unterirdischen Gewässer in vergangenen Zeiten und in der Gegenwart, um die Gesetze der Bewegung des Wassers in den Erdschichten zu finden und über die Veränderungen und Auflösung der Gesteine durch dieselben Aufschluss zu erhalten. Er unterschied diese Strömungen von denen, welche auf dem Grund des oberflächlichen Erdreiches verlaufen, dem sogenannten Grundwasser, das für die Gesundheit der Menschen nach den Forschungen unseres Präsidenten v. Pettenkofer eine so grosse Bedeutung besitzt.

Ausser durch diese Anwendung der geologischen Wissenschaft suchte er auch der Landwirthschaft nützlich zu sein durch seine Betheiligung bei der Frage der Aufschliessung der Phosphate für die Pflanzen und der Feldmesskarten.

Daubrée ist durch diese seine hervorragenden Arbeiten

Digitized by Google

zu einem der angesehensten und einflussreichsten Mitglieder der französischen Akademie geworden; er war einer ihrer Präsidenten und er hat bis zuletzt thätigen Antheil an ihren Geschäften genommen. Er war hoch geehrt nicht nur in seinem Vaterlande und bei denen, welche ihn persönlich kannten, sondern auch auswärts in allen Kreisen seiner Fachgenossen. Von feinen Formen, bescheiden, gütig und wohlwollend hat er wissenschaftliche Bestrebungen unterstützt, so weit es ihm möglich war. Er wusste die Verdienste Anderer nach ihrem Werth zu schätzen und so kannte und achtete er auch die Arbeiten der deutschen Geologen in vollem Umfang.

Gerhard Rohlfs.

Am 2. Juni 1896 starb im 64. Lebensjahre auf seiner Besitzung zu Godesberg bei Bonn unser correspondirendes Mitglied in der Sektion für allgemeine Naturgeschichte Dr. Gerhard Rohlfs, der weithin bekannte Afrikareisende.

Er gehörte mit Barth, Nachtigal und Schweinfurth zu den kühnen deutschen Forschern, welchen wir die Aufhellung des Nordens des dunkeln Erdtheils verdanken. Er besass im glücklichsten Verein alle die seltenen körperlichen und geistigen Eigenschaften, welche einem Pionier in unbekannten und unwirthlichen Gebieten zu eigen sein müssen und denen er seine grossen Erfolge als Saharaerforscher verdankt.

Gerhard Rohlfs wurde am 14. April 1832 zu Vegesack bei Bremen geboren. Nachdem er das Gymnasium in Bremen absolvirt hatte, machte er in Vaterlandsliebe und Thatendrang als Freiwilliger den schleswig-holsteinischen Krieg von 1849 mit, wobei er nach der Schlacht von Idstedt zum Offizier ernannt wurde. Er studierte hierauf Medizin an den Universitäten zu Heidelberg, Würzburg und Göttingen und trat dann als Arzt in die algerische Fremdenlegion ein, mit der er die Feldzüge gegen die Kabylen mitmachte. Dabei lernte er im Umgang mit den Eingeborenen die arabische und berberische Sprache, sowie die Sitten und Gebräuche der Mohammedaner

Digitized by Google

genau kennen, so dass er als Mohammedaner verkleidet das damals den Fremden verschlossene Marokko betreten konnte. Er gewann dorten durch seine medizinischen Kenntnisse die Gunst des Grossscheriffs Sidi el Hadsch Absalom, von welchem er die Empfehlungsschreiben zu seiner drei Jahre dauernden Reise durch das südliche Marokko erhielt. Unter den grössten Entbehrungen und Gefahren durchwanderte er ohne Mittel als Bettler von West nach Ost die ganze marokkanische Sahara, in der er zum Wadi Draa bis zu der Oase Tafilet vordrang, dann von Tanger aus über das Schneegebirge des Atlas als erster Europäer nach der Oase Tuat und der Oase Tidikelt. Auf der Rückreise wurde er von seinen ihm misstrauenden Führern überfallen und schwer verwundet für todt in der Wüste zurückgelassen; von zwei mitleidigen Marabuts aufgefunden und verpflegt, vermochte er wieder die französische Grenze zu erreichen. Ueber Ghadames und Tripolis kehrte er (1865) nach Europa zurück, um die Ergebnisse seiner Reisen zu veröffentlichen; seine Beschreibungen in der Petermann'schen geographischen Monatsschrift erregten bei den Kennern und Freunden der Erdkunde grosses Interesse.

Aber bald regte sich in ihm die Wanderlust von Neuem; er wollte Afrika in der Richtung von Nord nach Süd durchqueren. Mit grossentheils von Petermann aufgebrachten Geldmitteln trat er seine dritte Reise von Tripolis aus bis zum Tsadsee an. Nachdem er längere Zeit in Mursuk zum Zweck der Uebersetzung einer Geschichte von Fezzan und einer Beschreibung dieses Landes verweilt hatte, durchsetzte er die Wüste Sahara über Bilma nach Bornu und Kuka am Tschadsee, woselbst schon Barth und Overweg ihre Beobachtungen gemacht hatten. Und nun wandte er sich nach Süden, um die noch unbekannten Gebiete zwischen dem Tschadsee und dem Niger zu erforschen. Ueber Mandara und Sokoto erreichte er als erster Europäer den Binuë bei Loko, fuhr den Strom abwärts bis zu seiner Einmündung in den Niger bei Lokodja und dann den Niger aufwärts bis Rabba und wanderte dann durch Joruba nach Lagos an den atlantischen Ozean an der Guinea-

Digitized by Google

küste, von wo er auf einem englischen Schiffe nach Europa zurückkehrte. Die Ergebnisse dieser grossen Reise theilte er in seinem Werke „Quer durch Afrika“ mit, welches ihn überall in Deutschland bekannt und geehrt machte.

Im Jahre 1867 nahm er an der abyssinischen Expedition der Engländer gegen den König Theodor Theil; 1869 wurde er beauftragt, Geschenke des Königs von Preussen an den Sultan von Bornu zu befördern, mit deren Ueberbringung er Nachtigal betraute, während er selbst von Tripolis durch die Cyrenaika über Audschila und Dschalo bis zur Oase des Jupiter Ammon (Siuah) nach Egypten kam, wobei er die Depression südlich vom libyschen Küstenplateau entdeckte.

Im Auftrage des Chedive Ismaïl von Egypten leitete er (1873—1874) eine an wissenschaftlichen Ergebnissen reiche Expedition durch die libysche Wüste zur Oase Siuah; an derselben war ausser dem Botaniker Ascherson, dem Astronomen Jordan und dem Photographen Remélé unser Mitglied Zittel als Geologe thätig. Die Reisenden marschirten 36 Tage lang durch gänzlich wasserlose Gegenden.

Noch eine letzte Reise durch die Wüste unternahm Rohlfs 1878 mit Stecker im Auftrage der Afrikanischen Gesellschaft in Deutschland und mit Unterstützung der Reichsregierung. Gleichzeitig sollte er Geschenke des deutschen Kaisers an den Sultan von Wadai überreichen. Er zog von Tripolis durch die libysche Wüste nach der Oase Sokna, dann über Dschalo nach der zuvor von keinem Europäer besuchten Oase Kufra. Aber dorten wurde dem Unternehmen ein jähes Ende bereitet, indem die Karavane von Suya-Arabern überfallen und beraubt wurde.

1880 hatte er dem König Johannes von Abyssinien ein Schreiben des deutschen Kaisers Wilhelm I. zu überbringen; 1884 wurde er zum Generalconsul und Reichskommissär ernannt, um die deutschen Interessen in Sansibar zu vertreten.

Von da an lebte er in Weimar und zuletzt in Godesberg. Von den geographischen Gesellschaften wurden ihm viele Ehren zu Theil. Er war ein warmer Freund der deutschen Kolonial-

Digitized by Google

bestrebungen in Afrika, die er durch Vorträge und Aufsätze zu fördern suchte. Auch verdient hervorgehoben zu werden, dass er der medizinischen Geographie ein grosses Interesse zuwandte; er begründete mit seinem Bruder Heinrich Rohlfs das deutsche Archiv für Geschichte der Medizin und medizinische Geographie. Es mangelten ihm zwar die Spezialkenntnisse in der Geologie, der Zoologie und Botanik, wie sie die Forschungsreisenden heut' zu Tage besitzen müssen, um genaue Kenntnisse der besuchten Länder mitzubringen, aber doch wird der Name des kühnen Mannes unter den Reisenden, welche in idealem Bestreben ihre ganze Kraft zur Erforschung fremder Welttheile einsetzten und unsere geographischen und ethnologischen Kenntnisse erweiterten, unter den Ersten genannt werden.

Digitized by Google

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1897.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. 18. Band. 1896. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XX, part 2. 1896. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Bd. 127—129. 1896. 8⁰.
Starine. Bd. 28. 1896. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen aus dem Osterlande. N. F. Band 7. 1896. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XVI, No. 128—130. 1897. 4⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. VII, No. 68—70; Vol. VIII, No. 71—74. 1896—97. 4⁰.

K. Bibliothek in Bamberg:

Katalog der Handschriften von Frd. Leitschuh. Bd. I, Abth. 2, Lfg. 2. 1897. 8⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:

20. u. 21. Jahresbericht f. d. J. 1894/95 u. 1895/96. 1895—96. 8⁰.
Beiträge zur vaterländischen Geschichte. N. F. Bd. V, Heft 1. 1897. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 39, afl. 3. 1896. 8⁰.
Notulen. Deel 34, afl. 1. 2. 1896. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 49, stuk 1. 2; Deel 50, stuk 2. 1896. 4⁰.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek. Deel XV. 1896. 8⁰.

K. natuurkundig Vereeniging van Nederlandsch Indië in Batavia:

Alphabetisch Register op Deel I—XXX u. XXXI—L van het Tijdschrift. Naamregister. s'Gravenhage 1871—91. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Srpski etnographski sbornik. Band II. 1896. 8⁰.
Glas. No. 51. 52. 1896. 8⁰.
Godischnijak 1895. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. Vol. I, part 3. 4. 1897. 4⁰.

Aarbog für 1896. 1897. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Corpus Inscriptionum Atticarum. Appendix. 1897. fol.

Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXIII. 1896. 8⁰.

Abhandlungen aus dem Jahre 1896. No. XL—LIII. gr. 8⁰.

Sitzungsberichte. 1897, No. I—XXV. gr. 8⁰.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch für das Jahr 1895. Bd. XVI. 1896. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 29. Jahrg., No. 18 u. 19; 30. Jahrg., No. 1—10. 1897. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 48, Heft 3. 4. 1896. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen. Band 27. 1897. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1895. Do. im Jahre 1890. 3 Bde. Braunschweig 1896. 8⁰.

Verhandlungen. Jahrg. 15, No. 6. 7; Jahrg. 16, No. 1—7. 1896—97. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. X, No. 20—26. Bd. XI, No. 1—6. 1896—97. 8⁰.

Verhandlungen. Jahrg. 1896—97, No. 1—4. 8⁰.

K. technische Hochschule in Berlin:

Guido Hauck, Ueber innere Anschauung und bildliches Denken. Rede. 1897. 4⁰.

Hermann Rietschel, Gedächtnissrede zur Feier des 100. Geburtstages des Königs Wilhelm des Grossen. 1897. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XI, Heft 4. 1897. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der Niederschlagsbeobachtungen im Jahre 1894. 1897. fol.

Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1895. 1897. 4⁰.

Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1896. 1897. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXV. Jahrg. 1893, No. 94, Heft 3. 1897. 8⁰.

Kommission für die wissenschaftlichen Sendungen aus den deutschen Schutzgebieten in Berlin:

Drittes Verzeichniss. 1897. fol.

K. Sternwarte in Berlin:

Beobachtungsergebnisse. Heft 7. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora 1897. 46. Jahrg., No. 1—12. 1897. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen u. Preussischen Geschichte. Bd. IX, 2. Hälfte. Leipzig 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XII, Heft 1—6. 1897. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 17. Jahrg., 1897. Heft 1—3. 5. 6. 4⁰.

R. Deputazione di storia patria in Bologna:

Atti e Memorie. III. Serie. Vol. 14, fasc. 4—6. 1896. 4⁰.

Universität in Bonn:

Verzeichniss der Bonner Universitäts-Schriften 1818—1885 von Fritz Milkan. 1897. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 100. 1896. 4⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1896, No. 23—24; 1897, No. 1—11. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Memoirs. Vol. XII, No. 2 u. 3. Cambridge 1896. 4⁰.
Proceedings. Vol. 31; Vol. 32, No. 1. 1896. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 27, part 75—241. 1896. 8⁰.

Ortsverein für Geschichte und Alterthumskunde in Braunschweig:

Braunschweigisches Magazin. Band II. Jahrg. 1896. 4⁰.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen im Jahre 1896. VII. Jahrg. 1897. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band 14, Heft 2. 1897. 8⁰.

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 1. Jahrg., 1. u. 2. Heft. 1897. gr. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Band 34, 1895. 1896. 8⁰.
XIV. Bericht der meteorol. Commission. 1896. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. IV. Série. Tome X, No. 11. 1896. Tome 11, No. 1—5. 1897. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série. Tome 32, No. 12. 1896. Tome 33, No. 1—4. 1897. 8⁰.

Bibliothèque Royale in Brüssel:

Rapport sur les années 1894—95. 1896. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XVI, fasc. 1 u. 2. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 39. 1895. Tome 40. 1896. 8⁰.
Mémoires. Vol. III—V. 1895—96. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome 9, fasc. 1—4. 1895—97. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen aus dem Jahrbuche. Band XI, 1—3. 1897. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. XXVI, Heft 11 u. 12. 1896. Bd. XXVII, 1—4. 1897. 4⁰.
Jahresbericht für 1894. 1897. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen uit 's lands Plantentuin. No. XVIII. XXI. Batavia 1897. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Documente privitóre la istoria Românilor. Vol. II, parte 5. Vol. IX, parte 1. 1897. 4⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. XI, 1895. 1896. 4⁰.
Buletinul. Anul V, 1896. 1897. 4⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. June—December 1896. 1896—97. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VII, part 6; Vol. VIII, part 2; Vol. IX, part 8. 9. 1896—97. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Journal. N. Ser. Vol. 65, No. 344. 355—358. 1896/97. 8.
Proceedings. 1896. No. VI—X. 1896. 8⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 30, part 1. 1897. 4⁰.

Museum of comparative Zoology in Cambridge, Mass.:

Annual Report for 1895—96. 1896. 8⁰.
Memoirs. Vol. XXII, Text und Atlas. 1896. 4⁰.
Bulletin. Vol. 28, 3; 30, 3—6. 1896/97. 8⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

51th annual Report 1895/96. 1896. 8⁰.
Annals. Vol. 30, part 4; Vol. 40, part 5; Vol. 41, No. 4. 1896. 4⁰.
Miscellaneous Papers 1888—1895. 1896. 8⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. IX, part 4. 5. 1897. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 9. 1896. 4⁰.
Bullettino. Fasc. 44—46. 1896/97. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 14. 1896. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. X, No. 52; Vol. XI, No. 1—6. 1896—97. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 7, No. 2. 3. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Aarsberetning 1896. 4⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:

J. M. Norman, Norges arktiske Flora. Vol. I, 1; II, 1. 1894–95. 8⁰.
Aarsberetning 1894—95. 1896. 8⁰.
Jahrbuch des meteorologischen Instituts 1893. 1894. 1895. 1895—96. 4⁰.
Archiv for Mathematik. Bd. 18, 1—4; 19, 1. 2. 1896. 8⁰.
Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 34, 3. 4; 35, 1—3. 1893—95. 8⁰.
Annaler 1895. 1896. 1896—97. 8⁰.
Schjött, Samlede Philologiska Afhandlinger. 1896. 8⁰.
Sars, Fauna Norvegiae. Band I. 1896. 4⁰.
Barth, Norrönaskaller, crania antiqua Norvegiae. 1896. gr. 8⁰.
Seippel, Rerum Normannicarum fontes arabici. Fasc. I. 1896. 4⁰.

Editorial Committee of then Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878 in Christiania:

XXIII. Zoologi. Tunicata. 1896. fol.

Historisch-antiquarische Gesellschaft für Graubünden in Chur:

Jahresbericht. Jahrg. 1896. 1897. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1896. No. 86—91. 100—102. 1897. No. 1—46. fol.

Naturhistorische Gesellschaft in Colmar:

Mittheilungen. N. F. Band 3. Jahrgang 1895 u. 96. 1896. 8⁰.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Republ. Argent.):

Boletin. Tom. XV, No. 1. Buenos Aires 1896. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1897. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors f. das Jahr 1896/97. 1896. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

3 kleine naturwissenschaftl. Abhandlungen. 1896. 8⁰.
G. M. Gouyard, Magnetic Concentration applied to sulphide ore. 1897. 8⁰.
2 Abhandlungen aus den Proceedings der Gesellschaft. 1897. 8⁰.

Verein für Anhaltische Geschichte in Dessau

Mittheilungen. Band VII, 7. 1897. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:

Verhandlungen. Band 16, Heft 4; Band 17 u. 18. 1896. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tome 17, Tome 18, trimestre 1 et 3. Paris 1896/97. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III, Vol. IV, No. 1. 1896. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. 19, No. 1—6. 1897. 8⁰.

Royal College of Physicians in Edinburgh:

Reports from the Laboratory. Vol. VI. 1897. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXI, No. 3 u. 4. 1897. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 2, No. 1. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht für 1896/97. 1897. 4⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 23. 1897. 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Ser. Vol. 19, disp. 3 e 4; Vol. 20, disp. 1. 1896—97. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Band XXIII, 1. 2. 1896. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:

Das historische Archiv der Stadt Frankfurt a/M. 1896. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Index lectionum. Sommer-Semester 1897 und Winter-Semester 1897/98. 1897. 8⁰.

Collectanea Friburgensia. Fasc. VI. 1896. 4⁰.

Behörden, Lehrer und Studirende. Sommer-Semester 1897. 8⁰.

Observatoire in Genf:

Resumé météorologique de l'année 1896. 1897. 8⁰.

Nouvelles moyennes pour les principaux éléments météorologiques de Genève par Gautier. 1897. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Bulletin. Tome I, livr. 5. 1897. 8⁰.

Mémoires et Documents. IIᵉ Série, Tome 6. 7. 1897. 8⁰.

Kruidkundig Genootschap Dodonaea in Gent:

Botanisch Jaarboek. 8. Jaarg. 1896. 8⁰.

Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Giessen:

31. Bericht. 1896. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 72, Heft 2. 1896. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1897. No. I—VI. Berlin 1897. 4⁰.

Nachrichten. a) Mathem.-phys. Classe. 1896, Heft 4; 1897, Heft 1. 4⁰.
b) Philol.-hist. Classe. 1896, Heft 4; 1897, Heft 1. 4⁰.

Geschäftliche Mittheilungen 1897. Heft 1. 1897. 4⁰.

Abhandlungen. N. F. Band I, No. 4. 5. Berlin 1897. 4⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:

Handlingar. Ny Tidsföljd. 32. Häftet. 1897. 8⁰.

Universität in Gothenburg:

Göteborgs Högskolas Arsskrift. Tome 2. 1896. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. IX, 1. 1895. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. 44. Heft. 1896. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald:

Mittheilungen. 28. Jahrgang. 1896. Berlin 1897. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht für das Jahr 1896 97. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Haagsche Genootschap tot verdediging van den christelijken godsdienst im Haag:

Werken. VI. Reeks. Deel 6. Leiden 1897. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

H. Hendriks, Het Burusch van Màsarète. 1897. 8⁰.
Bijdragen. Deel 47, afl. 1. VI. Reeks, Deel 3, afl. 2. 1897. 8⁰.
Naamlijst der leden op 1. April 1897. 8⁰.

Ministère des Colonies Néerlandaises im Haag:

Verbeck et Fennema, Description géologique de Java et Madoura. 2 Vols. avec une Carte géologique. Amsterdam 1896.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Tome 30, livr. 4 u. 5. 1896/97. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. IX, 2. 1896. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 32, No. 12, 1896; Heft 33, No. 1—4, 1897. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 50, Heft 4, 1896; Band 51, Heft 1, 1897. Leipzig. 8⁰.

Universität in Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1897. 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 69, Heft 5 u. 6. Leipzig 1897. 8⁰.

Thüringisch-sächsischer Verein zur Erforschung des vaterländischen Alterthums in Halle:

Neue Mittheilungen. Band XIX, 3. 1897. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Halle:

Regesta historiae Thuringiae. 2. Halbband. Jena 1896. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen. Band XV. 1897. 4⁰.
Verhandlungen. 3. Folge, IV. 1897. 8⁰.

Geschichtsverein in Hanau:

Die Münzen der Grafen von Hanau von Reinhard Suchier. 1897. 4⁰.

Universität Heidelberg:

Kaiser Wilhelm I., Festrede von B. Erdmannsdörffer. 1897. 4⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. VII, Heft 1. 1897. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Acta. Vol. XI. 1895. 8⁰.
Meddelanden. Heft 22. 1895. 8⁰.

Société de géographie de Finlande in Helsingfors:

Fennia. Vol. 12. 13. 1896. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band 27, Heft 2. 1897. 8⁰.
Programm des evangelischen Gymnasiums in Hermannstadt für das Jahr 1895/96. 1896. 4⁰.

Digitized by Google

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:
Berichte. XXII. Jahrg. 1893–96. 1896. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:
The Journal. Vol. I, No. 2—8. 1896—97. gr. 8⁰.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:
Zeitschrift. N. F. Band X, 1—4. 1895—96. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:
Jahresbericht des Centralbureaus für das Jahr 1896. 1897. 4⁰.

Observatoire magnétique et météorologique de l'Université Impériale in Kasan:
Observations. Année 1895, IX; 1896, III. 1895—96. 8⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:
Bulletin. II. Série, Tome VI, No. 1—4; VII, No. 1. 1896—97. 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Band 64, No. 1—6. 1897. 8⁰.
2 medicinische Dissertationen. 1896. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:
Zeitschrift. N. F., Band XX, XXI u. Supplement XI. 1895—96. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1894. 1895. 1895—96. 8⁰.

Société de médecine in Kharkow:
Travaux. 1896. No. 1. 1897. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
Sapiski 1896, Tome 4; 1897, Heft 1. 4⁰.
Annales 1897, fasc. 2. 3. 8⁰.

Société mathématique in Kharkow:
Communications. 2e Série, Tome VI, No. 1. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Schleswig-Holstein-Lauenburgische Regesten u. Urkunden v. P. Hasse. Band III, 8. Hamburg 1896. 4⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. II, Heft 2. 1897. 4⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Bd. 36, No. 11. 12. 1896. Bd. 37, No. 1—4. 1897. 8⁰.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:
Értesitö. 3 Hefte. 1896—97. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 37. Jahrgang. 1896. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Caspar Wessel, Essai sur la représentation analytique de la direction. 1897. 4⁰.
Oversigt. 1896, No. 6; 1897, No. 1. 1896—97. 8⁰.
Mémoires. 6e Sér., Section des Lettres, t. IV, No. 3. 6e Sér., Section des Sciences, t. VIII, No. 3. 1896. 4⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:
Döbte i St. Petri tydske Kirke i Kjöbenhavn för Ildebranden 1728. 1897. 8⁰.
Sofus Elvius, Bryllupper og dödsfeld i Danmark 1896. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1896, December; 1897, Januar—März. 8⁰.
Monumenta medii aevi historica. 1896. 4⁰.
Bibliografia historyi Polskiej. Band II, 2. 1896. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszut VII. Text u. Atlas. 1895. 8⁰ u. fol.

Archiv der Stadt Kronstadt:

Quellen zur Geschichte der Stadt Kronstadt. Band III. 1896. gr. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Sér. Vol. 32, No. 122; Vol. 33, No. 123. 1896/97. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. V, No. 2. 1896. 8⁰.

Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. Deel XV, 4; Deel XVI, afl. 1. 1896/97. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Theil 15, Heft 2. 1896. 8⁰.

K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XVI. XVIII, No. 1. 1897. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIII, No. 6. 1897. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. 1896. II. III. 1897. 8⁰.
Berichte der math.-phys. Classe. 1896. Heft IV. V. VI. 1897. I. II. 8⁰.

Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft in Leipzig:

Preisschriften. No. XXXIV. 1896. gr. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 54, Heft 10—12; Bd. 55, Heft 1—5. 1896/97. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:

Mittheilungen 1896. 1897. 8⁰.
Wissenschaftliche Veröffentlichungen. Band III, Heft 2. 1897. 8⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletin. 15ª Serie, No. 5—9. 1896. 8⁰.

Université catholique in Loewen:

Annuaire 1897. 8⁰.
Programme des cours de l'année académique 1896—97. 1896. 8⁰.
N. Physsenzidès, L'arbitrage international et l'établissement d'un empire grec. Bruxelles 1897. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:

La Cellule. Tome XII, 1. 2. 1897. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:

Proceedings. Vol. XV, part I. 1897. 8⁰.

The English Historical Review in London:

Historical Review. Vol. XII, No. 45 January, No. 46 April. 1897. 8⁰.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 60, No. 365—367; Vol. 61, No. 369—374. 1897. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 57, No. 2—7. 1896—97. 8⁰.

Chemical Society in London:

Journal. No. 410—415. January—June 1897. 8⁰.
Proceedings. Session 1896—97. Vol. 12, No. 172—181. 8⁰.

Digitized by Google

Geological Society in London:

The quarterly Journal. No. 205—208. 1896. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1896, part 6; 1897, part 1—3. 8⁰.

Zoological Society in London:

Transactions. Vol. XIV, 3. 1897. 4⁰.
Proceedings. 1896, part IV; 1897, part I. 1897. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 55, No. 1412—1443. 1896—97. 4⁰.

Institut de physiologie de l'Université in Lüttich:

Travaux du Laboratoire de Léon Fredericq. Tome V. Paris 1896. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. II. Série, Tome 19. Bruxelles 1897. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. XXXII, 1. 2. 1895/96. 4⁰.

Section historique de l'Institut Royal Grand-Ducal in Luxemburg:

Publications. Vol. 45. 1896. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Luzern:

Mittheilungen. 1. Heft. 1897. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales. No. 25—28 u. 30. Paris 1896—97. 8⁰.

University of Wisconsin in Madison:

Bulletin. Science Series, Vol. I, 3. 1895. 8⁰.
Publications of the Washburn Observatory. Vol. X, 1. 1896. 4⁰.

Government Museum in Madras:

Bulletin. Vol. 2, No. 1. 1897. 8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Anuario 1897. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 30, cuad. 1—5. 1897. 8⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 36, fasc. 3. 4. 1897. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 24, fasc. 12 u. 13. 1896—97. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 41, part 2. 3. 1897. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Vol. 6, fasc. 4—6; Vol. 8, fasc. 1—4. 1897. 4⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno II, fasc. 2. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 8. Jahrgang 1896, 1. Hälfte. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Noviembre—Diciembre 1896; Enero, Febrero, Marzo 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Secretaria de fomento etc. in Mexico:
Boletin del Instituto geológico de México, No. 4—6. 1897. 4⁰.

Sociedad de historia natural in Mexico:
La Naturaleza. II. Serie, Tomo 2, No. 10—11. 1896. fol.

Public Museum of the city of Milwaukee:
14th annual Report. October 1896. 1897. 8⁰.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Anuario estadístico d'el Uruguay. Año 1895. 1896. 4⁰.

Musées public et Roumiantzew in Moskau:
Ottschet (Bericht) Jahr 1895 u. 1896. 1896—97. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1896, No. 3. 1897. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:
a) Beruf- und Gewerbezählung vom 14. Juni 1895. 1896—97. 4⁰.
b) Volkszählung vom 2. December 1895. 1896—97. 4⁰.
c) Anwesen- und Wohnungzählung vom 2. December 1895. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt 1896, No. 10—12; 1897, No. 1—4. 1897. 4⁰.

Direktion der k. b. Posten und Telegraphen in München:
Zeitungspreisverzeichniss u. Nachträge. 1897. 4⁰.

K. bayer. technische Hochschule in München:
Personalstand im Sommer-Semester 1897. 8⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:
Beobachtungen. Jahrgang 18, Heft 3. 1896. 4⁰.
Uebersicht über die Witterungsverhältnisse 1896 September—December; 1897 Januar—April. 1897. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1897. 8⁰.

Flurbereinigungs-Kommission im k. b. Staatsministerium des Innern in München:
Die Flurbereinigung in Bayern. Geschäftsbericht f. d. Jahre 1887—1897. 1897. 4⁰.

Universität in München:
Verzeichniss der Vorlesungen im Sommer-Semester 1897. 4⁰.

Bayer. Dampfkesselrevisions-Verein in München:
27. Jahresbericht 1896. 1897. 4⁰.

Historischer Verein in München:
Monatsschrift. 1897, No. 1—6. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:
Hochschul-Nachrichten. Winter-Semester 1896/97, No. 73—75. 4⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde Westfalens in Münster:
Zeitschrift. Band 54. 1896. 8⁰.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:
24. Jahresbericht für 1895/96. 1896. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:
Atti. Vol. 28. 1897. 8⁰.
Rendiconto. Anno 35. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Ser. III, Vol. 2, fasc. 12; Vol. 3, fasc. 1—5. 1896—97. 8⁰.
Atti. Serie II, Vol. 8. 1897. 4⁰.

R. Istituto orientale in Neapel:
L'Oriente. Rivista trimestrale. Anno 2, No. 3. 4 (1895—96). 1897. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 45, part 4. 5; Vol. 46, part 1. 2. 3. 1896—97. 8⁰.
Annual Report for the year 1895/96. 1896. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Serie, Vol. 3, No. 13—18. 1897. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. 18, part I. 1897. 8⁰.
A Report of that session of the first American congress of Philologists, which was devoted to the Memory of W. Dwight Whitney. Boston 1897. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Bulletin. Vol. VIII. 1896. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 28, No. 4; Vol. 29, No. 1. 1896—97. 8⁰.

American Pharmaceutical Association in New-York:
Proceedings. 44th annual Meeting 1896. Baltimore 1896. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:
Mittheilungen. 21. Band, 1896. 1897. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:
Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. XII. 1896 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:
Atti. Serie II, Vol. 3, fasc. 1. 1897. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:
Rendiconti. Tom. 10, fasc. 6; Tom. 11, fasc. 1—3. 1896—97. 4⁰.

R. Orto botanico in Palermo:
Bollettino. Anno I, fasc. 1 u. Appendice I. 1897. 8⁰.

Académie de médecine in Paris:
Bulletin. 1896, No. 51; 1897, No. 1—24. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:
Comptes rendus. 1896, No. 26; 1897, No. 1—25. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:
Moniteur. Livr. 662—666. Février—Juin 1897. 4⁰.

Société des Études historiques in Paris:
Revue 1892—96 u. 63e année 1897, No. 1—4. 8⁰.

Société de géographie in Paris:
Comptes rendus. 1896, No. 17—19; 1897, No. 1—12. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome 17, 3e trim. 1896. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:
Bulletin. Tome 24, No. 8, 1896; Tome 25, No. 1—3, 1897. 8⁰.
Oeuvres mathématique d'Évariste Galois. 1897. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:
Bulletin. Tome 21. 1896. 8⁰.
Mémoires. Tome IX. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Bulletin. 5e Série, tome 3, No. 2—5; tome 4, No. 1—5; tome 5, No. 1—5 1895—96. Tome 6, No. 1—3, 1897. 4⁰.

Mémoires. Classe physico-mathématique. Vol. 3, No. 7—10; Vol. 4, No. 2—4; Vol. 5, No. 1. 1896. 4⁰.

Annuaire du Musée zoologique 1896, No. 4; 1897, No. 1. 8⁰.

Byzantina Chronika. Tom. 3, Heft 2. 1896. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XV, 5 et Supplément au t. XV. 1896. 8⁰.

Mémoires. Vol. XIV, No. 2. 4. 1896. 4⁰.

Archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Tom. VII, 3. 4. Sapiski (orientalische Abtheilung). Tom. IX, 1—4. 1896. 4⁰.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. 1896. No. 7. 8. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie, Bd. 32; Bd. 33, 2; Bd. 34, 1. 1895—96. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 28, No. 9, 1896; tom. 29, No. 1—4, 1897. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1895, Theil I u. II. 1896. 4⁰.

Observatoire central Nicolas in St. Petersburg:

Publications. Série II, Vol. 2. 1896. 4⁰.

Kais. Universität in St. Petersburg:

Godischny Akt (Jahrbuch). 1897. 8⁰.

Sapiski istor.-filolog fakulteta, Bd. 39/40. 1896. 8⁰.

Travaux de la Société des Naturalistes. Vol. 21, fasc. 2; Vol. 25, fasc. 2; Vol. 26, fasc. 1; Vol. 27, fasc. 1, No. 1—4. 1896. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. Second Series. Vol. X, part 4. 1896. fol.

Proceedings. 1896, part II. 1896. 8⁰.

Geographical-Club in Philadelphia:

Bulletin. Vol. II, No. 2. 1896. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 20, No. 3. 1896. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 33, No. 4—9. 1897. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 35, No. 151. 152. 1896. 8⁰.

Transactions. New Series. Vol. 19, part 1. 1896. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. X, p. 169—200. 1896. 4⁰.

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für das Jahr 1896—97. 1897. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 11. Jahrg., Heft 3. 4, 1896; 12. Jahrg., Heft 1, 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Potsdam:

Verhandlungen der 1896 in Lausanne abgehaltenen Conferenz. Berlin 1897. 4⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Almanach. Ročník VII. 1897. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Uebersicht der Leistungen der Deutschen Böhmens i. J. 1894. 1897. 4⁰.
Rechenschaftsbericht über das Jahr 1896. 1897. 8⁰.
Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 6. 7. Wien 1897. 8⁰.
G. Biermann, Geschichte des Protestantismus in Oesterreichisch-Schlesien. 1897. 8⁰.
Geologische Karte des böhmischen Mittelgebirgs, Blatt III (Bensen). Wien 1897. 8⁰.
Mittheilungen, No. VII. 1897. 8⁰.

K. böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Jahresbericht für das Jahr 1896. 1897. 8⁰.
Sitzungsberichte. a) Classe für Philosophie. 1896.
b) Mathem.-naturw. Classe. 1896. I. II. 1897. 8⁰.
Böhm. Preisschriften, No. VII. VIII. 1896—97. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 26, No. 1—4. 1896—97. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1896. 1897. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Časopis. Jahrgang 1896, 4 Hefte. 8⁰.

K. k. Sternwarte in Prag:

Appendix zu: Astronomische Beobachtungen in den Jahren 1888—91. Prag 1893. 1897. 4⁰.
Magnetische u. meteorologische Beobachtungen im Jahre 1896. 57. Jahrgang. 1897. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1896/97. 1896. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1897. 8⁰.

Zeitschrift „Krok" in Prag:

„Krok". Band 11, Heft 1—7. 1897. 8⁰.

Observatorio astronómico y meteorológico in Quito:

Boletin. Año 1, No. 12. 1896. 8⁰.
Obsequio del Director del Observatorio astronómico Augusto N. Martínez. 1895—96. 4⁰.

K. botanische Gesellschaft in Regensburg:

Katalog der Bibliothek, Theil II. 1897. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Korrespondenzblatt No. 39. 1896. 8⁰.

Instituto historico e geographico e ethnographico in Rio de Janeiro:

Revista trimensal. Tomo 58, parte 1. 2. 1895. 8⁰.

Digitized by Google

Museu nacional in Rio de Janeiro:

Archivos. Vol. VIII. 1892. 4⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Vol. 5, 2e semestre, fasc. 12, 1896 Vol. 6, 1e semestre, fasc. 1—11. 1897. 4⁰.

Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Notizie degli scavi. Vol. 4, parte 2, Novembre—Dicembre 1896 e Indice; Vol. V, parte 2, Gennaio - Marzo 1897. 4⁰.

Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. 5, fasc. 11. 12, 1896; Serie V, Vol. 6, fasc. 1—4, 1897. 8⁰.

Annuario 1897. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 50, sess. 1—4. 1897. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1896, No. 4. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band XI, No. 4, 1896; Band XII, No. 1, 1897. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Indici e cataloghi. XII. fasc. 6. 1897. 8⁰. XIII. Codici corali e libri a stampa miniati, 25 facs. 1897. fol. XI. Annali di Gabriel Giolito de Ferrari. Vol. II, fasc. 3. 1897. 8⁰. XV. I manoscritti della R. Biblioteca Riccardiana. Vol. I, fasc. 7. 1897. 8⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. 19, fasc. 3. 4. 1896. 8⁰.

Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 2, fasc. 4. 1897. 8⁰.

Commemorazione del primo centenario della nascità di Ant. Rosmini. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 36. Vereinsjahr. 1896. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:

Bericht 1894—95. 1896. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Seccion II. Observaciones meteorólogicas. Año 1894. 1895. fol.

Almanaque naútico. Año 1898. Madrid 1896. 8⁰.

Deutscher wissenschaftlicher Verein in Santiago de Chile:

Verhandlungen. Band 3, Heft 3 u. 4. Valparaiso 1896. 8⁰.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftl. Mittheilungen. Band IV. Wien 1896. 4⁰.

Bosnisch-Herzegovinische Landesregierung in Sarajevo:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1895. Wien 1896. 4⁰.

K. k. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino. Anno 19, No. 11 - 12; anno 20, No. 1—4. 1896—97. 8⁰.

Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Stettin:

Baltische Studien. Jahrgang 46. 1896. 8⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Månadsblad. 21. Jahrg. 1892. 1893—97. 8⁰.

Antiquarisk Tidskrift for Sverige. Deel 13, Heft 2. 3. Bd. XV, 1. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band 18, Heft 7; Band 19, Heft 1—4. 1897. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. 30. Bd., 1896, No. 10; 31. Bd., 1897, No. 1. 2. 1896—97. 8⁰.

K. württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher f. Statistik u. Landeskunde. Jahrg. 1896. 1897. 4⁰.

Beschreibung des Oberamts Ulm. 1897. 2 Bde. 8⁰.

Württembergischer Alterthumsverein in Stuttgart:

Württemberg. Vierteljahrshefte für Landesgeschichte. N. F. 5. Jahrg. 1896, Heft 1—4. 1896. 8⁰.

Geological Survey of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. V, 2. 1897. 4⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

The Australian Mining Standard. 1896. fol.

Silver Sulphides of Broken Hill. 1897. fol.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahr 1895. 1897. fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Mittheilungen. 58. u. 59. Heft. 1897. 4⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

The Journal of the College of Science. Vol. IX, 2. 1897. 4⁰.

Caradian Institute in Torónto:

Transactions. No. 9 (Vol. V, part 1). 1896. gr. 8⁰.

Proceedings. Vol. 1, No. 1. 1897. gr. 8⁰.

Faculté des sciences in Toulouse:

Annales. Tom. I—X. Paris 1887—96. 4⁰.

Annales. Tom. XI, fasc. 1 u. 2. 1897. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 32, disp. 1—12. 1896—97. 8⁰.

Osservazioni meteorologiche dell' anno 1896. 1897. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III, Vol. 17, fasc. 1. 1896. 4⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. 28. Année 1896. 1896—97. fol.

K. Universität in Upsala:

Zoologiska Studier. Festskrift Wilhelm Lilljeborg tillegnad. 1896. 4⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks, Band 4, afl. 2. 1896. 8⁰.

Redaktion der mathemat.-physikal. Abhandlungen in Warschau:

Prace Matematyczno-Fizyczne. Tom. VIII. 1897. 4⁰.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for the year 1894—95. Part I. II. 1896. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Farmers Bulletin. No. 54. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Smithsonian Institution in Washington:
Report for the year 1894. 1896. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:
27th annual Report 1895/96. Part III in 2 vols. 1896. 4⁰.

Philosophical Society in Washington:
Bulletin. Vol. 12. 1892—94. 1895. 8⁰.

Deutsche Schillerstiftung in Weimar:
37. Jahresbericht. 1897. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:
Zeitschrift. 29. Jahrg. 1896 Schlussheft. 1896. 8⁰.

K. k. geologische Reichsanstalt in Wien:
Jahrbuch. Jahrg. 1896. Band 46, Heft 2. 1896. 4⁰.
Verhandlungen. 1896, No. 13—18; 1897, No. 1—8. 4⁰.

K. k. Gradmessungs-Commission in Wien:
Astronomische Arbeiten. Band 7 u. 8. 1895—96. 4⁰.

K. k. Gesellschaft der Aerzte in Wien:
Wiener klinische Wochenschrift. 1896, No. 53; 1897, No. 1—25. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:
Mittheilungen. 26. Band, Heft 6, 1896; 27. Band, Heft 1, 1897. 4⁰.

Geographische Gesellschaft in Wien:
Mittheilungen. Band 39. 1896. 8⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:
Verhandlungen. Band 46, Heft 10; Band 47, Heft 1—4. 1897. 8⁰.

K. k. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:
Annalen. Band XI, 3. 4. 1896. 4⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:
Vidyodaya. 1897, No. 1—5. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:
Verhandlungen. N. F., Band 31. No. 5. 1897. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1896, No. 6—11. 8⁰.

Schweizerische meteorologische Centralanstalt in Zürich:
Annalen. 31. Jahrg. 1894. 4⁰.

Schweizerische geologische Kommission in Zürich:
Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Liefg. 30 u. Neue Folge, Liefg. 6 u. 7. Bern 1896/97. 4⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:
Mittheilungen. Band 21, 3. 4. 1896—97. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:
Neujahrsblatt auf das Jahr 1897. No. 99, 1896. 4⁰.
Vierteljahrsschrift. Jahrg. 41, 1896, Supplem.; Jahrg. 42, Heft 1, 1897. 8⁰.

Universität in Zürich:
Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Digitized by Google

Von folgenden Privatpersonen:

Le Prince Albert Ier de Monaco:
Résultats des campagnes scientifiques. Fasc. XI. Monaco 1896. fol.

Anton Balawelder in Wien:
Abstammung des Allseins. Wien 1894. 8⁰.

M. Berthelot in Paris:
Thermochimie. Données et lois numériques. 2 voll. Paris 1897. 8⁰.

Maurice Bloomfield in Baltimore:
Contributions to the Interpretation of the Veda. VIIth Series. Baltimore 1896. 8⁰.

Antonio Cabreira in Lissabon:
Sur la géométrie des courbes transcendantes. Lisbonne 1896. 8⁰.

W. Döllen in Dorpat:
Aufruf zur Umgestaltung der nautischen Astronomie. Dorpat 1896. fol.

Stephen H. Emmens in New-York:
The Argentaurum Papers. s. l. s. a. 8⁰.

S. F. Fisichella in Messina:
Lotta ed ethica. Discorso. Messina 1897. 4⁰.

G. B. Guccia in Palermo:
Notes et Mémoires de Mathématique, No. 1—31. Palerme in 4⁰ u. 8⁰.

Bernh. Heidhues in Köln:
Ueber die Wolken des Aristophanes. Programm. Köln 1897. 4⁰.

Houghton, Mifflin & Co., Verlagsbuchhandlung in Cambridge, Mass.:
The Semi-Centennial of Anaesthesia 1846—96. Boston 1897. 4⁰.

M. A. Lacroix in Paris:
7 mineralogische Abhandlungen in französ. Sprache aus Zeitschriften.

Guido Lamprecht in Bautzen:
Wetterperioden. Bautzen 1897. 4⁰.

Mrs. Carvill Lewis in London:
Papers and Notes on the Genesis and Matrix of the Diamond, by the late Henry Carvill Lewis. London 1897. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:
Revue historique XXIIe année. Tom. 63, No. 2; Tom. 64, No. 1. Paris 1897. 8⁰.

V. Mortet in Paris:
Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus. Paris 1896. 4⁰.

Fannie E. Newberry in Chicago:
The Wrestlar of Philippi, a tale of the early Christians. Chicago 1896. 4⁰.

Giovanni Omboni in Venedig:
Commemorazione del Barone Achille de Zigno. Venezia 1897. 8⁰.

J. A. C. Oudemans in Utrecht:
Die Triangulation von Java. V. Abth. Haag 1897. fol.

Ed. Piette in Rumigny (Ardennes):
Études d'ethnographie préhistorique. Paris 1897. 8⁰.
Fouilles faites à Brassempouy 1895. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Emanuel Pochmann in Linz:

Sämmtliche Bacterien der modernen Bacterienwissenschaft sind keine Bacterien. Linz 1896. 8⁰.

Ueber zwei neue und zwar dynamicale Eigenschaften der atmosphärischen Luft. Linz 1896. 8⁰.

Dietrich Reimer's Verlagsanstalt in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 3. Jahrg., 1. Heft. 1897. 4⁰.

G. Scognamiglio in Neapel:

Su alcuni nuovi preparati di chinina. Napoli 1896. 8⁰.

T. J. J. See, Lowell Observatory in Mexico:

Researches on the Evolution of the stellar systems. Vol. I. Lynn, Mass. 1896. 4⁰.

Michele Stossich in Triest:

Il genere Ascaris Linné. Trieste 1896. 8⁰.
Ricerche elmintologiche. Trieste 1896. 8⁰.
Elminti trovati in un Orthagoriscus mola. Trieste 1896. 8⁰.

De Toni e Venetiis in Venedig:

Petri Pasinii Adriades. 1897. 8⁰.

J. Vallot in Paris:

Annales de l'Observatoire météorologique du Mont-Blanc. Tom. II. Paris 1896. 4⁰.

Eberhard Graf Zeppelin in Konstanz:

Zum sogenannten „Seeschiessen". 1897. 4⁰.

Čeněk Zíbrt in Prag:

O srovnávacím studiu lidového podání etc. Prag 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 6. November 1897.

1. Herr Paul Groth berichtet über die Erfolge der geologischen Exkursion in den Ural, welche von Mitgliedern des Petersburger internationalen geologischen Congresses gemacht wurde.

2. Herr K. A. v. Zittel theilt hierauf Einiges über den Verlauf des geologischen Congresses zu St. Petersburg sowie über die grosse Exkursion durch den Kaukasus mit.

3. Herr Paul Groth legt eine Arbeit des Herrn Dr. Ernst Weinschenk: „Zur Kenntniss der Graphitlagerstätten (chemisch-geologische Studien)" vor und beantragt deren Aufnahme in die Denkschriften.

4. Herr Karl v. Orff erstattet einen Bericht über die von Seiten der k. bayer. Commission für die internationale Erdmessung im Laufe des Jahres ausgeführten Schweremessungen.

5. Herr Ferdinand Lindemann theilt der Classe den Erfolg seiner Reise in Italien zum Studium der antiken Dodekaeder, der Gewichte und der Zahlzeichen mit. Er wird die ausführliche Bearbeitung später vorlegen und in den Sitzungsberichten veröffentlichen.

Digitized by Google

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 15. November 1897.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, Excellenz, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige öffentliche Festsitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften ist zu Ehren ihres Protektors, Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser. Sämmtliche Mitglieder unserer Körperschaft bringen Allerhöchstdemselben in Ehrfurcht und Dankbarkeit Glück- und Segenswünsche dar.

Diese feierliche Sitzung dient jährlich auch dazu, die von den drei Klassen der Akademie vorgenommenen und von unserem Protektor allergnädigst bestätigten Neuwahlen von Mitgliedern kund zu geben. Ich ersuche die Herren Klassensekretäre, dem zu entsprechen.

Der Klassensekretär, Herr C. v. Voit, verkündete sodann die von der Klasse gewählten und von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinz-Regenten bestätigten correspondirenden Mitglieder:

1. Dr. phil. Ernst Heinrich Bruns, ord. Professor der Astronomie an der Universität Leipzig;
2. Dr. med. Oskar Hertwig, ord. Professor der Anatomie an der Universität Berlin;

Digitized by Google

3. Dr. Franz Eilhard Schulze, k. preuss. Geh. Regierungsrath, ord. Professor der Zoologie und Direktor des zoologischen Instituts an der Universität Berlin;
4. Dr. med. Adolf Fick, k. Geheimer Rath, ord. Professor der Physiologie an der Universität Würzburg.

Hierauf fuhr Geheimrath v. Pettenkofer fort:

Bevor Herr Kollege Paul die angekündigte Festrede beginnt, erlaube ich mir noch einige Mittheilungen zu machen.

Bisher haben die einzelnen Akademien der Wissenschaften jede für sich gearbeitet. Dadurch kam es, dass hie und da zwei Forscher, welche verschiedenen Akademien angehörten, den gleichen Gegenstand mit wesentlich gleichem Resultate bearbeiteten. Es ist nun erfreulich, dass in neuerer Zeit grössere wissenschaftliche Aufgaben von verschiedenen Akademien gemeinsam durch Delegirte in Angriff genommen werden. Diesem Kartellverhältniss unter mehreren Akademien haben auch die verschiedenen Staatsregierungen zugestimmt.

Eines dieser Unternehmen ist die Herstellung eines umfassenden Werkes über die lateinische Sprache und Literatur, des Thesaurus linguae latinae, wofür unsere Akademie ihr Mitglied Eduard v. Wölfflin delegirt hat, und wofür Ministerium und Landtag auch die nöthigen Mittel bewilliget haben.

Ein Analogon soll nun auch für die altägyptische Sprache und ihre Hieroglyphenschrift geschaffen werden, welche Sprache ja erst in neuerer Zeit sozusagen erst wieder aus ihren Gräbern erweckt wurde und von den Todten auferstanden ist. Dabei wird unsere Akademie von dem hervorragenden Aegyptologen Georg Ebers vertreten sein. Hoffentlich findet auch dieses Unternehmen die nöthige staatliche Unterstützung.

Die in Kartellverbindung stehenden Akademien haben auch eine Kommission für die Herausgabe einer Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften ins Leben gerufen. Dieser Kommission gehört unser Mitglied Walther Dyck an.

In England fühlt man das Bedürfniss, ein umfassendes Verzeichniss, ein Lexikon für sämmtliche gedruckte naturwissen-

Digitized by Google

schaftliche Arbeiten zu schaffen und hat man sich desshalb an sämmtliche Regierungen und Akademien Europas und Amerikas gewandt. Auch diesem grossen Unternehmen steht Erfolg in Aussicht.

Hier darf ich auch eines nun glücklich vollendeten Werkes, der hydrographischen Karte des Bodensees mit Beilagen gedenken, zu deren Herstellung sich die fünf Uferstaaten Oesterreich, Bayern, Württemberg, Baden und Schweiz vereiniget hatten, und wobei auch mehrere Mitglieder unserer Akademie mitgewirkt haben. Der Bodensee ist jetzt nicht nur in seiner räumlichen Ausdehnung mustergiltig dargestellt, sondern auch ermittelt, was in seinem Wasser von der Oberfläche bis in seine Tiefen schwebt und lebt. Dieses Werk ist auch eine Naturgeschichte des grössten europäischen Binnensees geworden.

Dieses Zusammenarbeiten gelehrter Körperschaften macht aber das Einzelarbeiten ihrer Mitglieder über einzelne wissenschaftliche Fragen durchaus nicht überflüssig oder entbehrlich, im Gegentheil, Einzelforschungen und deren Resultate müssen bereits vorliegen, ehe man daran denken kann, sie nach verschiedenen Gesichtspunkten zusammenzustellen und fürs allgemeine auszunützen.

Es sei mir gestattet, als ein solches Beispiel hier eine Untersuchung anzuführen, welche die erste ist, die aus den Renten der Münchener Bürgerstiftung bei unserer Akademie einen Beitrag erhielt, die ein Mathematiker ausgeführt hat, die aber auch allen Nicht-Mathematikern verständlich und interessant ist.

Schon vor Jahren machte unser Mitglied Ferdinand Lindemann darauf aufmerksam, dass in archäologischen und prähistorischen Sammlungen sich Gegenstände vorfinden, Krystallmodelle, Steinringe, abgestumpfte Pyramiden, deren praktischer Zweck kaum zu deuten war. Lindemann ist der Ansicht geworden, dass es Zahlzeichen und Gewichte der urältesten Zeit seien und begann in verschiedenen Museen nach solchen Dingen zu suchen. Was er bis jetzt gefunden, bedarf allerdings noch weiterer Bearbeitung, aber in der jüngsten Sitzung unserer

Digitized by Google

mathematisch-physikalischen Klasse konnte er doch schon folgende Mittheilungen machen:

Vom 19. August bis 24. October d. Js. besuchte er in Ober- und Mittelitalien 30 verschiedene Museen für prähistorische, etruskische und römische Alterthümer. Er hatte sich wesentlich 3 Fragen gestellt:

1. Gibt es noch andere antike reguläre oder halb reguläre Polyeder, als die bisher veröffentlichten?

2. Gibt es noch weitere Anhaltspunkte, die auf uralte Beziehungen zwischen Oberitalien und Aegypten, beziehungsweise Vorderasien schliessen lassen, wie sie durch die Interpretation Lindemann's der auf dem Dodekaeder vom Monte Loffa eingeschnittenen, scheinbar ägyptischen Ziffern, sowie durch die von demselben Fundorte stammenden babylonischen, mit den gleichen ägyptischen Ziffern bezeichneten Gewichte festgestellt sind?

3. Wie weit lässt sich überhaupt der Gebrauch von Gewichten in die prähistorische Zeit zurück verfolgen?

In Betreff der ersten Frage war die Ausbeute gering. Ueber die wenigen aufgefundenen Stücke fehlte es an genaueren Fundberichten, sodass sich keine sicheren Schlüsse ziehen lassen.

Um so reicher waren die Ergebnisse in Betreff der beiden anderen Fragen, welche ja unter sich aufs engste zusammenhängen. In Verona, Mantua, Pesaro, Mazzabotto und Modena fanden sich Gewichtsstücke aus Stein und Terrakotta mit den gleichen hieroglyphischen Silbenzeichen, wie sie von ägyptischen Gewichten aus Altägypten bekannt sind, während auf anderen (jüngeren) Stücken ägyptische Gewichtsbezeichnungen in etruskischer Transkription festgestellt wurden. Wie bei den Gewichten vom Monte Loffa herrscht auch hier die babylonische Gewichtsnorm mit einer Grundeinheit von ca. 100 Gramm, nur selten scheint daneben die eigentliche ägyptische Einheit von ca. 91 Gramm vorzukommen.

Durch die vorgenommenen Wägungen dürfte festgestellt sein, dass die zahlreich vorkommenden Terrakottastücke in Gestalt von abgestumpften Pyramiden nichts anderes als Ge-

Digitized by Google

wichte sind und der Gebrauch derselben lässt sich durch einige in den Museen von Rom und Florenz aufbewahrte Grabfunde sicher bis ins siebente Jahrhundert vor Christus feststellen. Aber schon früher, besonders in den Terramaren der Emilia kommen ähnlich gestaltete, meist aus dunklem Thon roh gearbeitete Stücke vor, die nach demselben babylonischen Fusse normirt zu sein scheinen, auch theilweise in den Museen als Gewichte der Steinzeit bezeichnet sind.

Daneben finden sich in den Terramaren und Pfahlbauten ausserordentlich zahlreiche runde, in der Mitte durchbohrte Steine, deren Gewichtsabstufungen wiederum auf dieselbe Einheit schliessen lassen, und die auch theilweise durch Zeichen (Punkte und Striche) als Gewichte bemerklich gemacht sind. Das Gleiche gilt auch für die ebenso zahlreich vorkommenden Thonringe, welche man bisher als Untersätze für Vasen betrachtete.

Im Ganzen wurden 1197 Gewichtsstücke gewogen und beschrieben; es wird natürlich einige Zeit verstreichen, bis eine eingehendere Bearbeitung des reichen Materials von Lindemann vorgelegt werden kann.

Die gemachten Bemerkungen über die Gewichte aus der Periode der Terramaren und der Pfahlbauten beziehen sich übrigens nicht bloss auf Italien, sondern haben auch für andere Gegenden Europas und Vorderasiens wahrscheinlich Giltigkeit, wie sich aus einigen in Rom, Florenz und Bologna vorgenommenen Gewichtsbestimmungen anderer Fundorte ergab. Insbesondere hat mich überrascht, dass solche etruskische Terrakotta-Gewichte in unserer prähistorischen Staatssammlung auch in den Pfahlbauten des Starnberger Sees vorkommen, sowie unter den von Seiner Königlichen Hoheit dem Prinzen Ruprecht jener Sammlung überwiesenen Geschenken. Auch unter den Funden aus den Höhlen des fränkischen Jura sind steinerne Gewichte vorhanden, darunter zwei, die in ähnlicher Weise wie die altitalienischen mit ägyptischen Zeichen markirt sind.

Soweit sich nun aus den auf dieser Reise Lindemann's gesammelten Erfahrungen Schlüsse ziehen lassen, haben die

Digitized by Google

früher auf Grund der Funde vom Monte Loffa aufgestellten Hypothesen in Betreff der Geschichte der Ziffern erneute Bestätigung gefunden. Die Beziehungen Italiens und Mitteleuropas scheinen sich in viel weiter entlegene Zeiten zurückverfolgen zu lassen, als man bisher anzunehmen gewagt hat, was gewiss von allgemeinem Interesse ist.

Als Generalkonservator der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates, welche mit der Akademie der Wissenschaften eng verbunden sind, bitte ich, noch eine kurze Mittheilung machen zu dürfen. Unter den Staatssammlungen hat bisher die mathematisch-physikalische Sammlung vielleicht die wenigste Beachtung gefunden. Erst in neuester Zeit sieht man ein, welch hohen historischen Werth sie haben würde, wenn sie nicht bloss ein Lager alter Instrumente, sondern ein vollständiges getreues Bild der physikalischen Forschungen bayerischer Gelehrter und der Thätigkeit unserer bayerischen Werkstätten für wissenschaftliche Instrumente werden würde. Das Generalkonservatorium hat dem Ministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten dahin zielende Vorschläge unterbreitet und Seine Excellenz Herr Staatsminister Dr. v. Landmann hat dieselben wärmstens aufgenommen, sodass wir das Beste hoffen können.

Namen in dieser Beziehung, wie Fraunhofer, Reichenbach, Steinheil, Ohm stehen wohl an der Spitze. Die verehrten Anwesenden können sich vorstellen, welche Freude ich hatte, als ich am 14. Juni d. Js. von Herrn Rentier Dr. Sigmund Ritter v. Merz, früher Eigenthümer und Direktor des von Fraunhofer begründeten optischen Instituts folgende Mittheilung erhielt:

„Nachdem mir Kenntniss geworden, dass das k. Generalkonservatorium für ein historisches Museum historisch-wissenschaftliche Apparate zu erwerben strebe, kam mir der Gedanke, dass dafür ein Instrument, welches ein hervorragender bayerischer Gelehrter zum Zwecke seiner Forschungen konstruirte und damit die neuen Gesetze des Lichtes messend begründete, willkommen sein dürfte. Es ist dieses Fraunhofer's Original-Spektrometer. Ich habe selbst Dezennien damit für die Funda-

Digitized by Google

mentalbestimmungen meines optischen Instituts gearbeitet. Nun aber bei vorgeschrittenem Lebensalter ist es mir entbehrlich und bin ich gewillt, dasselbe dem k. Generalkonservatorium schenkungsweise zu Eigenthum zu offeriren. Ich vermag gleichzeitig damit auch Fraunhofer's Original-Abhandlungen im Manuskript, sowie eine Kollektion Fraunhofer Glasprismen zu übergeben."

Diese hochherzige Schenkung wurde vom Generalkonservatorium und vom Ministerium dankbarst angenommen und dem patriotischen Schenker die höchste Auszeichnung, welche die Akademie der Wissenschaften beantragen darf, die goldene Medaille bene merenti, verliehen.

Es handelt sich noch um viele andere Dinge, welche im Lande zerstreut liegen, unbeachtet bleiben, schliesslich zu Grunde gehen, oder ins Ausland wandern, wie es z. B. der Reichenbach'schen Theilmaschine bevorsteht, für welche von Amerika und Russland bereits grosse Summen angeboten wurden.

Doch wir wollen hoffen, dass auch die berühmte Reichenbach'sche Theilmaschine in ihrer Heimath verbleiben darf.

Digitized by Google

Sitzung vom 4. Dezember 1897.

1. Herr Karl Linde hält einen Vortrag: „Ueber die specifische Wärme der Gase".

2. Herr Emil Selenka macht die Mittheilung, dass er seine grosse Sammlung von Schädeln anthropoider Affen aus Borneo der hiesigen k. anthropologischen Sammlung zum Geschenke machen wolle.

3. Herr Direktor Sigmund v. Merz hatte die Güte, der mathematisch-physikalischen Sammlung des Staates, ausser dem grossen Theodolithen, welchen Fraunhofer zu seinen optischen Untersuchungen benützte, 60 Prismen und eine Anzahl wichtiger Manuskripte des berühmten Forschers zu schenken.

Digitized by Google

Ueber die Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase.

Von **Carl Linde.**

(*Eingelaufen 21. Januar 1898.*)

Die Frage, ob und wie die specifische Wärme der Gase, insbesondere der atmosphärischen Luft, mit dem Wärmezustande veränderlich sei, wird von den Physikern verschiedenartig beantwortet. Während auf Grund der Versuche von Regnault, E. Widemann u. A. die specifische Wärme c_p der atmosphärischen Luft (bei constantem Drucke) meist als eine, von Temperatur und Druck unabhängige, Grösse betrachtet wird, hat — um nur an die bekanntesten unter den neueren experimentellen Untersuchungen zu erinnern — Lussana[1]) eine Zunahme derselben mit zunehmendem Drucke gefunden und glauben Mallard und Le Chatelier[2]) eine solche Zunahme mit zunehmender Temperatur festgestellt zu haben. Auch auf theoretischem Wege ist die Veränderlichkeit von c_p vielfach zum Gegenstande von Untersuchungen gemacht worden. In der That muss c_p eine constante Grösse sein für ein vollkommenes Gas, also für ein Gas, in welchem anziehende Kräfte zwischen den kleinsten Teilen nicht mehr wirksam sind, sodass Veränderungen der Energie nur in solchen der lebendigen Kraft bestehen, welche der Molekularbewegung entspricht. Alle Abweichungen aber von diesen Bedingungen müssen im Allgemeinen auch Ver-

---

[1]) Nuov. Cim. p. 70—87 u. p. 130—142. 1894.

[2]) C. R. 104, p. 1780—82, 1887 und Séanc. Soc. de Phys. 1888, p. 308—327.

Digitized by Google

änderungen von c_p zur Folge haben und demgemäss stehen solche Abweichungen in gesetzmässigen Beziehungen zu dieser Veränderlichkeit. So hat z. B. Witkowski[1]) aus der Variation der Ausdehnungscoefficienten diejenige der specifischen Wärme berechnet, wobei er eine Zunahme derselben mit zunehmendem Drucke und abnehmender Temperatur findet.

Eine Erscheinung nun, welche die Einwirkung und Grösse der inneren Arbeit infolge der molekularen Anziehungskräfte besonders deutlich zeigt, ist die Abkühlung, welche ein Gas erfährt, wenn es ohne jeden Energie-Austausch nach aussen hin von einem höheren zu einem niedrigeren Drucke überströmt. Ich habe an anderer Stelle[2]) bereits angedeutet, dass die Veränderlichkeit dieser Abkühlungen mit derjenigen von c_p in einem besonders einfachen und übersichtlichen Zusammenhange steht. Die Untersuchung der in Rede stehenden Abkühlungen ist bekanntlich vor langen Jahren durch Thomson und Joule[3]) innerhalb gewisser Grenzen für atmosphärische Luft, Kohlensäure und Wasserstoff durchgeführt worden und fassten die genannten Experimentatoren ihre Ergebnisse in dem Ausdrucke zusammen:

$$\delta = T - \Theta = a \frac{p - p_0}{T^2}\text{[4])} \quad \text{bezw.}$$

$$d\,T = a \frac{d\,p}{T^2} \qquad 1)$$

wenn δ die Abkühlung von der abs. Temperatur T auf die resultirende Temperatur Θ beim Ausströmen vom Drucke p zum Drucke p_0 bedeutet, und a eine constante Grösse (bei atmosphärischer Luft $a = 20808$ für p in kg p. qm) ist.

Hieran lässt sich die folgende Schlussfolgerung anknüpfen: Wird einem Gasstrome unter dem constanten Drucke p die Wärmemenge W entzogen, sodass seine Temperatur von T_1 auf T_2 sinkt, erfährt derselbe alsdann eine weitere Abkühlung auf

[1]) Bull. de l'Acad. d. Sc. d. Cracovie, Oct.-Nov. 1895.

[2]) Wiedem. Ann. 1896, p. 328.

[3]) Phil. Trans. Roy. Soc. p. 579, 1862.

[4]) Näherungsformel für kleine Druckdifferenzen.

Digitized by Google

T_3 dadurch, dass er auf den niedrigeren Druck p_0 überströmt; wird ihm endlich bei constantem Drucke p_0 die Wärmemenge W wieder zugeführt, so muss unter der Voraussetzung, dass keine sonstige Energieveränderung stattfand, die resultirende Temperatur T_4 dieselbe sein, wie diejenige, welche sich ergeben würde, wenn der Gasdruck direkt (ohne den Wärmeaustausch $\pm W$) mit der Ausflusstemperatur T_1 von p durch Ausströmen auf p_0 gesunken wäre.

Man hat also:

$$W = c_p (T_1 - T_2) = c_{p_0} (T_4 - T_3),$$

wenn c_p und c_{p_0} die Mittelwerte der specifischen Wärme bei den Drucken p und p_0 je zwischen den zugehörigen Temperaturgrenzen bedeuten. Wenn nun $T_2 - T_3 > T_1 - T_4$, so folgt daraus: $c_p > c_{p_0}$.

Bei unendlich kleinen Werten von W wird:

$$c_p \, dt = c_{p_0} (dt + d\delta)$$

und (da δ mit abnehmendem t zunimmt)

$$c_p = c_{p_0} \left(1 - \frac{d\delta}{dt}\right) \qquad 2)$$

Werden in einem Diagramme die absoluten Temperaturen T als Ordinaten und die zugehörigen, einer bestimmten Druckdifferenz $p - p_0$ entsprechenden, Abkühlungen δ als Abscissen aufgetragen und bezeichnet man den von der Tangente an einen Punkt der so erhaltenen „Abkühlungscurve" und von der Ordinaten-Richtung eingeschlossenen Winkel mit α, so erhält man auch:

$$c_p = c_{p_0} (1 + \operatorname{tg} \alpha) \qquad \text{I)}$$

Die hiedurch gegebene Beziehung ist allgemein und in aller Strenge giltig, da sie ohne jede andere Voraussetzung entwickelt ist, als der in dem Principe von der Erhaltung der Energie enthaltenen. Es ist gemäss dieser Beziehung also für die Kenntnis von der Veränderlichkeit der specifischen Wärme c_p nur erforderlich, für eine bestimmte Druckdifferenz den Verlauf der Abkühlungscurve zu kennen.

Digitized by Google

Zu numerischen Werten für ein bestimmtes Gas wird man gelangen können, wenn ein zahlenmässiger Ausdruck für das Gesetz der Veränderlichkeit der Abkühlung gegeben ist. Unter der Voraussetzung, dass die obige Gleichung 1) einen solchen Ausdruck darstelle, ergiebt sich folgendes:

Die Integration der Gleichung 1) liefert:

$$\delta = T - \Theta = T - \sqrt[3]{T^3 - 3\,a\,(p - p_0)}$$

Fernerhin hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{d\,\delta}{d\,T} = \frac{T^2}{\sqrt[3]{[T^3 - 3\,a\,(p_2 - p_0)]^2}}$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung I, so erhält man:

$$\frac{c_p}{c_{p_0}} = \left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 \qquad \text{II)}$$

Nun ist für unendlich kleinen Druck c_{p_0} als eine Constante anzusehen, womit auch Witkowski's Versuche bei sehr niedrigen Temperaturen und Drucken übereinstimmen. Setzt man für atmosphärische Luft $c_{p_0} = 0{,}237$ und $a = 20808$ so erhält man beispielsweise die folgenden Werte für $1000\,c_p$.

	+ 100°	0°	— 50°	— 100° C
10 Atm.	239	242	245	258
40 „	245	251	278	369
70 „	251	277	331	846

Selbstredend können die obigen Formeln nicht mehr benutzt werden, sobald die Sättigungstemperaturen erreicht werden, bei welchen Verflüssigung beginnt.

Beim kritischen Zustande muss $c_p = \infty$ werden, weil hier unendlich kleinen Veränderungen der Temperatur endliche Volumveränderungen entsprechen. Sucht man diejenige Temperatur auf, für welche bei 39 Atmosphären (dem kritischen Drucke der atmosphärischen Luft) $\alpha = 90^0$, also $c_p = \infty$ wird,

Digitized by Google

so findet man aus obigen Gleichungen — 136° C, also einen der kritischen Temperatur (— 140° C) nahe liegenden Wert. Hierin wird eine Bestätigung nicht nur für die Richtigkeit der obigen Ueberlegungen, sondern auch dafür gesehen werden dürfen, dass die von Thomson und Joule gegebenen Constanten innerhalb sehr weiter Grenzen zutreffend sind. Dass indessen der Wert a nicht ein absolut constanter sein kann, dass er vielmehr bei höheren Drucken abnehmen muss, geht aus theoretischen Erwägungen hervor und stehen damit in Uebereinstimmung die Messungen, welche ich bei vielfachen Versuchen über die Ausströmung von atmosphärischer Luft unter Drucken bis zu 250 Atmosphären anstellen konnte. Während sich bei allen Drucken bis hinab zur Verflüssigungstemperatur ein Anwachsen der Abkühlung umgekehrt proportional zum Quadrate der absoluten Ausströmungstemperatur zeigte, so blieb die von Thomson und Joule beobachtete Proportionalität der Abkühlung zur Druckdifferenz bei höheren Drucken nicht mehr bestehen, sondern es zeigte sich (etwa mit 50 Atmosphären beginnend) eine merkliche Abnahme von a mit zunehmendem Drucke. Der Ausführung exacter Versuche zur Bestimmung der Ausströmungsabkühlung der Gase innerhalb weiter Druckgrenzen würde für die Feststellung der Veränderlichkeit der specifischen Wärme der Gase ein entscheidender Wert beizumessen sein.

Digitized by Google

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis December 1897.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Geschichtsverein in Aachen:

Zeitschrift. 19. Band. 1897. 8⁰.

Société d'Émulation in Abbeville:

Mémoires. Tome I, fasc. 2. 3. 1895/96. 4⁰.
Bulletin. Année 1894 No. 3. 4, 1895 No. 1—4. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXI, 1. 1897. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations in the year 1894. 1897. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1896. 1897. 8⁰.
Rad. Bd. 130. 131. 1897. 8⁰.
Grada za povjest Kńiževnosti Hrvatske. Bd. 1. 1897. 8⁰.

Archäologische Gesellschaft in Agram:

Vjesnik. II. Ser., II. Bd. 1896/97. 1897. 4⁰.

New-York State Library in Albany:

New-York State Museum. 48th annual Report for 1894. 3 vols. 1895. 8⁰.
New-York State Library. 77th annual Report for 1894. 1897. 8⁰.

University of the State of New-York in Albany:

Additions. No. 3. 4. 1896—97. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1895 No. 4, 1896 No. 1. 1896. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I. Sectie. Deel V, No. 3—8. 1896. 4⁰.
II. Sectie. Deel II u. V, No. 4—10. 1896—97. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1896—97. 1897. 4⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde 3e Reeks, Deel XII und Register zu Deel I—XII. 1896. 8⁰.
Jaarboek voor 1896. 1897. 4⁰.
Prijsvers: Reditus Augustii. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. XXIII. Bd. 1896. 8⁰.

Texas Academy of Science in Austin:

Transactions. Vol. I, No. 5. 1897. 8⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

30th annual Report. 1897. 8⁰.
Catalogue of the Library of the Peabody Institute. Part I. II. 1896. 4⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XVI, No. 131; Vol. XVII, No. 132. 133. 1897. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XVIII, 3. 4; Vol. XIX, 1—3. 1896/97. 8⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XVII, 1—4. 1896. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 18, No. 7—10; Vol. 19, No. 1—4. 1896—97. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. VIII, No. 75—80. 1897. 4⁰.
Studies in historical and political Science. XIV. Series, No. VIII—XII; XV. Series, No. I—V. 1896—97. 8⁰.

Historischer Verein in Bamberg:

56. u. 57. Bericht für die Jahre 1894—96. 1897. 8⁰.
Der Dom zu Bamberg. Von Michael Pfister. 1896. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XI, 3. 1897. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:

Tijdschrift. Deel 39, afl. 4—6. 1896—97. 8⁰.
Notulen. Deel 34, afl. 3. 4. 1896—97. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 48, 3; 50, 3. 1896—97. 4⁰.
Dagh-Register Anno 1668—1669. 1897. 4⁰.

Observatory in Batavia:

Observations. Vol. XVIII, 1895; Vol. XIX, 1896. 1896—97. fol.
Regenwaarnemingen. XVII. Jahrg. 1895; XVIII. Jahrg. 1896. 1896—97. 8⁰.
Wind, weather, currents, tides an tidal, streams in the Indian Archipelago. 1897. fol.

K. natuurkundig Vereeniging van Nederlandsch Indië in Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 56. 1897. 8⁰.
Boekwerken ter tafel gebracht in de vergaderingen 1896. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:

Archiv. Band XX, 1. 1896. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Glas. No. 52. 54. 1897. 8⁰.
Spomenik. No. 32. 1897. fol.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account of the Crustacea of Norway. Vol. II, part 5—8. 1897. 4⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus den Jahren 1895—96.

Digitized by Google

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Statuten und Reglements. 1896. 4⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1896. 1896. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1897, No. 26—39. 4⁰.
Corpus inscriptionum graecarum. Vol. III, fasc. 1. 1897. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Abhandlungen. Neue Folge. Heft 21—23. 1896. 4⁰.
Geognostische Uebersichtskarte des Thüringer Waldes. 1897.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 30. Jahrg., No. 11—18. 1897. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 49, Heft 1 u. 2. 1897. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Namenregister zu den Fortschritten der Physik. Bd. 21—43. I. Hälfte. 1897. 8⁰.
Die Fortschritte der Physik im Jahre 1891. 47. Jahrg., Abth. I—III. Braunschweig 1897. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 16, No. 8—10. 1897. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. X, Literatur 1896 Register; Bd. XI, No. 7—19. 1897. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1896—97, No. 5—17. 8⁰.
J. Rosenthal, Gedächtnissrede auf Emil du Bois-Reymond. 1897. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XII, Heft 1—3. 1897. 4⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Bericht über das Jahr 1896. 1897. 8⁰.
Ergebnisse der meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1894 u. 1895. 1897. 4⁰.
Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1892—94. 1897. 4⁰.
Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1893 und im Jahre 1897. 1897. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXVI, Heft 1. 2. 1897. 8⁰.

Kuratorium der Savigny-Stiftung in Berlin:

Zeitschrift für Rechtsgeschichte 1.—13. Bd. (1861—1878).
Namen- und Sachregister zum 1.—13. Bd. (1880).
Zeitschrift der Savigny-Stiftung für Rechtswissenschaft (1880—1897) und zwar: German. Abtheilung 1.—18. Bd., Roman. Abtheilung 1.—18. Bd. Weimar. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora 1897. Heft 13—24. 1897. 8⁰.
Verzeichniss der grossen allgemeinen Gartenbauausstellung zu Berlin im April—Mai 1897. 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XII, Heft 7—12. 1897. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 17. Jahrg., 1897. No. 7—12. Juli-December. 4⁰.

Digitized by Google

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:
Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. 22. Bd. Zürich 1897. 8⁰.

Allgemeine Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwissenschaften in Bern:
Neue Denkschriften. Bd. 35. Basel 1896. 4⁰.
Verhandlungen der Jahresversammlung zu Zürich 1896 und zu Zermatt 1897 mit je 1 französischen Compte-rendu. Genf 1895 und Zürich 1896. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:
Archiv. Band XV, Heft 1. 1897. 8⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:
Sitzungsberichte 1896, II. Hälfte; 1897, I. Hälfte. 8⁰.

Universität in Bonn:
Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:
Bonner Jahrbücher. Heft 104. 1897. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:
Verhandlungen. 53. Jahrg., 2. Hälfte, 1896; 54. Jahrg., 1. Hälfte, 1897. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:
Actes. Vol. 48. 1895. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1897, No. 12—22. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:
Proceedings. Vol. XXXII, No. 2—17, 1896/97; Vol. XXXIII, No. 1—4, 1897. 8⁰.
Memoir of George Brown Goode, by S. P. Lanley. Washington 1897. 8⁰.

American Philological Association in Boston:
Transactions. Vol. 27. 1896. 8⁰.

Public Library in Boston:
45th annual Report for 1896—97. 1897. 8⁰.

Boston Society of natural History in Boston:
Proceedings. Vol. 27, No. 14; Vol. 28, p. 1—115. 1897. 8⁰.

Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig:
10. Jahresbericht für 1895/96 und 1896/97. 1897. 8⁰.
Braunschweig im Jahre 1897. Festschrift. 8⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:
74. Jahresbericht nebst Ergänzungsheft. 1897. 8⁰.

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:
Zeitschrift. Jahrg. I, Heft 3. 4. 1897. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:
Mémoires couronnés. Tome XV, fasc. 1. 1897. 8⁰.
Bulletin. IV. Série. Tome XI, No. 6—10 et Tables alphabétiques des tomes 1 à 20 de la IIIe Série. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Mémoires couronnés in 4⁰. Tome 54. 1896. 4⁰.
Mémoires couronnés in 8⁰. Tome 48, vol. 1; 49; 50 vol. II; 53 et 54. 1896. 8⁰.
Biographie nationale. Tome XIII, 2; XIV, 1. 1894—96. 8⁰.
Bulletin. 3. Série. Tome 33, No. 5—6; Tome 34, No. 7—11. 1897. 8⁰.
Notices biographiques et bibliographiques 1896. 1897. 8⁰.
Règlements 1896. 8⁰.
Collection de Croniques Belges inedités 1895—96. 7 vols. in 4⁰ u. 2 vols. in 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome XVI, fasc. 3. 1897. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. IIᵉ Série. Tome 10, fasc. 1 u. Tome 11, fasc. 1. 1897. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1897. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mittheilungen.) Bd. XXVI. 3. 4; XXVII, 1. 2. 1896—97. 8⁰.
Történettud. Értekezések. (Historische Abhandlungen.) XVI, 8—12; XVII, 1. 1896—97. 8⁰.
Monumenta comitiorum regni Transylvaniae. Vol. XIX. 1896. 8⁰.
Tarsadalmi Értekezések. (Staatswissenschaftl. Abhandlungen.) XI, 12; XII, 1. 2. 1896—97. 8⁰.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) XVI, 8. 9. 1896. 8⁰.
Archaeologiai Értesítö. Neue Folge. Bd. XVI, 3—5; Bd. XVII, 1—3. 1896—97. 4⁰.
Monumenta Hungariae historica. Sectio I, Vol. 28; Sectio II, Vol. 35. 1896—97. 8⁰.
Mathematikai Értesítö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XIV, 3—5; XV, 1—3. 1896—97. 8⁰.
Mathematische und naturwissensch. Berichte aus Ungarn. Bd. XIII, 2. 1897. 8⁰.
Rapport. 1896. 1897. 8⁰.
B. Munkácsi, Sammlung vogulischer Volksdichtungen. Bd. IV, 1. 1897. 8⁰.
Pastor Roseus, L. von J. S. von Petényi. 1896. 4⁰.

K. ungarisches Ackerbauministerium in Budapest:

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. I. 1897. 4⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen. Band XI, Heft 4. 5 mit einem Atlas. 1897. 8⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 27, Heft 5—7. 1897. 8⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Tomo V (= 2ª Seria, tomo 2) 1896—97. 4⁰.
Memorias correspondiente el año 1894, 1895 y 1896. 1897. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Prodrome de la Flore algologique des Indes Néerlandaises par É. de Wildeman. Batavia 1897. 8⁰.
Mededeelingen. No. XX. Batavia 1897. 4⁰.
Verslag over het jaar 1896. Batavia 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Serie II. Tome XVIII, Partea administrativă und Memoriile sectiuniĭ istorice; Tome XIX, Partea administrativă. 1896. 4⁰.
Trei-ḑeci de ani de domnie aĭ Regelui Carol I. 2 voll. 1897. 4⁰.
Eudoxiu de Hurmuzaki, Documente privitóre la Istoria Románilor. Vol. X u. Suppl. I, Vol. 2. 1897. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 4e Série. Vol. 10, fasc. 1. 2. 1896. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1897. Januar—July. 1897. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. VII, part 7. Simla 1897. fol.
Report on the Administration 1896—97. 1897. fol.
India Weather Review Annual Summary 1896. 1897. fol.

Government of India, Department of Revenue and Agriculture in Calcutta:

Memorandum on the snowfall in the mountain district. Simla 1897. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

Records. Vol. 30, part 2—4. 1897. 4⁰.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca India. New Ser. No. 886—900. 1897. 8⁰.
Journal. No. 359—361. 1897. 8⁰.
Proceedings. 1897. No. I—IV. 1897. 8⁰.

Astronomical Observatory at Harvard College in Cambridge, Mass.:

52th annual Report for 1896/97. 1897. 8⁰.
Annals. Vol. XXVI, part 2; Vol. XXVIII, part 1; Vol. XXXVI. 1896—97. 4⁰.

The Adams Memorial Committee in Cambridge:

The Scientific Papers of John Conch Adams. Vol. I. 1896. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. IX, 6. 1897. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, 2. 1897. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 31, No. 1—4. 1897. 8⁰.
Memoirs. Vol. XIX, 2; XX; XXI und Atlas; XXIII, 1. 1897. 4⁰.
Annual Report for 1896—97. 1897. 8⁰.

Department of Agriculture in Cape Town:

First annual Report of the Geological Commission 1896. 1897. 4⁰.

Geological Commission, Colony of the Cape of Good Hope in Cape Town:

Bibliography of South African Geology by H. P. Saunders. Parts I u. II. 1897. 4⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Bullettino mensile. Nuova Ser. Fasc. 47—49. 1897. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1896. Berlin 1897. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Abhandlungen. Heft II. Leipzig 1897. 4⁰.
Das Klima des Königreichs Sachsen. Heft IV. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Academy of sciences in Chicago:
39th annual Report for the year 1896. 1897. 8⁰.
Bulletin. No. 1 of the Geological and Natural History Survey. 1896. 8⁰.

John Crerar Library in Chicago:
1t and 2d annual Report. 1895. 1896. 1897. 8⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:
Publications. No. 15—21. 1897. 8⁰.
Second annual Exchange Catalogue for the year 1897—98. 1897. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:
The Monist. Vol. VII, No. 9; Vol. VIII, No. 1. 1897. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:
The Open Court. Vol. XI, No. 7—12. 1897. 8⁰.

K. Norwegische Universität in Christiania:
Universitets Aarsberetning for 1895—96. 1897. 8⁰.
Archiv for Mathematik. Bd. XIX, Heft 3. 1897. 8⁰.
4 juristische Dissertationen. 1897. 8⁰.

Videnskabsselskabet in Christiania:
Forhandlinger. Aar 1895. 1896. 1896—97. 8⁰.
Skrifter. 1895, I. II. 1896, I. II. 1896—97. 4⁰.

Editorial Committee of Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—1878 in Christiania:
No. XXIV. Botanik. Protophyta of H. H. Gran. 1897. fol.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:
Jahresbericht. Bd. 40, 1896/97. 1897. 8⁰.

Museum Association in Cincinnati:
16th annual Report 1896. 1897. 8⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:
Chemiker-Zeitung 1897. No. 47—104. fol.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Republ. Argent.):
Boletin. Tomo XV, 2. 3. Buenos Aires 1897. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1897/98. 1897. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden 1897/98. 1897. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:
Oberhessisches Wörterbuch von W. Crecelius. Lfg. 2. 1897. 8⁰.

Davenport Academy of natural sciences in Davenport:
Proceedings. Vol. VI. 1897. 8⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
R. C. Hills, The Oscuro Mountain Meteorite. 1897. 8⁰.
Ferric Sulphate in Mine Waters by L. J. W. Jones. 1897. 8⁰.
Wm. P. Headden, Some products found in the hearth of an old furnace. 1897. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:
Sitzungsberichte 1896. Jurjew 1897. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Vol. 18, trimestre 2 et 3. 1897. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:
Jahresbericht 1896/97. 1897. 8⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. XVIII. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Generaldirektion der k. Sammlungen in Dresden:
Bericht über die Jahre 1894 und 1895. 1897. fol.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. Ser. III. Vol. IV, No. 2. 3. 1897. 8⁰.

Pollichia in Dürkheim:
Mittheilungen. 53. Jahrg., No. 10, 1895; 54. Jahrg., No. 11, 1896. 8⁰.
Der Drachenfels von C. Mehlis. II. Abth. Neustadt 1897. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. 19, No. 7—12. 1897. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XXI, p. 313—472. 1897. 8⁰.

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:
Mansfelder Blätter. 11. Jahrg. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für bildende Kunst und vaterländische Alterthümer in Emden:
Jahrbuch. XII. Band, Heft 1 u. 2. 1897. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
81. Jahresbericht für 1895/96. 1897. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:
Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ und 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 20, disp. 2. 1897. 4⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:
Giornale. Vol. I—X. Roma-Firenze-Torino 1887—97. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band XX, 1; XXIII, 3. 4. 1897. 4⁰.
Bericht 1897. 8⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Jahresbericht f. d. Jahr 1895/96. 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:
Helios. Band 14. Berlin 1897. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrg. X, 7—12; XI, 1—6. 1896—97. 8⁰.

Breisgau-Verein Schau-ins-Land in Freiburg i/Br.:
„Schau-ins-Land." Jahrgang 23 u. 24. 1896 u. 1897. fol.

Universitätsbibliothek in Freiburg i/Br.:
Schriften aus d. J. 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:
Collectanea Friburgensia. Fasc. VII. 1897. 4⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Winter-Semester 1897—98. 8⁰.

Bibliothèque publique in Genf:
Compte-rendu pour l'année 1896. 1897. 8⁰.

Institut national in Genf:
Bulletin. Tome 34. 1897. 8⁰.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:
Mémoires. Tome 32, partie II. 1896—97. 4⁰.

Universität in Genf:
Schriften aus d. J. 1896/97 in 8⁰.

Digitized by Google

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. 17. 1897. 8⁰.

Universität in Giessen:

Schriften aus d. J. 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 73, Heft 1. 1897. 8⁰.

Codex diplomaticus Lusatiae superioris II. Heft 2. 1897. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1897. No. VII—XII (Juli—December). Berlin 1897. 4⁰.

Nachrichten. a) Mathem.-phys. Classe. 1897, Heft 2. 4⁰.
b) Philol.-hist. Classe. 1897, Heft 2. 4⁰.

Abhandlungen. N. F. Band I, No. 1. 6—8; Band II, No. 1—3. Berlin 1897. 4⁰.

Lebensversicherungsbank für Deutschland in Gotha:

68. Rechenschaftsbericht f. d. Jahr 1896. 1897. 4⁰.

Universität in Gothenburg:

Göteborgs Högskolas Arsskrift. Tome III. 1897. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. VII, 2. 1897. 8⁰.

Historischer Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. 45. Heft. 1897. 8⁰.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. 28. Jahrgang. 1897. 8⁰.

Landesmuseum Joanneum in Graz:

85. Jahresbericht für das Jahr 1896. 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Steiermark in Graz:

Mittheilungen. Jahrgang 1896, Heft 33. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:

Nachträge zur Geschichte der Greifswalder Kirchen. Heft 1 (herausgegeben v. Th. Pyl). 1898. 8⁰.

Verein für Greizer Geschichte in Greiz:

2.—5. Jahresbericht. 1897. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel III, aflev. 3. 4, 1897 u. Deel IV. 1898. 8⁰.

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Serie II. Vol. V, 3. 1897. 4⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises. Serie II. Tome I, livr. 1—3. 1897. 8⁰.

Oeuvres de Christian Huygens. Vol. VII. 1897. 4⁰.

K. K. Obergymnasium zu Hall in Tirol:

Programm für das Jahr 1896/97. Innsbruck 1897. 8⁰.

Historischer Verein für Württembergisch Franken in Schwäbisch-Hall:

Württembergisch Franken. Neue Folge VI. 1897. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 33, No. 5—11. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 51, Heft 2 u. 3. Leipzig 1897. 8⁰.
Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. X, No. 2. 4. Leipzig 1897. 8⁰.

Universität in Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Halbjahr 1897/98. 1897. 8⁰.
Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 70, Heft 1. 2. 1897. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten i. J. 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1897. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Ueber die Entstehung und Ausbildung des allgemeinen Stimmrechts. Akademische Rede von Georg Meyer. 1897. 4⁰.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. VII, Heft 2. 1897. 8⁰.

Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg:

Verhandlungen. N. F. Band V, Heft 5. 1897. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 21. 1896. 4⁰.
Öfversigt. 1895/96. 1896. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXVII, Heft 3. 1897. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1896/97. 1897. 8⁰.

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. Bd. 46. 1896. 1897. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Beiträge. Heft 14. Meiningen 1893. 8⁰.
Schriften. 26. u. 27. Heft. 1897. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. 24. Jahrg. 1897. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:

Zeitschrift. 3. Folge, Heft 41 u. Register bis incl. Heft 40 der 3. Folge. 1897. 8⁰.

Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:

Iswestija. Bd. 28, No. 1 u. 3. 1897. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. I, No. 9—11. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Denkschriften. Band V, Lieferung 4. 5; Band VIII, Lieferung 3 mit je 1 Heft Atlas. 1896. fol.

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band XXXI, 1. 2. 1897. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Bd. XI, 2. Jurjew 1896. 8⁰.

Archiv für Naturkunde. II. Serie. Bd. XI, 2. Jurjew 1897. 8⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):

Schriften der Universität aus dem Jahre 1896/97 in 8⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:

Schriften aus dem Jahre 1896/97.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série. Tome VII, No. 2. 3. 1897. 8⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Band 64, No. 7—11. 1897. 8⁰.

5 medicinische Dissertationen in russ. Sprache. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:

Zeitschrift. Band 26. 1897. 8⁰.

Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. II, Heft 1, Abth. 2. 1897. 4⁰.

K. Universität in Kiel:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:

Schriften. Band XI, 1. 1897. 8⁰.

Universität in Kiew:

Iswestija. Vol. 37, No. 5—9. 10 mit Beilage. 1897. 8⁰.

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1896. 1897. 8⁰.

Carinthia I. 87. Jahrg. No. 1—6. 1897. 8⁰.

Archiv für vaterländische Geschichte. 18. Jahrg. 1897. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Jahrbuch. 24. Heft. 1897. 8⁰.

Diagramme der magnetischen und meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1896. fol.

Aerztlich-naturwissenschaftlicher Verein in Klausenburg:

Értesitö. 2 Hefte. 1897. 8⁰.

Stadtarchiv in Köln:

Mittheilungen. 28. Heft. 1897. 8⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Petri Philomeni de Dacia in Algorismum vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius ed. Max Curtze. 1897. 8⁰.

Oversigt. 1897, No. 2—5. 1897. 8⁰.

Skrifter, Naturvidensk. Afd. VIII, 5. 1897. 4⁰.

Mémoires. Section des Sciences, 6ᵉ Sér., tome 8, No. 4.

Digitized by Google

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

E. Vedel, Efterskrift til Bornholms Oldlidsminder og oldsager. 1897. 4⁰.
Nordiske Fortidsminder. 3 Hefte. 1896. 4⁰.
Aarböger 1897. II. Raekke, 11. Band, 3. u. 4. Heft, 1896; 12. Band, 1—3. Heft. 1897. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1896. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:

Sofus Elvius, To hundrede biografier af studenterne fra 1872. 1897. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Sprawozdania komisyi fizyograf. Tom. 31. 1896. 8⁰.
Sprawozdania komisyi Historyi sztuki. Tom. VI, 1. 1897. fol.
Anzeiger. Mai—Juli, October, November. 1897. 8⁰.
Rozprawy. a) filolog. Ser. II, tom. 10,
b) histor.-filoz. Ser. II, tom. 8. 9,
c) matemat. Ser. II, tom. 10—12. 1896—97. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 33. 1897. 8⁰.
Atlas geologiczny Galicyi. Zeszyt VI mit Text. 1896. 8⁰ u. fol.
Archiwum literatury. Tom. IX. 1897. 8⁰.
Misura universale di Tito Livio Burattini. 1897. 4⁰.

Städtisches Museum in Landau (Pfalz):

Erste Ergänzung zum Katalog. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 33. Band. 1897. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Sér. Vol. 33, No. 124. 125. 1897. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. I—IV; V, 1. 2; VI, 1—3. 1892 bis 1897. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie. Deel XVI, afl. 2—4. 1897. 8⁰.
Handelingen 1896—97. 1897. 8⁰.
Levensberichten 1896—97. 1897. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe, Bd. 15, Heft 3. 4 u. Bd. 16, Heft 1. 1897. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XVII, No. 6. 1897. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIV, No. 1. 1897. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. 1897, I. 8⁰.
Berichte der math.-phys. Classe. 1897, III, IV. 8⁰.
Sachregister der Abhandlungen und Berichte der math.-phys. Classe. 1897. 4⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 55, Heft 6—12; Bd. 56, Heft 1—9. 1897. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:

Bulletin. No. 47—49. 1897. 8⁰.

Verein für Geschichte des Bodensees in Lindau:

Bodensee-Forschungen. IX. Abschnitt. Die Vegetation des Bodensees. 1895. 8⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:

Boletin. 15ª Serie, No. 10—12. 1896. 16ª Serie, No. 1—3. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Literary and philosophical Society in Liverpool:
Proceedings. No. 51. 1897. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:
La Cellule. Tome XIII, 1. 1897. 4⁰.

Institution of civil Engineers in London:
List of Members 1897. 8⁰.

The English Historical Review in London:
Historical Review. Vol. XII, No. 47. 48 (Sept., Oct.). 1897. 8⁰.

Royal Society in London:
Proceedings. Vol. 60, No. 368; Vol. 61, No. 375—381. 1897. 8⁰.
Philosophical Transactions. Vol. 186—188. 1895—96. 4⁰.
List of Members. November 1896. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:
Monthly Notices. Vol. 57, No. 8. 9. Vol. 58, No. 1. 1897. 8⁰.

Chemical Society in London:
Journal. No. 416—421 (July—December) und Supplement Number 1896. 8⁰. 1897. 8⁰.
List of the Fellows 1897 May. 8⁰.
Proceedings. No. 182—186. 1897. 8⁰.

Geological Society in London:
The quarterly Journal. Vol. 52, No. 205—208. 1896. 8⁰.

Linnean Society in London:
Proceedings. From November 1895 to June 1896. 1896. 8⁰.
The Journal. a) Botany, Vol. 31, No. 218. 219; Vol. 32; Vol. 33, No. 228. b) Zoology, Vol. 25, No. 163—165; Vol. 26, No. 166. 167.
The Transactions. IIᵈ Series, Botany, Vol. V, part 5. 6. IIᵈ Series, Zoology, Vol. VI, part 6—8; VII, part 1—3. 1896. 4⁰.
List 1896—97. 1896. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:
Medico-chirurgical Transactions. Vol. 80. 1897. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:
Journal. 1897, part 4—6. 1897. 8⁰.

Zoological Society in London:
Proceedings. 1897, part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIV, part 4. 1897. 4⁰.
List of the Fellows. May 1897. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:
Nature. Vol. 56, No. 1440—1471. 4⁰.

Academy of Science in St. Louis:
Transactions. Vol. VII, No. 4—16. 1895—97. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:
Annales. Tome 24, livr. 1. 1896—97. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:
Mémoires. II. Séries, Tome 18. 1895. 8⁰.

Universität in Lund:
Sveriges öffentliga Bibliothek. Accessions-Katalog XI, 1896. Stockholm 1897. 8⁰.
Festskrift med anledning af Hans Majestät Konuag Oscar IIˢ Regerings Jubileum 1872—1897. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Institut Grand Ducal in Luxemburg:

Publications. Tome 25. 1897. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:

Der Geschichtsfreund. Bd. 52. Stans 1897. 8⁰.

Université in Lyon:

Annales: a) Recherches stratigraphiques et paléontologiques dans le Bas-Languedoc par Frédéric Roman. Paris 1897. 8⁰.
b) La République des Provinces-Uniès, la France et les Pays-Bas Espagnols de 1630 à 1650 par Albert Waddington. Paris 1897. 8⁰.
c) Recherches expérimentales sur quelques actinomètres électrochimiques, par H. Rigollot. Paris 1897. 8⁰.
d) Sur le résidu électrique des condensateur, par M. L. Houllevigue. Paris 1897. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 30, cuad. 6; Tomo 31, cuad. 1—6. 1897. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Rendiconti. Serie II. Vol. 29. 1896. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. XX, fasc. 4, 5. b) Classe di Scienze. Vol. XVIII, fasc. 2. 3. 1896. 4⁰.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. 14. 1896. 8⁰.

R. Osservatorio astronomico in Mailand:

Osservazioni meteorologiche nell' anno 1896. 1897. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Memorie. Tomo 6, fasc. 1. 1897. 4⁰.
Atti. Vol. 37, fasc. 1. 1897. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 24, fasc. 14. 15. 1897. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 41, part 4. 1897. 8⁰.

Universität in Marburg:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Meiningen:

Schriften. Heft 1—13. 15—25. 1888—97. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:

Jahresbericht für das Jahr 1896/97. 1897. 4⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:

Mittheilungen. Band IV, 3. 1897. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:

Rivista. Anno II, fasc. 3. 4. 1897. 8⁰.

Académie in Metz:

Mémoires. Année 1895/96. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:

Jahrbuch. 8. Jahrgang 1896, 2. Hälfte. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:

Boletin mensual. Abril—Septiembre 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Regia Accademia di scienze lettere ed arti in Modena:

Memorie. Serie II. Vol. 12, parte 1. 1896. 4⁰.

Società dei naturalisti in Modena:

Atti. Serie III. Vol. 14, fasc. 2. 1897. 8⁰.

Montreal Numismatic and Antiquarian Society in Montreal:

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. IIIᵈ Serie. Vol. I, No. 1. 1897. 8⁰.

Oeffentliches Rumianzoffsches Museum in Moskau:

Feierliche Sitzung zum Andenken des Grafen N. Rumianzoff, den 3. April 1897. 1897. 4⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1896, No. 4; 1897, No. 1. 1897. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:

Correspondenzblatt. 28. Jahrg., No. 5—10. 1897. 4⁰.

Direktion der k. b. Posten und Telegraphen in München:

Verzeichniss der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen mit Nachträgen. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:

Personalstand. Winter-Semester 1897—98. 1897. 8⁰.
Bericht für das Jahr 1896—97. 1897. 4⁰.
Programm für das Jahr 1897—98. 1897. 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. Mai—Oktober. 1897. 8⁰.
Beobachtungen. Jahrgang 18, Heft 4. 1897. 4⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. Jahrg. 1897. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:

Blatt No. XVIII (Speyer) der geognost. Karte Bayerns von C. W. v. Gümbel nebst 1 Heft Erläuterungen. Cassel 1897. gr. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern in München:

Die Massnahmen auf dem Gebiete der landwirthschaftlichen Verwaltung in Bayern 1890—97. 1897. 4⁰.

Universität in München:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Winter-Semester 1897/98. 1897. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1897/98. 1897. 4⁰.

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Vol. VI, 1896. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1897, No. 7—12. 8⁰.
58. u. 59. Jahresbericht für 1895 u. 1896. 1897. 8⁰.
Oberbayerisches Archiv. Bd. 50. 1897. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1897, No. 83—87. August—December. 4⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. 5ᵉ Série, tome 13. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Sér. II, tome 14, fasc. 30. 1896. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Serie 3. Vol. 3, fasc. 6—11. 1897. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:
Mittheilungen. Band 12, Heft 4. Berlin 1897. 8⁰.

Gesellschaft Philomathie in Neisse:
26.—28. Bericht 1890—96. 1892—97. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:
Neuburger Kollektaneen-Blatt. 60. Jahrg. 1896. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 46, part 4. 5. Vol. 47, part 1. 1897. 8⁰.
Annual Report for the year 1896—97. 1897. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. IV. Series. Vol. 4, No. 19—24. 1897. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:
Report for the year 1896—97. 1897. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. XVIII, 2. 1897. 8⁰.

New-York Academy of Sciences in New-York:
Transactions. Vol. XV. 1895—96. 1896. 8⁰.
Annals. Vol. IX, No. 4—12. 1897. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Annual Report for the year 1896. 1897. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 29, No. 2. 3. 1897. 8⁰.

American Jewish Historical Society in New-York:
Publications. No. 5. 1897. 8⁰.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:
Nederlandsch kruidkundig Archief. III. Serie. Deel I, stuk 2. 1897. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Abhandlungen. Band X, Heft 5. 1897. 8⁰.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:
Anzeiger. 1896. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrg. 1896. 8⁰.

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:
Sapiski. Vol. XX, 2; XXI, 1. 1896—97. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
J. F. Whiteaves, Palaeozoic Fossils. Vol. III, part 3. 1897. 8⁰.
Annual Report. New Series. Vol. VIII, with Maps. 1897. 8⁰.

Reale Accademia di scienze, lettere e belle arti in Palermo:
Per il IV. Centenario della scoverta di America sollenne adunanza. 1893. 4⁰.
Statuto dell' Accademia. 1888. 8⁰.
Atti. Nuova Serie. Vol. 1. 2. 5. 6. 8—10. IIIª Serie. Vol. 1—4. 1845—97. 4⁰.
Bulletino. 14 Hefte. 1884—93. 4⁰.

Digitized by Google

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo XI, fasc. 4—6. 1897. 4⁰.

Società di scienze naturali ed economiche in Palermo:

Giornale. Vol. 21. 1896. 1897. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1897, No. 25—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tome 124, No. 26; Tome 125, No. 1—26. 1897. 4⁰.
Oeuvres complètes de Laplace. Tome VIII—X. 1891—94. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:

Catalogue des monnaies musulmanes. Égypte et Syrie. Paris 1896. 8⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Comptes rendus des séances en 1895. 1896. 4⁰.
Procès-verbaux des séances de 1895. 1896. 8⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 667—670 (Juillet-Octobre 1897), 672 (Decembre 1897), 673 (Janvier 1898). 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 3. 1896. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 33, No. 1. 2. 1896. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1896, No. 6. 1896. 8⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tome 6, fasc. 5; Tome 7, fasc. 2—4. 1895—96. 8⁰.

Société des Études historiques in Paris:

Revue. Année 63 (1897), No. 3. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1897, No. 13—17. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome 18, trim. 1. 2. 1897. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 25, No. 4—7. 1897. 8⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Mémoires. Tome VIII, partie 1—4. 1895. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Byzantina Chronika. Tom. III, Heft 3. 4. 1896. gr. 8⁰. Tom. IV, Heft 1. 2. 1897. gr. 8⁰.
Mémoires. VIIᵉ Série. Tome 42, No. 14. 1897. 4⁰.
Mémoires. VIIIᵉ Série. a) Classe hist.-philol. Vol. I, No. 3—6. b) Classe phys.-mathém. Vol. I, No. 1—8; Vol. V, No. 2—5. 1894—97. 4⁰.
Bulletin. Tome V, No. 3—5; Tome VI, No. 4—5; Tome VII, No. 1. 1896—97. 4⁰.
Annuaire du Musée zoologique 1897, No. 3. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XV, No. 6—9; Vol. XVI, No. 1. 2. 1897. 8⁰.
Mémoires. Vol. XIV, 5. 1896. 4⁰.
Carte géologique de la Russie d'Europe. Feuille 114. Astrakhan.

Digitized by Google

Kaiserlich russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Tom. VIII, Heft 1—4. 1896. 4⁰.

B. Dorn, Atlas zu Bemerkungen auf Anlass einer wissenschaftlichen Reise in dem Kaukasus 1860—1861. 1895. fol.

Medaillen zu Ehren von russischen Staatsmännern und Privatpersonen, herausgegeben von J. B. Iversen. Tom. 3. 1896. fol. (In russ. Sprache.)

Paul Savvaitov, Beschreibung von alten russischen Geräthen, Kleidern, Waffen etc. 1896. 4⁰. (In russ. Sprache.)

V. V. Latyschew, Sammlung griechischer christlicher Inschriften aus Südrussland. 1896. 4⁰. (In russ. Sprache.)

J. Veselovskij, Vortrag, gehalten in der Festsitzung vom 15. December 1896. 1896. 4⁰.

Staraja Ladoga (Alt-Ladoga), Zeichnungen und technische Beschreibung von V. V. Suspov. 1896. fol.

Materialy po archeologii rossii. No. 13—20. 1894—96. fol.

Ottschet 1891. 1892. 1893 u. 1894. 1894—95. fol.

Russische astronomische Gesellschaft in St. Petersburg:

Iswestija. 1896, No. 9; 1897, No. 1. 3. 4. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 34, Lfg. 2. 1896. 8⁰.

Materialien zur Geologie Russlands. Bd. XVIII. 1897. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 29, No. 5—8. 1897. 8⁰.

Musée zoologique de l'Académie Impériale in St. Petersburg:

Annuaire 1897. No. 2. 8⁰.

Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:

Travaux. Vol. 2, livr. 2. 1897. 8⁰.

Société des naturalistes in St. Petersburg:

Travaux. a) Section de Zoologie, Vol. 26. b) Section de Botanique, Vol. 26. 1896. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenije (Vorlesungsverzeichniss) 1897—98. 1897. 8⁰.

Sapiski (Arbeiten der historisch-philologischen Fakultät). Bd. 41—43. 1896/97. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Journal. II. Series. Vol. XI, part 1. 1897. 4⁰.

Proceedings. 1896, part III; 1897, part I. 8⁰.

Gratz College in Philadelphia:

Publications. Vol. I. 1897. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. XX, No. 4; Vol. XXI, No. 1 u. 2. 1897. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 33, No. 11. 12. 1897. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 35, No. 153; Vol. 36, No. 154. 155. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. X, pag. 201—242. 1897. 4⁰.
Atti. Memorie. Vol. XV. 1897. 4⁰.

Hydrographisches Amt der k. u. k. Kriegsmarine in Pola:

Veröffentlichungen, Gruppe III. Relative Schwerebestimmungen durch Pendelbeobachtungen. I. Heft. 1897. 4⁰.

Portland Society of natural History in Portland:

Proceedings. Vol. 2, part 4. 1897. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Die Neumessung der Grundlinien bei Strehlen, Berlin und Bonn. Berlin 1897. 4⁰.
Jahresbericht des Direktors für das Jahr 1896/97. 1897. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Třida I, Ročník 5; Třida II, Ročník 5; Třida III, Ročník 5, číslo 1. 1896. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 8. 9. 1896. 8⁰.
Věstník. Ročník V, číslo 1—9. 1896. 8⁰.
Bulletin international. III. Sciences mathématiques et Médecine. 1896. 8⁰.
Zikmund Winter, Život církevní etc. (Das kirchliche Leben in Böhmen.) Svazek 2. 1896. 8⁰.
Sbírka pramenův etc. (Sammlung der Quellen zur Kenntniss des literar. Lebens in Böhmen.) Skupina II, číslo 3. Prag 1897. 4⁰.
Archiv pro Lexikografii. Číslo I, 1. 2. 1896. 8⁰.
J. Hanůs, Život a spisy Václava Bolemíra Nebeského. 1896. 8⁰.
V. Láska, Vyšší geodesie. 1896. 8⁰.
Jaroslav Perner, Foraminifery. 1897. 4⁰.
Václav Vondrák, Frisinské památky. 1896. 4⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Band 26, No. 5; Bd. 27, No. 1. 2. 1897. 8⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Personalstand 1897/98. 1897. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1897/98. 1897. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 35. Jahrg., No. 1—4. 1896. 8⁰.

Zeitschrift „Krok" in Prag:

„Krok". Band 11, Heft 8—10. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in Regensburg:

Verhandlungen. Band 49. 1897. 8⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario para o Anno de 1897. 1896. 8⁰.

Geological Society of America in Rochester:

Bulletin. Vol. VIII. 1897. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Serie V. Classe di scienze morali. Vol. II, parte 1; Vol. III, parte 1, Memorie 1896. Vol. V, parte 2, Notizie degli scavi 1897 Aprile-Ottobre. 1896—97. 4⁰.
Atti. Serie V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. 6, semestre 1, fasc. 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1897. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V, Vol. 6, fasc. 5—10. 1897. 8⁰.
Rendiconti dell' adunanza solenne del 5 Giugno 1897. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Biblioteca Apostolica Vaticana in Rom:

Studi e Documenti di storia e diritto. Anno XV—XVII. 1894—96. 4⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 50, sessione 6. 7. 1897. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1897, No. 1. 2. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band XII, No. 2. 1897. 8⁰.

Ufficio centrale meteorologico italiano in Rom:

Annali. Vol. XIV, parte 2, 1892; Vol. XVI, parte 1, 1894. 1896. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XX, fasc. 1. 2. 1897. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Bataafsch Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerde in Rotterdam:

Nieuwe Verhandelingen. II. Reeks, Deel IV, Stuk 2. 1897. 4⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique 1894—95. 1896. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III, Vol. 3, fasc. 1—3. 1897. 8⁰.

The American Association for the avancement of science in Salem:

Proceedings for the 45th Meeting held at Buffalo. August 1896. 1897. 8⁰.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1896/97. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:

St. Gallische Gemeindearchive. Der Hof Bernang. Bearbeitet v. Joh. Göldi. 1897. 8⁰.

E. Götzinger, Das Leben des hl. Gallus. 1896. 8⁰.

Max Gmür, Uebersicht der Rechtsquellen des Kantons St. Gallen bis zum Jahre 1798. 1897. 8⁰.

Aug. Hardeger, St. Johann im Tartal. 1896. 4⁰.

Joh. Dierauer, Ernst Götzinger, ein Lebensbild. 1897. 4⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Seccion II. Año 1895. 1896. fol.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:

Occasional Papers. V. 1897. 8⁰.

Proceedings. II. Series, Vol. 6, 1896; III. Series, Zoologie, Vol. 1, No. 1—4, Botany, Vol. 1, No. 1, Geology, Vol. 1, No. 1. 2. 1897. 8⁰.

Observatorio astronómico y meteorológico in San Salvator:

Observaciones meteorológicas. Enero—Marzo. 1897. fol.

Bosnisch-Herzegovinisches Landesmuseum in Sarajevo:

Wissenschaftl. Mittheilungen. Band V. Wien 1897. 4⁰.

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Jahrbücher und Jahresberichte. 62. Jahrg. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Editing Committee of the University College of Sheffield:
Papers printed to commemorate the Incorporation of the University College of Sheffield. 1897. 8⁰.

Station centrale météorologique de Bulgarie in Sofia:
Bulletin mensuel. 1897. Avril—Mai. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:
Bullettino di Archeologia. Anno 20, No. 5—11. 1897. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:
Mittheilungen. XXI. 1897. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:
Meteorologiska Jakttagelser 1892. IIe Ser. Bd. 20. 1897. 4⁰.
Öfversigt. Årgång 53. 1896. 1897. 8⁰.
Handlingar. N. F. Bd. 28. 1895—96. 4⁰.
Bihang til Handlingar. Vol. 22. 1897. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelser. Bd. 5, Heft 4. 1896. 4⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:
Månadsblad. 22. Jahrg. 1893. 1896—97. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:
Förhandlingar. Band XIX, Heft 5. 6. 1897. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:
Monatsbericht. Bd. 31, Heft 3—7. 1897. 8⁰.

Kais. Universität in Strassburg:
Schriften aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Pharmazeutisches Institut der Universität Strassburg:
3 pharmakologische Abhandlungen. (Separatabdrücke.) 1897. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:
Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. VI. Jahrg. 1897. 8⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:
Abstract of Proceedings. 1897. May—October. 8⁰.
Journal and Proceedings. Vol. 30. 1897. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:
Annual Report for the year 1896. 1897. fol.
Records of the geological Survey. Vol. 5, part 3. 1897. 4⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:
Boletín. Tomo 2, No. 1. 2. Mexico 1897. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:
Sprichwörter der japanischen Sprache von P. Ehmann. Theil I u. II. 1897. 8⁰.
Mittheilungen. Heft 60 u. Suppl.-Heft zu Bd. VI (Nihongi, Theil III) 1897. 4⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):
The Journal of the College of Science. Vol. X, part 2. 1897. 4⁰.
The Imperial University Calendar. 1896—97. 8⁰.

Royal Society of Canada in Toronto:
Proceedings and Transactions. IId Series. Vol. II. 1896. 8⁰.

University of Canada in Toronto:
Studies. History. IId Series, Vol. I, p. 1—74. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Altertumsverein in Torgau:

Veröffentlichungen. XI. 1897. 8⁰.

Faculté des sciences in Toulouse:

Annales. Tome XI. Paris 1897. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XIII, fasc. 2. 1897. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Triest:

Carlo Marchesetti, Flora di Trieste. 1896—97. 8⁰.

Kaiser Franz Joseph-Museum für Kunst und Gewerbe in Troppau:

Jahresbericht 1896. 1897. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1896—97 in 4⁰ u. 8⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 32, disp. 13—15. 1897. 8⁰.
Memorie. Ser. II. Tom. 47. 1897. 4⁰.

Gesellschaft „Eranos" in Upsala:

Eranos. Acta philologica Luecana. Vol. I, fasc. 2—4; Vol. II, fasc. 1. 1896—97. 8⁰.

K. Universität in Upsala:

Festskrift med anledning af Konung Oscar IIs tjugo femårs Regeringsjubileum. 1897. 4⁰.
Schriften der Universität aus dem Jahre 1896/97 in 4⁰ u. 8⁰.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Bijdragen en Mededeelingen. Deel XVIII. 1897. 8⁰.
Verslag van de algemeene vergadering. 1897. 's Gravenhage 1897. 8⁰.
Werken. IIIᵈ Serie, No. 7. Bontemantel, Regeering van Amsterdam. Deel I. 's Gravenhage. 1897. 8⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1895. 1897. 4⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. IV. Reeks, Band 5, afdel. 1. 1897. 8⁰.

Société Provinciale des Arts et Sciences in Utrecht:

Verslag der algemeene vergadering 1896. 8⁰.
Aanteekeningen van de sectie-vergaderingen 1896. 1897. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Serie 1895. 1896. 1897, fasc. 1. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 53, disp. 4—10 e Appendice; Tomo 54, disp. 1—10; Tomo 55, disp. 1. 2. 1894—97. 8⁰.
Memorie. Vol. 25, No. 4—8. 1895—96. 4⁰.
Programmi dei concorsi scientifici per gli anni 1897—1900. 1897. 8⁰.

American Historical Association in Washington:

Annual Report for the year 1895. 1896. 8⁰.

Volta Bureau in Washington:

The Science of Speech by A. Melville Bell. 1897. 8⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

14th and 15th annual Report for 1892—93 and 1893—94. 1896/97. 4⁰.

Digitized by Google

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for the year 1895—96. Vol. I. 1897. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Yearbook 1896. 1897. 8⁰.
North American Fauna. No. 13. 1897. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report 1895. Parts 1 and 2. 1896. 4⁰.
Bulletin. No. 36. Table of Depths for Channels and Harbors. 1897. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Report of the U. S. National Museum for the year ending June 30, 1893 and June 30, 1894. 1895/96. 4⁰.
Annual Report for the year 1894—95. 1896. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1035. 1038. 1039. 1071—1073. 1075. 1077. 1896—97. 8⁰.
Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1034. 1896. 4⁰.

U. S. Naval Observatory in Washington:

Report for the year 1893—94 and 1896—97. 1895/97. 8⁰.

K. Akademie für Landwirthschaft und Brauerei in Weihenstephan:

Bericht über das Studienjahr 1896/97. Freising 1897. 8⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 30. 1897. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Band 134. 135. 1896—97. 8⁰. Mathem.-naturwissensch. Classe. Bd. 105 je Heft 1—10. 1896. 8⁰.
Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Band 44. Mathem.-naturwissensch. Classe. Band 63. 1896. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 83, II. Hälfte. 1897. 8⁰.
Fontes rerum Austriacarum. II. Abth., Bd. 49, 1. Hälfte. 1896. 8⁰.
Geschichte der Gründung und der Wirksamkeit der kais. Akademie der Wissenschaften etc. 1897. 8⁰.
Tabulae codicum. Vol. IX. 1897. 8⁰.
Sitzungsberichte (Anzeiger) der mathematisch-naturwissenschaftl. Classe 1897. No. 1—17. 8⁰.

Prähistorische Kommission der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien:

Mittheilungen. Bd. I, No. 4. 1897. 4⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1896, Band 46, Heft 3. 4; 1897, Band 47, Heft 1. 1897. 4⁰.
Verhandlungen. 1897, No. 9—13. 1897. 4⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Jahrg. 1894—96. 1896/97. 4⁰.

K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:

Verhandlungen. Protokoll über die Sitzung vom 21. April 1897. 1897. 8⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1897, No. 26—52. 1897. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXVII, 2—5. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 47, Heft 5—9. 1897. 8⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band XII, 1. 1897. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Oeffentliche Vorlesungen im Sommersemester 1897 u. im Winter-Semester 1897/98. 1897. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1897/98. 1897. 8⁰.
Inaugurationsbericht für 1897/98. 1897. 8⁰.
Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge 1896/97. 1897. 8⁰.

K. K. Universitäts-Sternwarte in Wien:

Annalen. Bd. X. XII. 1896. 4⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 37. Band, Jahrg. 1896/97. 1897. 8⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. Bd. 29, Heft 1. 1897. 4⁰.
Mittheilungen. 1897, No. 12. 4⁰.

Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 50. 1897. 8⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Band 26, No. 6—11. 1897. 8⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Band 31. No. 1—7. 1897. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1897, No. 1. 2. 1897. 8⁰.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:

Das Schweizerische Dreiecknetz. Bd. VII. 1897. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Astronomische Mittheilungen. No. 88, herausgegeben von A. Wolfer. 1897. 8⁰.
Vierteljahrsschrift. 42. Jahrg., 1897, Heft 2. 8⁰.

Eidgenössisches Polytechnikum in Zürich:

Katalog der Bibliothek. 6. Aufl. 1896. 8⁰.

Digitized by Google

Von folgenden Privatpersonen:

Anton Antus in Berlin:

Des Feldmarschalls Graf Daun geweihter Degen? 1897. 8⁰.

Robert S. Ball in Cambridge:

Further Development of the relations between impulsive Screws and instantaneous Screws. Dublin 1897. 4⁰.

N. P. Bénaky in Smyrne:

Du sens chromatique dans l'antiquité, 2 Exemplaires. Paris 1897. 8⁰.

W. Borchers in Aachen:

Jahrbuch der Elektrochemie, Jahrg. II u. III. Halle 1896—97. 8⁰.
Zeitschrift für Elektrochemie. Jahrg. II u. III. Halle 1896—97. 8⁰.

A. de Ceulencer in Gent:

La Crète, conférence. Anvers 1897. 8⁰.

Margaritos G. Dimitsas in Athen:

Ἡ Μακεδονία. 2 Bände. 1896. gr. 8⁰.

Jesus Ceballos Dosamantes in México:

Théorie sur les rayons invisibles (cathodiques et x). 1897. 8⁰.

V. Fausböll in Kopenhagen:

Fire forstudier til en fremstilling af den Indiske Mythologi efter Mahābhārata. 1897. 4⁰.

H. Fritsche in St. Petersburg:

Ueber die Bestimmung der Coefficienten der Gaussischen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus f. d. J. 1885. 1897. 8⁰.
Observations magnétiques sur 509 lieux. 1897. 8⁰.

Anton Ganser in Graz:

Das Weltprincip und die transcendentale Logik. Leipzig 1897. 8⁰.

Albert Gaudry in Paris:

La dentition des ancêtres des Tapirs (Extrait). 1897. 8⁰.
Le Congrès géologique international de St. Pétersbourg (Extrait). 1897. 4⁰.

Ernst Haeckel in Jena:

Natürliche Schöpfungsgeschichte. 9. Aufl. Berlin 1898. 2 Bde. 8⁰.

C. J. T. Hanssen in Kopenhagen:

Reform chemischer und physikalischer Berechnungen. 1897. 4⁰.

Imhoof-Blumer in Winterthur:

Lydische Stadtmünzen. Genf 1897. 8⁰.

Graf Károly von Nagy-Károly:

Codex diplomaticus comitum Karolyi. Tom. 5. Budapest 1897. 8⁰.

Vito La Mantia in Palermo:

I privilegi di Messina (1229—1816). 1897. 8⁰.

Henry Charles Lea in Philadelphia:

Spanish Experiments in Coinage. New-York 1897. 8⁰.

E. Lemoine in Paris:

3 mathematische Abhandlungen. (Separatabdrücke.) 1897. 8⁰.

Digitized by Google

J. J. Lengsfield in Vicksburg, Miss.:

Origin of the Planets. 1897. 8⁰.

Carl August Lilje in Helsingfors:

Die Gesetze der Rotationselemente der Himmelskörper. Stockholm 1897. 8⁰.

Christian Meyer in München:

Quellen zur alten Geschichte des Fürstenthums Bayreuth. Bd. II. 1896. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 64, No. 2; Tom. 65, 1. 2. Paris 1897. 8⁰.

Annoncenexpedition von Rudolf Mosse in München:

Zeitungskatalog. 31. Aufl. 1898. fol.

Camillo Graf Razumovsky in Troppau:

Bibliographisches Verzeichniss der wissenschaftlichen Werke und Abhandlungen des Grafen Gregor Razoumowsky. Halle 1897. 8⁰.

Oswald J. Reichel in Lympstone, Exeter:

The „Domesday" Hundreds. II. The Devonshire „Domesday". III. 1896. 8⁰.

Dietrich Reiner's Verlagsbuchhandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. III, 2 Hefte 1897. 4⁰.

Franz Sales Romstöck in Eichstätt:

Die Jesuitennullen Prantl's an der Universität Ingolstadt. 1898. 8⁰.

Carlos P. Salas in La Plata (Argentinien):

L'agriculture, l'élevage, l'industrie et le commerce en 1895. 1897. 4⁰.

Giovanni Schiaparelli in Mailand:

Rubra Canicula. Nuove considerazione circa la mutazioni di colore in Sirio. Rovereto 1897. 8⁰.

Osservazioni astronomiche e fisiche sull' asse di rotazione del pianeta Marte. Roma 1897. 4⁰.

G. Scognamiglio in Neapel.

4 kleinere pharmakologische Abhandlungen. 1897. 8⁰.

Wilhelm Stern in Berlin:

Kritische Grundlegung der Ethik als positiver Wissenschaft. 1897. 8⁰.

Pierre Vaucher in Genf:

Esquisses d'histoire Suisse. Lausanne 1898. 8⁰.

W. Waldeyer in Berlin:

Das Trigonum vesicae. 1897. 4⁰.

E. W. West in Maidenhead, England:

Pahlavi Texts. Part V. Oxford 1897. 8⁰.

Johannes Zvetaieff in Moskau:

Inscriptiones Italiae Inferioris dialecticae. 1896. 4⁰.

Digitized by Google

Namen-Register.

Bauer Gustav 359.
Beyrich Heinrich Ernst (Nekrolog) 442.
Bruns Ernst Heinrich (Wahl) 477.

Daubrée Gabriel August (Nekrolog) 447).
Du Bois-Reymond (Nekrolog) 423.
Dyck Walter 335.

Fick Adolf (Wahl) 478.
Föppl A. 93.

v. **G**erlach Joseph (Nekrolog) 433.
Graetz L. 223.
Groth Paul 476.
Gyldén Hugo (Nekrolog) 409.

Harley Georg (Nekrolog) 421.
Hartig Robert 1.
Hertwig Oskar (Wahl) 477.

Kantor S. 367.
v. Kekulé August (Nekrolog) 414.
Kenngott Gustav Adolf (Nekrolog) 440.
Königs W. 335.
Korn Arthur 184, 197.

Linde Karl 485.
Lindemann Ferdinand 153, 476.
v. Lommel Eugen 336.

v. **M**erz Sigmund 484.
v. Müller Ferdinand (Nekrolog) 436.

v. **O**rff Karl 155, 476.

v. **P**ettenkofer Max 383, 477.
Pringsheim Alfred 101, 303, 343.

Ranke Johannes 1.
Rohlfs Gerhard (Nekrolog) 450.
Rüdinger Nikolaus (Nekrolog) 390.

Schulze Franz Eilhard (Wahl) 478.
v. **S**eidel Philipp Ludwig (Nekrolog) 390.
Selenka Emil 484.
Sohncke Leonhard 337.

v. **V**oit Karl 390.
Voss Aurel 229.

Weinschenk Ernst 476.
Weierstrass Karl (Nekrolog) 402.
Werner Franz 203.

v. **Z**ittel Karl Alfred 476.

Sach-Register.

Abel'sche Sätze über Stetigkeit von Reihensummen 343.
Aequivalenz von linearen ∞^{λ}-Schaaren bilinearer Formen 367.

Biegungsdeformationen einer Fläche, infinitesimale 229.
Blitz, Gewebsveränderungen im Innern der Bäume durch denselben 1.

Convergenzgrenze, Du Bois-Reymond'sche 303.
China-Alkaloide, Oxydationsprodukte derselben 335.

Dämmerungsfarben, Theorie derselben 336.
Dodekaeder, antike 475.
Doppelreihen, zur Theorie derselben 101.
Druckschriften, eingelaufene 455, 491.

Eröffnungsrede zur öffentlichen Sitzung 383, 477.

Graphitlagerstätten, zur Kenntniss derselben 476.
Gravitation, ein Modell zur hydrodynamischen Theorie derselben 197.
Gravitationsgesetz nach Newton, mögliche Erweiterung derselben 93.

Molekular-Funktionen 181.

Nekrologe 390, 402, 409, 414, 421, 423, 433, 436, 440, 442, 447, 450.

Pendelbestimmungen in Bayern, Beziehung zwischen Schweremessungen und geologischen Untersuchungen 155.

Rechenmaschine von Steiger und Egli 335.
Reptilien und Frösche der zoologischen Sammlung in München, einige neue oder seltene 203.

Digitized by Google

Schädel und Gebeine, frühmittelalterliche aus Lindau 1.
Schweremessungen, der k. b. Commission für die internationale Erdmessung 475.

Tetraëder, zwei, einander zugleich eingeschrieben und umschrieben 359.

Wahlen 477.
Wechselströme, Verwandlung derselben in Gleichströme durch ein elektrisches Verfahren 223.
Wärme specifische, Aenderung derselben mit der Temperatur 337.

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVIII. Jahrgang 1898.

München.
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Digitized by Google

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

Digitized by Google

Uebersicht

des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXVIII Jahrgang 1898.

Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.

Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 139. Stiftungstages am 15. März 1898.

Seite

v. Pettenkofer: Ansprache 423
v. Voit: Nekrologe 430

Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 12. November 1898.

v. Pettenkofer: Eröffnungsrede 531
Wahlen 536

Sitzung vom 15. Januar 1898.

W. v. Gümbel: Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben 3
*R. Hartig: Ueber den Einfluss der Ausästung und der Wurzelverminderung auf die Grösse, Form und anatomische Zusammensetzung des Holzzuwachses der Bäume . . . 1
J. H. Franke: Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen 19
F. Lindemann: Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale 37
E. v. Fedorow: Die Resultate der Feldspathstudien . . . 55
A. Pringsheim: Zur Theorie des Doppel-Integrals . . . 59
S. v. Merz: Das Fraunhofer-Objectiv 75
J. Stark: Ueber Ausbreitung von Flüssigkeiten und damit zusammenhängende Erscheinungen 91

Digitized by Google

Sitzung vom 5. Februar 1898.

Seite

*E. Selenka: Ueber die Architektur des Orangutan-Schädels . 111

E. v. Lommel: Ueber aus Kalkspath und Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen 111

P. Glan: Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektrizität 117

Sitzung vom 5. März 1898.

*R. Hertwig: Ueber Befruchtung und Kerntheilung bei Actinosphaerium Eichhorni 127

A. Korn: a) Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie 129

b) Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer inkompressiblen Flüssigkeit 135

H. Seeliger: Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen 147

F. Lindemann: Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt 181

W. Dyck: Beiträge zur Potentialtheorie 203

Sitzung vom 4. Mai 1898.

*C. v. Kupffer: Ueber die Sternzellen der Leber 225

Sitzung vom 11. Juni 1898.

J. Ranke: Ueber den Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten 227

*E. Selenka: Ueber die erste Embryonalanlage der Menschenaffen 226

K. Schwarzschild: Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus 271

*H. Seeliger: Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne 226

A. Pringsheim: a) Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche 295

b) Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π 325

Digitized by Google

Sitzung vom 2. Juli 1898.

Seite

*H. Seeliger: Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne 363

L. Fomm: Ueber eine neue Erscheinung bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen 365

E. v. Weber: Ueber Schaaren von Bilinearformen . . . 369

L. v. Seidel: Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objekts von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat. Aus dessen Nachlasse herausgegeben von S. Finsterwalder 395

Sitzung vom 5. November 1898.

*H. Solereder: Systematische Anatomie der Dikotyledonen . 495

*H. Seeliger: III. Band der neuen Annalen der Sternwarte zu München 495

*A. Bergeat: Ueber die äolischen Inseln 495

H. Ebert: Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen 497

Sitzung vom 3. Dezember 1898.

*W. Königs: Gedenkfeier des 50. Todestages von Berzelius . . 538

*W. Dyck: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften . 538

F. Doflein: Bericht über meine Reise nach Westindien und Nordamerika 539

Einsendungen von Druckschriften 339, 575

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 15. Januar 1898.

1. Herr W. v. Gümbel legt durch den Classensecretär eine Abhandlung: „Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben" vor.

2. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber den Einfluss der Ausästung und der Wurzelverminderung auf die Grösse, Form und anatomische Zusammensetzung des Holzzuwachses der Bäume." Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

3. Herr Karl v. Orff überreicht einen Aufsatz des Herrn Steuerrathes Dr. J. H. Franke: „Ueber Coordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecken."

4. Herr Ferdinand Lindemann macht eine Mittheilung: „Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale."

5. Herr Paul Groth legt eine Arbeit des correspondirenden Mitgliedes Professor Eugraph v. Fedorow in Moskau: „Die Resultate der Feldspathstudien" vor.

Digitized by Google

6. Herr Alfred Pringsheim spricht: „Zur Theorie des Doppel-Integrals."

7. Herr Hugo Seeliger berichtet über eine der Akademie eingesandte Abhandlung des Herrn Direktors Sigmund v. Merz: „Das Fraunhofer-Objektiv."

8. Herr Eugen v. Lommel legt eine Arbeit seines Schülers Dr. J. Stark: „Ueber Ausbreitung von Flüssigkeiten" vor.

Digitized by Google

Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben.

Von **C. W. v. Gümbel.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Die in der zweiten Hälfte des Monats October und während des ganzen Novembers 1897 am Südrande des Erzgebirges, im Vogtlande und im Fichtelgebirge wahrgenommenen Erdbeben geben mir zunächst Veranlassung, das von mir in den Sitzungsberichten unserer Akademie (Sitzungsber. d. math.-phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1889. Bd. XIX. Heft 1) gegebene Verzeichniss der überhaupt in Bayern verspürten Erderschütterungen weiter fortzuführen, zu vervollständigen und frühere Angaben theilweise richtig zu stellen.

I. Nachträge und Berichtigungen des oben erwähnten Verzeichnisses.

Es ist nicht zweifelhaft, dass aus der älteren Zeit nur über die bedeutendsten Erderschütterungen Nachrichten erhalten geblieben oder in alten Chroniken versteckt sind. Es ist Folgendes nachzutragen:

1117.

Ueber das angeblich vom Jahre 1116 am 3. Januar verzeichnete Erdbeben finden sich sichere Nachrichten in Ludwigs Scriptores rerum bambergensium (I. 100, 454). Darnach hat dasselbe am 3. Januar 1117 stattgefunden und grosse Zerstörungen verursacht. Die Domkirche in Bamberg z. B. wurde so stark beschädigt, dass sie neu aufgebaut werden musste.[1]) Wohl

[1]) Riehl, Beil. z. Allgem. Zeit. vom 6. Aug. 1886).

Digitized by Google

auf dasselbe Ereigniss bezieht sich auch die Nachricht, dass in Berchtesgaden ganze Felsen von den Bergen herabgestürzt seien.

1348.

Von dem Erdbeben des Jahres 1348 wird von Weihenstephan und Passau (Bayerland 1891 S. 37) gemeldet, dass die Häuser und Kirchen schwankten, und die Glocken anschlugen. Die Leute sollen von heftigem Kopfweh und Taumel befallen worden sein, so dass sie hin und her wankten.

1690.

Die schrecklich zerstörende Erderschütterung vom 4. Dezember 1690, welche besonders in Wien grossartige Verheerungen anrichtete, erstreckte sich auch nach Villach, wo fast alle Kirchen umgestürzt und 60 Personen getödtet wurden. Dieses Erdbeben dehnte sich bis Nürnberg, Regensburg, Augsburg und München aus, wo die Glocken anschlugen.

1822.

Aus dem Jahre 1822 wird berichtet, dass am 18. März. Abends von 9 bis 12 Uhr in Greding eine Erderschütterung verspürt wurde.

1865.

In den Angaben über das Erdbeben von Kundel im Innthal soll es statt Februar Januar heissen.

1868.

Am 22. Dezember dieses Jahres wurde eine Erderschütterung in Innsbruck beobachtet, die wohl auch bis in das Unterinnthal sich erstreckt hat.

1870.

Das Erdbeben vom 19. April 1870, welches im Unterinnthal wahrgenommen wurde, begann um 12 $^1/_2$ Uhr Nachts und wiederholte sich am 20. und 30. April (11 Uhr Nachts) sowie am 1. Mai dieses Jahres.

1886.

Aus diesem Jahre wird ein Erdbeben am 6. Juni, Abends 9 $^3/_4$ Uhr, in Lahr angezeigt, und am 9. Oktober, Abends h. 6 $^1/_4$

Digitized by Google

wurde eine ähnliche Erderschütterung zwischen Strassburg und Kappel wahrgenommen.

1888.

Das Erdbeben vom 26. Dezember dieses Jahres, welches hauptsächlich im Vogtlande auftrat, erstreckte sich in SW-Richtung bis in die Gegend von Hof, wie es auch im Dorfe Feilitzsch (NO. von Hof) wahrgenommen wurde. (Vgl. Credner in Bericht. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Classe v. 11. Febr. 1889.)

1889.

Am 7. Januar dieses Jahres verspürte man in Württemberg eine Erderschütterung, welche auch in Ulm wahrgenommen wurde.

Das am 9. Februar erfolgte Neuburger Erdbeben machte sich auch in Möckenlohe, 10 km NNW. von Neuburg, 5 Minuten später als in der Stadt und nach der Angabe des Herrn Pfarrers Bayer in Ochsenfeld, 12 km N. von Neuburg, durch Fensterklirren bemerkbar.

1890.

In der Nacht vom 23. auf 24. Januar soll ein Erdbeben in Schierling in Niederbayern durch Erschütterung der Gebäude angedeutet worden sein. Bestimmteres und Näheres war hierüber nicht zu ermitteln.

Am 26. März desselben Jahres ereignete sich in einem grossen Theil von Tirol um 9 Uhr 15 Minuten Abends ein deutlich fühlbarer, 4—5 Secunden andauernder Erdstoss in der Richtung von SO. nach NW. Nach 5 Minuten folgte ein zweiter, jedoch schwächerer Stoss. (Münchener Stadtzeitung vom 19. April 1890; zahlreiche Tiroler Zeitungen.) Nach Herrn Oberst a. D. Forster wurde dieselbe Erschütterung auch in Partenkirchen um 9 Uhr 15 Minuten wahrgenommen.

Herr Rektor Schremmel in Kissingen glaubt am 30. September um 1 Uhr 21 Minuten Mittags eine zitternde Erdbewegung in der Richtung von SO. nach NW. mit einer Dauer von 1 ½ Minuten beobachtet zu haben.

Herr Apotheker Hintermaier in Wegscheid bei Passau

Digitized by Google

berichtet, dass am 24. November d. Js. bei einem orkanartigen SW.-Sturm um h. 1^{0}, 1^{6}, 1^{7}, 1^{8} und 1^{10} p. erdbebenartige Stösse und um 1^{45} p. ein heftiger, etliche Sekunden anhaltender Erdstoss stattgefunden habe. Diese Angaben, sowie die nächstfolgenden Berichte verdanke ich der sehr gefälligen Mittheilung des Herrn Direktor der hiesigen meteorologischen Centralstation Dr. Erk (M. C. S.), für die ich hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

1891.

Aus diesem Jahre liegt eine Mittheilung des Herrn Apothekers Mielbach in Obernzell bei Passau vor, worin berichtet wird, dass am 23. Juli um h. 1^{10} A. ein Erdbeben in der Richtung von NO. nach SW. wahrgenommen wurde. Dabei liess sich ein donnerähnliches Rollen unter der Erde hören und in einigen kleineren (?) Häusern gewaltige Erschütterungen wahrnehmen (M. C. S.).

1893.

Nach der Angabe des Herrn Grenzoberaufsehers Grünthaler in Breitenberg an der Landesgrenze bei Passau soll daselbst am 17. März um h. 9^{45} und 10^{25} A. die Wirkung von Erdstössen bemerkt worden sein (M. C. S.).

1894.

Herr P. Franz Seraph Adelhard in Volkersburg machte die Mittheilung, dass am 11. Juli h. 1^{34} p. zwei rasch aufeinander folgende Erdstösse in senkrechter Richtung gespürt worden seien, die auch von anderen Hausbewohnern wahrgenommen wurden (M. C. S.).

1895.

Von Partenkirchen ging von dem Herrn Lehrer E. Peter der Bericht ein, dass er, als er am 1. Januar h. 3^{13} p. lesend in seinem Zimmer sass, durch eine eigenthümliche Bewegung des Bodens erschreckt wurde. Sämmtliche Gegenstände im Zimmer schienen ihm eine Bewegung gegen W. und eine kleine Senkung zu machen, wobei ein leises Knirschen an der Zimmerdecke hörbar wurde und ein feiner Kalkstaub in geringer Menge zu

Digitized by Google

Boden fiel. Ein an die Wand gelehnter Stock fiel um. Etwa eine Sekunde nach dieser Erschütterung machte sich ein dumpfes dem Geräusch eines schnell vorüberfahrenden beladenen Wagens vergleichbares Rollen hörbar. Das Ereigniss mag 2 ½ Sekunden angedauert haben.

Herr A. Kiendl, der Vorstand der Distriktsschnitzerschule gab an, dass diese Bewegung des Hauses mit der Erschütterung bei einem heftigen Sturme sich hätte vergleichen lassen. Zugleich hörte auch er ein Klirren der im Zimmer aufgestellten Nippsachen. Ueber das gleiche Ereigniss berichtete Herr Dr. Erdt telegraphisch, dass an gleichem Tage um h. 3^{15} p. in vier verschiedenen Wohnungen eine leichte Erderschütterung beobachtet worden sei.

1896.

Von Reichenhall wird gemeldet, dass am 15. September Früh 7 Uhr einige, 3—4 Sekunden andauernde, senkrecht gerichtete Erdstösse von solcher Stärke gespürt wurden, dass die Schläfer aufgeweckt wurden.

II. Erdbeben im Jahre 1897.

Im Jahre 1897 ereigneten sich in zwei Landstrichen Bayerns Erdbeben; im Anfang des Jahres im Bayerischen Walde und gegen Ende des Jahres im Fichtelgebirgsgebiete.

Ueber das erstgenannte Erdbeben am 5. Januar liegen sehr zahlreiche Einzelberichte vor, welche mir der Herr Vorstand der b. meteorologischen Centralstation in München Dr. Erk mitzutheilen die Güte hatte. Es sind folgende:

Von Herrn Fabrikbesitzer Menzel in Elsenthal bei Grafenau (Bayer. Wald) wird berichtet, dass am Morgen des 5. Januars etwa um h. 7 ½ ein Brausen ähnlich dem Geräusche einer Dreschmaschine gehört wurde, welchem am Ende ein kräftiger Erdstoss folgte. Bei letzterem klirrten die Fenster und zitterten die Lampen. In der Fabrik hielt man die Erschütterung zuerst für die Folge einer Explosion eines Kochgefässes. Die Witterung war trübe; doch hellte sich sofort nach dem Ereigniss der Himmel auf.

Digitized by Google

Von Finsterau kam die telegraphische Meldung vom Herrn Förster Lautenschlager, dass an gleichem Tage Morgens 8 Uhr ein Erdbeben stattgefunden habe.

Aus Grafenau wird von Herrn Dr. Späth, k. Bezirksarzt, gemeldet, dass an gleichem Tage Morgens 7 Uhr 50 Minuten ein 10 Sekunden andauernder, von N. nach S. gerichteter Erdstoss verspürt wurde, wobei Fensterklirren, Bodenschwankungen und starkes Rollengeräusch sich wahrnehmen liess. Der Barometer zeigte nachher steigende Tendenz. Schon in der vorausgehenden Nacht machte sich vorübergehend ein leises, donnerähnliches Geräusch bemerkbar.

In Wolfstein (bei Freyung i. W.) trat nach einer Mittheilung des Herrn Forstmeisters Seidenschwanz an gleichem Tage Morgens 7 Uhr 58 Minuten eine erdbebenartige, 5—6 Sekunden andauernde Erschütterung nach einem vorausgegangenen 2—3 Sekunden langen Sausen ein.

In Grammertshof bei Untergriesbach ereignete sich an diesem Tage Morgens 7 Uhr 45 Minuten ein von SO. nach NW. gerichtetes Erdbeben, das mit donnerähnlichem $^1/_2$ Minute andauerndem Geräusch verbunden war (Richtsfeld).

In Untergrainet und Umgegend wurde von dem Herrn Lehrer Bothschafter am genannten Tage Früh h. 7^{45} eine 5 Sekunden andauernde Erderschütterung mit heftigem unterirdischen Donnern beobachtet. Thüren sprangen auf, einzelne schadhafte Kamine stürzten z. Th. ein, Fenster klirrten, gezimmerte Häuser krachten in ihren Fugen, einzelne Brunnen versiechten auf kurze Zeit und lieferten hernach trübes Wasser. Dabei herrschte ein helles, windstilles Wetter. Bemerkenswerth war, dass oft in ein und derselben Ortschaft das Erdbeben theils sehr stark, theils sehr schwach verspürt wurde.

Aus Schönbrunn wird von Herrn Förster Hermann gemeldet, dass daselbst und in der Umgegend unter donnerähnlichem Getöse ein 4 Sekunden andauernder starker Erdstoss in der Richtung von NW. nach SO. verspürt wurde.

In Spiegelau machte sich nach dem von Herrn Forstmeister Blum mitgetheilten Bericht am gleichen Tage Morgens

Digitized by Google

7 3/4 Uhr ein auch in der Umgegend wahrgenommener ziemlich heftiger Erdstoss in Begleitung eines unterirdischen Rollens von 5—8 Sekunden Dauer in solcher Heftigkeit bemerkbar, dass die Erschütterung auch in aus Steinen massiv gebauten Gebäuden wahrgenommen wurde. Im Walde wollen Holzhauer mehrere aufeinander folgende Stösse in NW.-Richtung gespürt haben.

Aus Klingenbrunn (830 m Höhenlage) berichtet der Herr Forstmeister Hundertpfund, dass am genannten Tage kurz vor 8 Uhr eine Erderschütterung wahrgenommen wurde. Bei einer um diese Zeit gelesenen Messe wurde plötzlich der Raum der kleinen Kapelle erschüttert, sodass die Fenster klirrten und die Andächtigen beängstigt wurden. Waldarbeitern fiel diese Erschütterung gleichfalls auf. Ihre Richtung konnte nicht genau festgestellt werden, doch scheint sie von SO. nach NW. verlaufen zu sein. Das Barometer war ein klein wenig gefallen, sonst aber das Wetter kalt bei fast völliger Windstille. Der erste Eindruck des Ereignisses war der, dass eine mächtige Schneemasse schwerfällig polternd und das Haus erschütternd sich vom Dache abgelöst hätte.

Aus Buchenau bei Zwiesel theilt Herr von Poschinger mit, dass der Erdstoss vom 5. Januar Morgens etwa um 7 Uhr 50 Minuten daselbst nur schwach verspürt wurde.

Nach diesen Einzelangaben scheint das an sich schwache Erdbeben vom 5. Januar 1897 auf einen relativ kleinen schmalen Strich des Bayerischen Waldes längs der Landesgrenze gegen Böhmen, südöstlich von Zwiesel — Buchenau ausgenommen — sich beschränkt zu haben. Weder von Zwiesel selbst, noch von Regen, Bodenmais oder Passau liegen Erdbebenmeldungen vor. Auch aus Böhmen sind mir nähere Angaben hierüber nicht bekannt geworden. Im Allgemeinen stimmten die Angaben der Zeit des Eintrittes der Erschütterung, welche zwischen 7 3/4 bis kurz vor 8 Uhr Morgens sich ereignete, überein. Bei dem ungleichen und ungenauen Gang der verschiedenen Uhren ist jedoch eine sehr genaue Zeitbestimmung ausgeschlossen. Dies gilt auch von der Dauer des Ereignisses. Nähere Bestimmungen

Digitized by Google

des Epi- und Hypocentrums, sowie über die Tiefe des Erschütterungsherdes lassen sich desshalb nicht machen. Bezüglich der Stossrichtung herrscht ziemliche Uebereinstimmung von SO. nach NW., was auch mit dem geotektonischen Aufbau des hauptsächlich aus Gneiss bestehenden Gebirgs übereinstimmt. Die Ursache des Erdbebens scheint auf einer ziemlich räumlich beschränkten Auslösung von Spannungen zu beruhen, welche in der Tiefe zwischen verschiedenen Gesteinen sich vorfanden. Das Erdbeben gehört demnach zu den sogen. geotektonischen.

Das erzgebirgisch-vogtländisch-fichtelgebirgische Erdbeben in den Monaten Oktober und November des Jahres 1897.

Ueber das durch seine lange Dauer ausgezeichnete Erdbeben gegen das Ende des Jahres 1897 liegen zahlreiche, meist Zeitungsberichte vor. Die z. Th. sehr starken Erschütterungen ereigneten sich in den Landstrichen am Südrande des Erzgebirges, im Vogtland und im Fichtelgebirge, welche schon vielfach von Erdbeben heimgesucht worden sind. Sie scheinen der Hauptsache nach den grossen Störungsrichtungen und Gebirgszerklüftungen zu folgen, welche einerseits das Erzgebirge begleiten, andererseits dem Zug des Thüringerwaldsystems entsprechen.

Der Hauptstoss des Erdbebens wurde nach der in der Beilage der Zeitung Bohemia vom 12. November gegebenen Nachricht zum erstenmal am 24. Oktober, namentlich in der Gegend von Graslitz, 30 km NO. von Eger, nahe der sächsischen Grenze am Südrande des Erzgebirges, Nachmittags kurz vor 5 Uhr nach einigen schwachen Stössen in den Morgenstunden beobachtet, wo Herr Dr. Bäuml den in den folgenden Tagen sich wiederholenden seismischen Erscheinungen sachgemässe Aufmerksamkeit widmete. Herr Prof. Dr. Beckl in Prag, Mitglied der österr. Erdbeben-Commission, berichtete hierüber in einer öffentlichen Versammlung in Prag, dass die Erdbeben in Graslitz nicht auf vulkanische Ursachen zurückzuführen seien, in der Nähe gebe es keine Vulkane. Sie gehörten vielmehr den sogen. tektonischen oder Gebirgsbeben an. Solche seien zwar nicht häufig in Böhmen bekannt, jedoch z. B. in den 80er Jahren in

Digitized by Google

der Gegend von Trautena sehr heftig, dann vor etwa einem Jahre in Katharinaberg und Brüx und im Januar 1897 in Luschmanda und Winterberg verspürt worden. Seit den 70er Jahren seien bei der Erdbeben-Commission in Böhmen über 20 Fälle der Erderschütterungen angemeldet worden; sie seien jedoch alle bisher gefahrlos verlaufen. Auch die Graslitzer Erdbeben hätten keine wahrnehmbaren Spuren der Zerstörung an festen Gegenständen zurückgelassen, seien jedoch von starkem unterirdischen Rollen begleitet gewesen. Von Hof im Fichtelgebirge schreibt man, dass die von Böhmen herüberziehenden Erschütterungen vom 25. und 29. Oktober Abends in Jäger und Göttengrün, nicht aber in Hirschberg und Gefell bemerkt worden seien. Dabei wurde ein Rollen, wie das Geräusch von einem auf der Landstrasse fahrenden Wagen gehört. Auch in diesem Bericht wird die Ursache des Ereignisses auf tektonische Verhältnisse zurückgeführt, welche sich auf Nachstürze im böhmischen Einbruchskessel und Schrumpfung der Erdrinde bezögen.

Aus der Saalegegend wird vom 28. Oktober berichtet, dass an verschiedenen Orten des Fichtelgebirgs die an der deutsch-böhmischen Grenze bekannt gewordenen Erdstösse auch hier mehr oder weniger verspürt worden seien, während von Plauen die Nachricht kommt, dass im ganzen sächsischen Vogtlande die Erschütterungen, deren Mittelpunkt bei Untersachsenberg liege, fortdauerten. In Asch wiederholten sich die schon am 25. und 26. Oktober aufgetretenen seismischen Erscheinungen in der Frühe am 30. Oktober unter Begleitung eines starken Dröhnens. In Graslitz erneuerten sich am 29. Oktober die Erdstösse mit detonationsartigem Getöse. Besonders acht Stösse waren heftig, sodass die Bevölkerung sehr beunruhigt wurde und einzelne Familien die Stadt verliessen.

Nähere Angaben aus Graslitz verdanken wir den Beobachtungen des Herrn Dr. Bäuml. Darnach wiederholten sich merkliche Stösse am 26. Oktober Abends um h. 6^{26}, 6^{55}, 7^{9}, 9^{11}. Es folgten dann am 27. Oktober Stösse um h. 5 Nachmittags, 8^{47}, 8^{49}, 10^{45} Abends, ferner am 28. Oktober Morgens h. 3^{50} und 10^{20} Abends, ferner am 29. Oktober h. 1^{40}, 1^{45} Nachts,

Digitized by Google

4^{20} Morgens und währten seit h. 6^{25} stärker werdend die ganze Nacht vom 29. auf den 30. Oktober. Ein heftiger Stoss erfolgte Abends h. 7^{45}, der auch in Bleistadt wahrgenommen wurde. Die Stösse beschränken sich auf den Südrand des Erzgebirges, wo sie in Eibenberg-Grünberg unfern Graslitz ihren Mittelpunkt zu haben scheinen. Weder in Neudeck im Erzgebirge, noch in Karlsberg merkte man von diesen Erscheinungen etwas; während sie auf 15—20 km im Umkreis von Graslitz z. Th. so heftig sich zeigten, dass die Häuser zitterten, die Thüren und Fenster sich bewegten und klirrten, Mörtel von den Wänden fiel, an den Wänden hängende Gegenstände wankten, z. Th. zu Boden stürzten. Meist waren die Stösse, deren man mehr als 14 in dieser Nacht zählte, 4—5 Sekunden dauernd, und von NO. nach SW. gerichtet von dumpfem donnerähnlichen Rollen begleitet.

Während man in dem benachbarten Klingenthal (Sachsen) die früheren Erschütterungen nicht verspürte, machten sie sich an den zuletzt genannten Tagen deutlich bemerkbar.

Von Liebenstein, einem Ort NW. von Eger zwischen dieser Stadt und Asch kam die Nachricht, dass daselbst schon am 25. und 26. Oktober mehrere Erschütterungen sich ereigneten, am 29. Oktober Abends h. 7^{45} aber ein besonders starkes Erzittern des Bodens mit einem nach und nach sich verlierenden Rollen und einem leichten Klirren der Fenster bemerkt wurde.

Auch Karlsbad blieb am 29. Oktober nicht verschont, wurde jedoch stärker von dem Erdbeben des 7. November (Morgens vor 5 Uhr) betroffen. Seine Wirkungen erstreckten sich bis gegen Engelhaus hin mit unterirdischem dumpfen Rollen und Bewegungen von NW. nach SO. und Trossau, war jedoch im Ganzen so schwach, dass an keiner der Mineralquellen irgend eine Einwirkung sich weder in der Ergiebigkeit noch in der Temperatur bemerkbar machte. Karlsbad scheint mithin schon an der äussersten Grenze des Erschütterungsgebiets zu liegen.

Diese Erschütterungen vom 7. November sind nun durch ihre Verbreitung und theilweise starke Wirkungen besonders bemerkenswerth. Von Graslitz schreibt man hierüber, dass nach der sehr unruhigen Nacht vom 29. auf den 30. Oktober eine

Digitized by Google

ziemliche Ruheperiode eingetreten sei, mit nur ganz einzelnen schwachen Aeusserungen am 30. und 31. Oktober; am 4. November jedoch aufs neue stärkere Stösse während des ganzen Tages bemerkt wurden und am 5. Nachts h. 1^{20} zwei starke Erschütterungen erfolgten, die auch im benachbarten Sachsen, in Klingenthal, Brambach (hier auch schon am 4.), Schönberg und anderen Orten gespürt wurden. Insbesondere war es die Nacht vom 6. auf den 7. November, in der neben zahlreichen schwächeren Erschütterungen um h. 8^{43} ein sehr starker Stoss erfolgte, wobei die Erde zitterte und bebte; dann stellten sich schwächere Erschütterungen ein, bis Morgens h. 5^{10} einer der stärksten Stösse, begleitet von langem donnerähnlichen Rollen, sich ereignete. Neben den gewöhnlichen Aeusserungen kam noch hinzu, dass an alten Bauten Sprünge und Risse sich zeigten. Auch Morgens h. 6^{16} wiederholte sich der Stoss in ziemlicher Stärke. Man will beobachtet haben, dass die Magnetnadel ziemlich starke Deklinationen zeigte.

An dem gleichen Tage (7. Nov.) wurde Früh Morgens gegen 5 Uhr in Neudeck ein 15 Sekunden anhaltender, von NW. nach SO. gerichteter wellenförmiger Erdstoss unter donnerähnlichem Rollen verspürt. Die Fenster klirrten, die Thüren bewegten sich und viele Gegenstände fielen zu Boden.

In Eger erbebte um h. 4^{55} an diesem Tage der Boden 7 Sekunden lang in Begleitung von unterirdischem donnerähnlichen Rollen in der Richtung von O. nach W. Die Schläfer wurden dadurch aufgeweckt. Ein zweiter folgender Stoss war viel schwächer, während der erste als der stärkste bisher in Eger wahrgenommen angesehen wurde.

Nachdem in Wildstein schon am 5. November Nachmittags und am 6. Abends h. 8^{40} Erdstösse verspürt worden waren, erfolgte am 7. November Früh h. 5 nach vorausgegangenen schwächeren Bewegungen ein heftiger Erdstoss unter donnerähnlichem Rollen, wobei die Bettstätten einige Minuten lang schwankten. Aehnliches wird auch von Neudorf bei Detschau um die gleiche Zeit gemeldet.

Auch in Falkenstein im Vogtlande wurde dieses Ereigniss

Digitized by Google

Früh h. 5 in zwei aufeinander folgenden heftigen, innerhalb 6 Sekunden stattgefundenen Stössen verspürt.

Sehr bemerkenswerth ist, dass dieses wie es scheint stärkste Erdbeben vom 7. November auch weiter im Westen, innerhalb des Fichtelgebirges, bemerkt wurde. Nachrichten hierüber sind von Konnersreuth bei Waldsassen unfern Eger, dann vom Markt Redwitz, Kirchenlamitz und mehreren anderen Orten des Fichtelgebirges bekannt geworden.

Schwächere Erschütterungen erfolgten am 9. November Nachmittags in Oelsnitz im Vogtlande. Auch Asch und Karlsbad (hier ohne Aenderungen in der Qellenbeschaffenheit) wurden von diesen Bodenbewegungen des 7. ergriffen, die am 10. sich leise wiederholten.

Falkenstein, das auch schon vom Erdbeben am 7. Nov. betroffen wurde, erlitt am 15. November (Nachm. h. 5^{40}) heftige Erschütterungen. Am 16. wurden in einer grösseren Anzahl Orte im Vogtlande von Bodenbewegungen heimgesucht wie Brambach, Schönberg, Klingenthal, Untersachsenberg, Adorf, Längenfeld, Falkenstein, Reichenbach u. a. O. In Asch wurde an diesem Tage und am 17. und 18. November (früh h. 4) eine schaukelnde Bewegung des Erdreichs wahrgenommen. Dabei liess sich ein unterirdisches, donnerähnliches Getöse hören. Bemerkenswerther Weise wurde in den benachbarten Orten Selb und Rehau keine derartige Bodenbewegung verspürt, und selbst am Kammerbühl, dem basaltischen Kegelberg, zeigte sich keine Erschütterung, während solche in der ganz nahe liegenden Stadt Eger wiederholt beobachtet wurden. Ob damit die Erscheinung in Zusammenhang gebracht werden darf, dass jedesmal nach erfolgtem Stosse starker Nebel sich verbreitete und dass nach länger anhaltendem Frostwetter jetzt warme Witterung, wie im Frühjahr eintrat, ist mehr als zweifelhaft. Thatsache bleibt, dass die Erdstösse zumeist Abends zwischen 8 und 11 Uhr und Morgens früh sich ereigneten. Es dauerten die Erdbeben noch eine Zeit lang, doch seltener und weniger heftig fort. In Falkenstein, in dem früher mehrfach Erschütterungen vorkamen, fanden solche noch am 23. November

Digitized by Google

Nachmittags kurz vor 4 Uhr unter kurzem donnerähnlichen Getöse und am 24. November in der Saalegegend statt.

Die letzte mir bekannte Nachricht stammt aus Kulmbach und der Umgegend, wo am 29. November bei einem mit einem Schneesturm verbundenen Gewitter früh halb 4 Uhr eine heftige Erderschütterung stattgefunden haben soll. Doch ist dieses Ereigniss als Erdbebenerscheinung nicht ganz sichergestellt. Unzweifelhaft haben diese Bodenerschütterungen einen ganzen Monat, vom 25. Oktober bis 23. November angedauert.

Durch die gütige Vermittlung des Herrn Apothekers Alb. Schmidt in Wunsiedel erhalte ich einige wichtige Nachrichten, für deren Mittheilung ich an dieser Stelle verbindlichst danke. In Wunsiedel selbst hat Herr Schmidt keine Wahrnehmungen über seismische Erscheinungen machen können. Einige von Anderen angegebene Erschütterungen sind unzulässig und nicht wohl zu berücksichtigen. Von Hof erhielt derselbe von Herrn Reallehrer Dr. Angerer die Nachricht, dass daselbst keine Erdbebenerscheinung bemerkt wurde, während in dem nur 7 km von Hof entfernten Orte Feilitsch ein leichter Stoss wahrgenommen wurde.

Durch die gleiche Vermittlung erhielt ich einen Bericht von Dr. med. Castellieni in Frankesbad. Derselbe hat selbst keine Wahrnehmung gemacht, jedoch bemerkt, dass während der Erdbebenperiode weder die Mineralquellen eine Aenderung erlitten haben, noch ein Einfluss auf den Barometerstand sich zeigte. Zuverlässige Männer haben in Frankesbad am 29. Okt. kurz vor 8 Uhr Abends einen kurzen, mässig starken Stoss, dann am 7. November früh 3 Uhr schwache Erschütterungen, die stärksten am 17. November 6^{27} Uhr und 7^{55} Uhr früh, in Begleitung von unterirdischem Geräusch, Erzittern des Bodens u. s. w. und in der Richtung von N. nach S. oder von NO. nach SW. verspürt.

Schon am 5. November hat Herr Geh.-Rath Dr. Credner in Leipzig[1]) sich über dieses Naturereigniss ausgesprochen.

[1]) Beilage der Allgem. Zeit. vom 6. Nov. Nr. 251.

Digitized by Google

Nach eingehenden allgemeinen Betrachtungen über die Erdbebenerscheinungen überhaupt kommt er zu dem Schluss, dass das Erdbeben vom Oktober—November 1897 zu dem sog. tektonischen oder Gebirgsbeben gehöre, welche fast jedes Jahr, nur nicht immer in dem Maasse, wie dieses Mal im Vogtlande wiederkehrten und ihren Grund darin hätten, dass in der apodynamischen Tiefe der Erdrinde in Folge der Abkühlung Schrumpfungen der starren Gesteine, Faltungen und Verschiebungen, Stauungen und Verwerfungen nebst Spaltenbildungen stattfinden. Jede solche Verschiebungen seien im Stande einen Stoss oder eine Anzahl von Stössen zu erzeugen, die auf der Oberfläche als Erdbeben empfunden würden. Nun sei das Gebiet des Vogtlandes, das Faltengebirge des Thüringer Waldes zwischen Fichtelgebirge und Erzgebirge, so dicht von solchen Spalten und Verwerfungen, wie keine andere Gegend Deutschlands durchzogen und daher auch sehr häufig von Erdbeben heimgesucht, indem durch die sich unter dem gewaltigen Gebirgsdruck vollziehende Bildung neuer sowie durch die Erweiterung alter Klüfte, ferner durch unterirdische Berstungen und Rutschungen der losgetrennten Gebirgtheile sich solche Erschütterungen häufig ereigneten. Ich stimme mit der Annahme überein, dass das vorliegende Erdbeben in die Reihe der sog. tektonischen gehöre, kann aber nicht annehmen, dass hierbei jetzt die Abkühlung der inneren Wärme der Erde und ein dadurch bewirktes Zusammenziehen der tieferen Gesteinsmassen (Schrumpfungstheorie) eine Rolle spiele. Dagegen spricht schon einfach die Beschränkung des Ereignisses auf einen verhältnissmässig sehr kleinen Raum des Gebirgs. Bei apodynamischen Bewegungen oder Auslösungen von Gesteinsmassen in der Tiefe äussert sich die Erschütterungswirkung an der Erdoberfläche auf weit sich forterstreckenden sog. Stosslinien. Allerdings ist der Südrand des Erzgebirgs von grossen, der Hauptsache nach von NO. nach SW. verlaufenden Brüchen und Spalten vielfach durchzogen, an welchen sich in früherer geologischer Zeit grossartige Absenkungen in den böhmischen Kessel vollzogen haben. Diese Bruchspalten kreuzen sich fast rechtwinkelig mit jenen.

Digitized by Google

welche in der Richtung des Thüringer Waldes verlaufen und hauptsächlich auf das Vogtland treffen. Beide Bruchzonen, namentlich aber die erstere, wurde in späterer geologischer Zeit von Basalteruptionen benützt, welche auf solchen Spalten sich empordrängten. Dahin gehört namentlich der Basaltzug des böhmischen Mittelgebirgs. Ich halte dafür, dass durch diese Basaltaufbrüche in nicht sehr beträchtlicher Tiefe Zerbröckelungen des Gesteins veranlasst wurden, und nur schwach unterstützte Schollen entstanden von solcher Gleichgewichtslage, dass die geringste Beeinflussung eine Lagerungsänderung derselben bewirken konnte, wie es z. B. selbst durch meteorologische starke Schwankungen möglich ist. Solche hierdurch veranlasste Gesteinsniederbrüche innerhalb verhältnissmässig kleiner Strecken und geringer Tiefe am Südrande des Erzgebirgs und der Kreuzung mit den Fichtelgebirgsklüften scheinen mir diese Erderschütterungen im Monat Oktober und November bewirkt zu haben.

Die Längenerstreckung des Erschütterungsfeldes beträgt, wenn wir Karlsbad ungefähr als nahe an dessen Rande liegend annehmen, bis Wunsiedel im Fichtelgebirge beiläufig 60 km und die Breite von etwa von Eger bis Oelsnitz 45 km. Dabei ist es sehr bemerkenswerth, dass innerhalb dieses Gebiets grosse Striche ganz von diesen seismischen Vorgängen verschont blieben, wie z. B. Bad Elster und dass die innerhalb dieser Landschaft liegenden berühmten Mineralquellen von Karlsbad, Marienbad, Frankensbad während dieser langen Periode weder quantitativ noch qualitativ irgend eine merkliche Aenderung wahrnehmen liessen, wie überhaupt von sonst bei Erdbeben häufig beeinflussten gewöhnlichen Quellen oder Brunnen eine Einwirkung nicht erwähnt wird.

Trotz der häufigen Angaben von dem Eintritt eines Stosses an verschiedenen weiter auseinander liegenden Orten ist über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kein sicherer Anhaltspunkt zu gewinnen, weil bei der Häufigkeit der aufeinander folgenden Stösse keiner derselben als derselben Erschütterung angehörig erkannt werden konnte. Der Eintritt des wie es scheint hef-

Digitized by Google

tigsten Stosses vom 7. November wird fast allerorts als gleichzeitig erfolgt angegeben. Im Anfang der Bewegung war der Mittelpunkt des Ereignisses im Osten bei Graslitz, später scheinen die Erschütterungen sich mehr gegen Westen gezogen zu haben und demnach das Erdbeben zu den sogen. fortlaufenden oder springenden zu zählen sein. Die Stösse der letzten Zeit wurden nämlich in Graslitz, Neudeck und Carlsbad viel weniger heftig gespürt als die der ersten Erschütterungsperiode, während sie der Reihe nach in Schönbach, Bleistadt, Haslau, Frankenhammer, Gossengrün, Rothau, Falkenau, Elbogen, Königsberg, Mariakulm und Eger stärker sich bemerkbar machten. Als die südlichsten Orte, aus welchen Nachrichten über dieses Erdbeben bis jetzt bekannt worden sind, können Königswart, Schlaggenwald und Petschau gelten.

Die von Falkenstein im Vogtlande gemeldeten Erdstösse am 25. November kurz vor h. 4 und von Oelsnitz am 25. November h. 2^{48} Früh sind nicht absolut sicher festgestellt.

Ebensowenig wie über die Geschwindigkeit der Fortbewegung der Erdbeben, sind aus den Angaben sichere Anhaltspunkte über die übrigen Elemente solcher Erderschütterungen zu gewinnen.

Digitized by Google

Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen.

Von **J. H. Franke.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Die an den Namen des Geodäten und Astronomen Soldner geknüpfte bayerische Landesvermessung war in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts ein vorbildliches Muster und ist es in manchen Beziehungen lange geblieben. Die Einführung rechtwinklig-sphärischer Koordinaten, heute Soldner'sche Koordinaten genannt, bildete einen bedeutsamen wissenschaftlichen Fortschritt, während gleichzeitig die an die Koordinaten geknüpfte Systematik der Landesvermessungsblätter für die geodätische Technik von höchster Bedeutung war.

In der That ist die Soldner'sche Projektion, zu den Cylinderprojektionen gehörig, in vorzüglicher Weise zur bildlichen Darstellung eines Landes geeignet, welches links und rechts von der Vermessungsachse nur eine Ausdehnung von etwa 200 km, also eine Breite von 400 km hat. Sie lässt in dieser Ausdehnung die sphärische anstatt der sphäroidischen Rechnung noch als zulässig erscheinen und hat dabei den Vortheil der geringsten linearen und Flächen-Verzerrung, wenn für mässige Entfernungen von der Vermessungsachse die sphärischen Koordinaten als eben und rechtwinklig, bzw. kongruent angesehen werden. Hier bringen sie dann die wirklichen Längen und Flächen mit der möglichst kleinsten Linear- und Flächenverzerrung zur Darstellung.

Digitized by Google

Die bayerische Landesvermessung und auch die anderer Länder ist einheitlich, d. h. auf einen Nullpunkt und eine Vermessungsachse koordinirt. Dies bedingt wegen der Querausdehnung des Landes bis zu Ordinaten $\pm$ 180 km die stete Beibehaltung sphärischer Koordinaten, die auch in der Durchführung grundsätzlich erfolgt ist. So zulässig dies auch für die ältere Vermessung erscheint, da diese eine graphische war und mit dem Messtische erfolgte, so vielfach erschwerende Nachtheile hat jene Beibehaltung für die Praxis der modernen Landesvermessung. Diese ist nämlich von der graphischen Aufnahme allgemein zur Zahlenmethode, d. h. zur Theodolitwinkelmessung und zur direkten Längenmessung übergegangen und demnach zur ausgesprochenen trigonometrischen Methode geworden. Die so geänderte Technik in Verbindung mit den gesteigerten Genauigkeitsanforderungen, die sich im Verflusse nahezu eines Jahrhunderts in der Vermessung vollzogen haben, macht eine Weiterbildung des Bestehenden zur gebieterischen Notwendigkeit. Eine gänzliche Umbildung, wie sie in der Einführung der strengen konformen Abbildung (nach Gauss) liegen würde, kann wegen ihres tieferen Eingreifens erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Es handelt sich demnach zunächst darum, unter Beibehaltung der Soldner'schen Projektion und der systematischen Vorzüge von dessen einheitlicher Koordinirung zu Koordinatensystemen zu gelangen, welche ihre Brauchbarkeit für die ältere Landesvermessung behalten und doch gleichzeitig den Anforderungen der heutigen trigonometrischen Messungsmethode angepasst sind. Weiter ist dann der etwaige Uebergang zu konformen Koordinaten zu erörtern.

Es dürfte den nachstehenden Entwickelungen zu statten kommen, wenn hier die Grundlagen und Formeln der Soldner'schen Koordinaten kurz vorangestellt werden.

A. Ein durch den Normalpunkt gelegter Vertikalschnitt (gewöhnlich, nicht notwendig, der Meridian jenes Punktes) bildet die Vermessungs- oder Abscissenachse, der auf dieser im Nullpunkte senkrecht stehende Grosskreis die Haupt- oder Direktionsachse (Ordinatenachse). Die Ordinate (o) eines Punktes

Digitized by Google

ist das von demselben auf die Vermessungsachse gefällte Perpendikel; Abscisse (a) des Punktes ist das von dem Fusspunkte des Perpendikels und vom Normalpunkte aus gezählte Stück der Vermessungsachse. Die orientirenden Richtungen (Direktionswinkel) der Vertikalschnitte zählen von der Ordinatenrichtung aus im rechtsläufigen Sinne. Die Messblatteintheilung steht mit dem sphärischen Koordinatensystem in genauester Verbindung.

Ist l die normale Länge des (quadratischen) Blattes und M die Massstabsgrösse, so ist die (verjüngte) Blattseite $l\,M$. Die Vermessungsachse sei nördlich und südlich vom Nullpunkte in gleiche Abstände $l\,M$ (Schichten N) geteilt; auf den von diesen Punkten ausgehenden Ordinatenkreisen seien von der Vermessungsachse aus die gleichen Abstände $l\,M$ (Reihen oder Nummern n) aufgetragen. Hierdurch entsteht ein Netz kleiner, nach Ost und West wegen der Konvergenz der Ordinatenkreise sich stetig in der Höhe verringender Vierecke, welche die Messblätter bilden.

Mit den Hilfsausdrücken

$$m = s \sin \varphi; \quad n = s \cos \varphi; \quad \omega = \frac{1}{\sin 1''}$$

sind die Soldner'schen Linearkoordinaten a und o gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(o_2^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\ o_2 &= o_1 + n - \frac{m^2}{2R^2}\left(o_1 + \frac{n}{3}\right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega \cdot m}{R^2}\left(o_1 + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

in welchen die dritten Glieder die sphärischen Ergänzungen

$$(\delta a), \quad (\delta o), \quad (\delta \varphi)$$

darstellen. Für die Polarkoordinaten bestehen mit $(a_2 - a_1) = \Delta a$ und $(o_2 - o_1) = \Delta o$ die Gleichungen

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2R^2}\left(o_1^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3}\right)}{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2}\left(o_1 + \frac{\Delta o}{3}\right)} \\ s &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2R^2}\left(o_1^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3}\right)}{\sin\varphi} = \frac{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2}\left(o_1 + \frac{\Delta o}{3}\right)}{\cos\varphi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

als erste Näherung (wegen Gleichsetzung von m und n mit Δa, bzw. Δo), die indess für alle gewöhnlichen Landesvermessungszwecke ausreicht.

Für die Blatthöhenverkürzung v_h kann die Richtung und Länge l der Blattseite nordsüdlicher Richtung mit dem unter dem Direktionswinkel 90° durch eine Blattecke gelegten Vertikalschnitt identificirt werden. Man hat dann aus der ersten der Gl. (1), mit o die Mittelordinate des Blattes bezeichnend,

$$v_h = \frac{l \cdot o^2}{2R^2} \quad (3)$$

in natürlichem Masse. Hieraus folgt, da die Blattseiten west-östlicher Richtung definitionsgemäss unverkürzt bleiben, die Flächenverkürzung eines (quadratischen) Blattes

$$v_f = \frac{l^2 \cdot o^2}{2R^2} \quad (4)$$

Entsprechend der bildlichen Darstellung in der Ebene sind auch die Abscissen der Koordinatenpunkte verkürzt aufzutragen.

Bezeichnet a_n die Abscisse des der Direktionsachse zunächst liegenden Blattrandes, so ist der Abscissenrest $(a - a_n)$ ähnlich Gl. (3) um

$$v_a = \frac{(a - a_n)\, o^2}{2R^2} \quad (5)$$

zu verkürzen.

Die trigonometrischen Arbeiten sind nach den Gl. (1) und (2) in der Regel durchaus sphärisch geführt worden, in den Planarbeiten der graphischen Aufnahme sind gleichfalls die sphärischen Beziehungen (3) und (5) zur Beachtung gelangt.

Digitized by Google

während lediglich das v_f der Gl. (4) unbeachtet blieb. Die moderne Landesvermessung hat es mit durchaus anderen Verhältnissen zu thun. Anstatt der früheren 2 bis 3 Koordinatenpunkt-Ordnungen bestehen jetzt 7 bis 8 (5 trigonometrische, 2 polygonometrische und gegebenenfalls 1 geometrische); zugleich ist die Zahl der Koordinatenpunkte um das mehrhundertfache gewachsen. Die Gl. (1) ist in den Punktordnungen I—III, dann IV und V mindestens von $o = 0$ bis 20, bzw. 40 km, in den Ordnungen VI und VII von 60, bzw. 90 km an (hier beschränkt auf das erste Glied der sphärischen Ergänzung) zu beachten. Das Gleiche gilt von $o = 90$ km an für die Gl. (3) und (5), während Gl. (4) durchaus zur Anwendung gelangt. Alle diese technischen Massnahmen sind bedingt durch die gesteigerten Genauigkeitsanforderungen in Verbindung mit der heutigen Plandarstellung in grösserem Massstabe. Die wesentlichste Anforderung besteht nun darin, alle diese sphärischen Beziehungen Gl. (1)—(5) unmittelbar in die Koordinaten aufzunehmen, d. h. diese als eben betrachten zu dürfen, und so durch Vereinfachung und Fehlerquellenverschliessung, insbesondere auch der zahlenmässigen Behandlung geometrischer Minimalgrössen, den technischen Wert und die Genauigkeit der modernen Vermessung zu steigern. Die mathematische Erfüllung jener Anforderung ist an und für sich leicht, kann jedoch durch eine wesentliche Bedingung erschwert werden, die darin besteht, dass die neuen Koordinaten mit geometrisch hinreichender Genauigkeit in den allgemeinen Landesvermessungsblättern der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwendet werden können. (Dieser Fall ist, wie in Bayern, dann vorhanden, wenn keine vollständige Neuvermessung des ganzen Landesgebiets vorliegt.) Offenbar kann diese Bedingung nicht lediglich durch Verkleinerung der neuen Systeme, sondern nur durch eine derartige Lage der neuen Koordinatenachsen erreicht werden, dass der Abweichungswinkel gegen die ursprünglichen Achsen der minimalste wird. Hiermit ist zugleich ausgesprochen, dass die Meridiane der neuen Normalpunkte, wenn der Meridian des Nullpunktes der einheitlichen Koordinirung

Digitized by Google

Vermessungsachse war, nicht als neue Achsen dienen können, da in unseren Breiten bei 100 km Querabstand die Meridiankonvergenz $> 1^0$ ist.

B. Dementsprechend wird definirt: Die Haupt- oder Direktionsachse des lokalen Systems bildet der bisherige Ordinatenkreis des neuen Nullpunktes N' im ursprünglichen System U, die neue Vermessungs- oder Abscissenachse der hiezu senkrechte Vertikalschnitt in N'. Abscissen und Ordinaten im neuen Systeme sind ähnlich wie im ursprünglichen Systeme, also als Abschnitte, bzw. Perpendikel der neuen Vermessungsachse definirt. Das System ist demnach wieder ein sphärisches nach Soldner. Es sind die allgemeinen Koordinaten (a, o) eines Punktes A in solche (x, y) des neuen Systems mit dem Nullpunkte N', (a_0, o_0) zu transformiren.

Es bestehen die Grundgleichungen im Systeme U

$$\left.\begin{aligned} a - a_0 &= \Delta a = s \sin \varphi + (\delta a) \\ o - o_0 &= \Delta o = s \cos \varphi + (\delta o) \end{aligned}\right\} \qquad (U)$$

und im System N

$$\left.\begin{aligned} x &= s \sin \varphi + (\delta x) \\ y &= s \cos \varphi + (\delta y) \end{aligned}\right\} \qquad (N)$$

wo s der Vertikalschnitt $N' A$.

Durch Einführung von (U) in (N) folgt

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta a + (\delta x) - (\delta a) \\ y &= \Delta o + (\delta y) - (\delta o) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

und da nach Gl. (1)

$$(\delta a) = \frac{m}{2R^2}\left(o^2 - \frac{n^2}{3}\right); \quad (\delta o) = -\frac{m^2}{2R^2}\left(o_0 + \frac{n}{3}\right)$$

$$(\delta x) = \frac{m}{2R^2}\left(y^2 - \frac{n^2}{3}\right); \quad (\delta y) = -\frac{m^2}{2R^2} \cdot \frac{n}{3}$$

ist (letzteres unter Beachtung, dass die Koordinaten des neuen Nullpunktes gleich Null sind), so erhält man

Digitized by Google

$$(\delta x) - (\delta a) = -\frac{m}{2R^2}(o^2 - y^2)$$

$$(\delta y) - (\delta o) = \frac{m^2}{2R^2} o_0$$

woraus durch Einsetzung in Gl. (a)

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{m}{2R^2}(o + y)(o - y) \\ y &= \Delta o + \frac{m^2}{2R^2} o_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Mit für weite Grenzen hinreichender Sicherheit gelten die Vereinfachungen $m = \Delta a$, $n = \Delta o$ und $y = (o - o_0)$, daher

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2}\left(o - \frac{o_0}{2}\right) o_0 = \Delta a + \delta \\ y &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 \qquad = \Delta o + \delta' \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dies sind die für vereinfachte tabellarische Behandlung eingerichteten Transformationsformeln. Man leitet aus ihnen die Umkehrungen ab

$$\left.\begin{aligned} a &= (a_0 + x) + \frac{x}{R^2}\left(\frac{o_0}{2} + y\right) o_0 = (a_0 + x) + \delta_1 \\ o &= (o_0 + y) - \frac{x^2}{2R^2} \cdot o_0 \qquad = (o_0 + y) + \delta_1' \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

die, weil in ihnen $x = \Delta a$ und $y = \Delta o$ gesetzt sind, als erste Näherung gelten. (Die Transformationen (6) sind von mir gelegentlich einer anderen Arbeit bereits 1890 in Nr. 3022 der A. N. abgeleitet worden.)

Es ist noch die Frage der geringsten Achsenkonvergenz[1]) zu erledigen, die hier lediglich hinsichtlich der Konvergenz der neuen Achsen mit den Messblattseiten der einheitlichen Koordi-

---

[1]) Diese Konvergenz erhält man auch ganz kurz durch die dritten der Gl. (1) und (15), nämlich $c'' = -\frac{\omega \cdot m o_0}{R^2} = -\frac{\omega \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}$, wie nachher Gl. (9).

Digitized by Google

nirung in Betracht kommt. In dieser letzteren Beziehung ist sie ausführlicher zu betrachten.

Die Koordinaten eines quadratförmigen Soldner'schen Blattes im einheitlichen System, hier der Kürze halber a und o positiv genommen, lassen sich ausdrücken durch

Ecken.	SO.	SW.	NW.	NO.
	a	a	$a+l\cdot M$	$a+l\cdot M$
	o	$o+l\cdot M$	$o+l\cdot M$	$o.$

Im lokalen Systeme vermöge (7) durch

$$\left.\begin{array}{lll}
 & \underline{\text{SO.}} & \underline{\text{SW.}} \\
\delta: & -\dfrac{\Delta a}{R^2}\left(o-\dfrac{o_0}{2}\right)o_0 & -\dfrac{\Delta a}{R^2}\left((o+lM)-\dfrac{o_0}{2}\right)o_0 \\
\delta': & \dfrac{(\Delta a)^2}{2R^2}\,o_0 & \dfrac{(\Delta a)^2}{2R^2}\,o_0 \\
 & \underline{\text{NW.}} & \underline{\text{NO.}} \\
\delta: & -\dfrac{(\Delta a+lM)}{R^2}\left((o+lM)-\dfrac{o_0}{2}\right)o_0 & -\dfrac{(\Delta a+lM)}{R^2}\left(o-\dfrac{o_0}{2}\right)o_0 \\
\delta': & \dfrac{(\Delta a+lM)^2}{2R^2}\,o_0 & \dfrac{(\Delta a+lM)^2}{2R^2}\,o_0
\end{array}\right\}\text{(b)}$$

Die Subtraktion gibt unter Abwerfung der zu vernachlässigenden Glieder $\frac{lM}{R^2}$ und $\frac{(lM)^2}{2R^2}$ sowie Uebergang zu natürlichem Masse durch Division mit der Massstabsgrösse M die lineare Divergenz $c = \delta_{\text{SO.}} - \delta_{\text{SW.}} = \delta_{\text{NO.}} - \delta_{\text{NW.}}$, dann $\delta'_{\text{NO.}} - \delta'_{\text{SO.}} = \delta'_{\text{NW.}} - \delta'_{\text{SW.}}$ der älteren Blattseitenrichtungen mit den neuen Koordinatenachsen für die Blattlänge l

$$c = -\frac{\Delta a\cdot l\cdot o_0}{R^2} \tag{9}$$

Denkt man sich die Mitten der Seiten eines identischen Blattes, einmal mit lokalen, dann mit allgemeinen Koordinaten konstruirt, zur Deckung gebracht, so wird die ganze Konver-

Digitized by Google

genz zur Hälfte mit + und — auf die 4 Blattecken geworfen, so dass für diese der Ausdruck besteht

$$c_e = \pm \frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{2 R^2} \tag{10}$$

Der lineare Wert von c_e kann nicht höher als 0,05 mm, die äusserste Anfangsgrenze der geometrischen Darstellbarkeit, angenommen werden; hiernach sind Δa und o_0 durch die Gleichung

$$0{,}0001\, R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \tag{11}$$

verbunden.

In ähnlicher Weise leiten sich die Blattabmessungen ab. Man findet aus den vorhin benützten Gl. (b) erst für die östlichen und westlichen, dann für die südlichen und nördlichen Blattseiten, wieder unter Abwerfung von $\frac{(l \cdot M)^2}{R^2}$, die Näherungsausdrücke

$$\left.\begin{aligned} v_l &= \delta_{\text{NO.}} - \delta_{\text{SO.}} = \delta_{\text{NW.}} - \delta_{\text{SW.}} = l \cdot \frac{(2\,o - o_0)}{2\,R^2}\, o_0 \\ v_l' &= \delta'_{\text{SW.}} - \delta'_{\text{SO.}} = \delta'_{\text{NW.}} - \delta'_{\text{NO.}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dasselbe Blatt hat in lokalen Koordinaten, die ja gleichfalls sphärische sind, wieder eine Verkürzung der Blattlängen in der Abscissenrichtung, die ähnlich wie (3), wenn wie hinreichend $y = (o - o_0)$ gesetzt wird,

$$v_l = \frac{l \cdot y^2}{2\,R^2} = \frac{l \cdot (o - o_0)^2}{2\,R^2} \tag{13}$$

beträgt, während definitionsgemäss und wie oben die Blattlängen in der Ordinatenrichtung ungeändert bleiben. Die Addition gibt

$$v_l + v_l = \frac{l}{2\,R^2}\left((2\,o - o_0)\,o_0 + (o - o_0)^2\right) = \frac{l \cdot o^2}{2\,R^2} \tag{14}$$

Das ist also die thatsächliche Blattverkürzung v_h der Gl. (3). (Dass das hier gebrauchte o gegen das dort benützte eigentlich $\left(o - \frac{l}{2}\right)$, ist für die Differentialformel (14) ohne Belang).

Digitized by Google

Der Zweck der transformirten Koordinaten x, y besteht darin, sie innerhalb gewisser Ausdehnungsgrenzen als ebene Koordinaten betrachten zu können, demnach von den strengen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(y_2^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\ y_2 &= y_1 + n - \frac{m^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{n}{3}\right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega m}{R^2}\left(y_1 + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

zu den genäherten

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + m \\ y_2 &= y_1 + n \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

übergehen zu können. Hierfür ist das Maximum der Ordinate y massgebend. Die Genauigkeitsanforderungen können verschiedene sein und bemessen sich nach der Grösse der linearen (v) und der Richtungsverzerrung (v') bei der Abbildung in der Ebene. Diese sind im Soldner'schen Systeme wie bekannt und auch leicht zu finden

$$\left.\begin{aligned} 1+v &= 1 + \frac{(\delta a)\sin\varphi + (\delta o)\cos\varphi}{s} = 1 + \frac{\sin^2\varphi}{6R^2}(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2)^{1)} \\ v' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi - (\delta o)\sin\varphi}{s} \\ &= \frac{a_2 - a_1}{6R^2}(2o_1 + o_2) + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{6R^2}(o_1^2 + o_1 o_2 + o_2^2) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Somit hat die lineare Verzerrung ihr Maximum in der Abscissenrichtung, die Richtungsverzerrung im Oktanten.

Die numerische Auswertung gibt hiefür bei $y = \pm 40$ km und bei $s = 7$ km.

$$\text{Max. } l_v = 1 : 50\,000; \text{ Max. } r_v = 3'' \tag{18}$$

Hiernach bestimmen sich die Querausdehnungen lokaler Systeme und damit auch deren Nullpunktsordinate o_0 durch das

---

[1]) Für $o_1 = o_2$ wird $1 + v = 1 + \frac{o^2}{2R^2}\sin^2\varphi$.

Digitized by Google

zulässige Max. von y. Die Ausdehnung in der Abscissenrichtung (x) könnte über 200 km steigen, wenn nicht gegebenenfalls die wichtigen Gleichungen (10), bzw. (11) beständen. Mit $l = 0{,}5$ m, dann $y = \pm 40$ km wird zunächst erhalten für $o_0 = \pm 80$ km, sodann für $o_0 = \pm 160$ km, nach Gl. (11)

$$\Delta a = 102 \text{ km, bzw. } 51 \text{ km.}$$

Das Ergebniss der vorstehenden Darlegung ist sonach:

Werden die sphärischen Koordinaten der einheitlich koordinirten Dreieckspunkte höherer Ordnung eines Soldner'schen Netzes mittels der Gl. (7) auf neue Koordinatenachsen derart, wie sie Seite 24 definirt sind, transformirt, so erhält man wieder ein System rechtwinklig-sphärischer Koordinaten. Man kann diese transformirten Koordinaten innerhalb gewisser, aus (17) abzuleitender Genauigkeitsgrenzen als ebene betrachten und sodann mit den einfachen Formeln (16) weiter rechnen. Nach den in (18) gegebenen numerischen Auswertungen ist dies vom Dreiecknetz III. Ordnung abwärts an bei $y = \pm 40$ km zulässig mit einer linearen Genauigkeit 1 : 50000 und einer maximalen Richtungsverzerrung von 3″. Zugleich geben bis zu dieser Grenze $y = \pm 40$ km die ebenen Koordinaten das Landesvermessungsblatt der einheitlichen Koordinirung wieder mit einer Abscissenverzerrung im Maximum von 1 : 50000, was gleicherweise für die aufzutragenden Abscissenreste gilt. Vermöge der Gl. (11) und der obigen numerischen Auswertung lassen sich die transformirten Koordinaten als ebene gleich den einheitlich sphärischen Koordinaten innerhalb der Werte $y = \pm 40$ km und $\Delta a = x = \pm 102$, bzw. 51 km bei $o_0 = \pm 80$, bzw. 160 km bis zu einer Maximaldifferenz von 0,05 mm für alle Planarbeiten im einheitlichen Blattsystem der Landesvermessung unmittelbar verwenden.

Digitized by Google

Hienach sind durch die transformirten (ebenen) Koordinaten die sämmtlichen (trigonometrische wie geometrische) sphärischen Beziehungen der Gl. (1)—(5) innerhalb technisch zulässiger Grenzen zahlenmässig in diese Koordinaten aufgenommen.

C. Die bisher behandelte Soldner'sche (kongruente) Projektion ist neuerer Zeit durch eine konforme Abbildung (nach Gauss), in welcher Original und Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich sind, hie und da ersetzt worden. Von Herrn General Schreiber wurde sie in modificirter Form als konforme Doppelprojektion der preussischen Landesaufnahme zu Grunde gelegt, und neuerdings durch Herrn Jordan in der Mecklenburgischen Landesvermessung theoretisch und praktisch weiter entwickelt. Ihr eignen gewisse principielle Vorzüge, besonders auch für die einheitliche Projektion eines sehr grossen Landesgebiets. Indessen hat schon 1876 Herr Helmert darauf hingewiesen, dass die konformen Koordinaten ihren grossen Wert auch in der allgemeinen Landesvermessung haben. Zwar ist ihre absolute Flächenverzerrung nahezu doppelt so gross als die Soldner'sche, dafür jedoch nach allen Richtungen gleichmässig und gleichzeitig werden die Richtungsverzerrungen so gering, dass in weit grösserer Ausdehnung die ebene Triangulirung zulässig erscheint.

Seien ξ, η die rechtwinklig-konformen Koordinaten, so hat man die wichtigen, unseres Wissens zuerst von Herrn Helmert aufgestellten Vergleichungen zwischen kongruenten und konformen Koordinaten, die allen hier zu machenden Anwendungen zu Grunde liegen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= o\left(1 + \frac{o^2}{6\,R^2} + \frac{o^4}{24\,R^4}\right) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wobei für eine sphärische Rechnung bis zu $o < 200$ km das Glied vierter Ordnung vernachlässigt werden kann. Innerhalb dieser Grenze sind dann die vorigen Verzerrungen (17) nunmehr

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} 1+V &= 1+\frac{(\delta a)\sin\varphi+(\delta o)\cos\varphi}{s}+\frac{(o_2^3-o_1^3)}{6R^2 s}\cos\varphi = 1+\frac{(o_1^2+o_1 o_2+o_2^2)^{1)}}{6R^2} \\ \varphi''-\varphi = V' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi-(\delta o)\sin\varphi}{s}-\frac{(o_2^3-o_1^3)}{6R^2 s}\sin\varphi = \frac{a_2-a_1}{6R^2}(2o_1+o_2) \end{aligned}\right\} (20)$$

Deren Vergleichung mit den (17) zeigt die principiell und technisch gleich wertvolle gleichmässige Linearverzerrung bei Gauss, während die Richtungsverzerrung nur aus dem ersten Soldner'schen Gliede besteht. Die erstere ist dem Maximum von Soldner gleich, die zweite dagegen erheblich niedriger. Diese ist für $y = 90$ km und $s = 7$ km in der Oktantenrichtung hier 1″, 2, für Soldner jedoch 12″, demnach bei der Konformität weit günstiger. Dagegen hat allerdings die Flächenverzerrung, die nach (4) und (17) bei Soldner vermöge der linearen Beziehung $s' = s\left(1+\frac{f(o)}{R^2}\sin^2\varphi\right)$ im durchschnittlichen Mittel $\frac{s^2 \cdot o^2}{2R^2}$ beträgt, hier den konstanten Wert $\frac{s^2 \cdot o^2}{R^2}$.

Es liegt nahe, dass die älteren graphischen Aufnahmen in den möglichst kleinsten linearen und damit Flächenverzerrungen das wesentlichste Moment erblicken mussten. Mit demselben Rechte kann aber die auf Winkelmessungen sich aufbauende moderne Vermessung, wie schon von Früheren hervorgehoben, das Hauptgewicht auf die geringere Richtungsverzerrung legen; das umsomehr, als die erhöhte mittlere Flächenverzerrung noch innerhalb technisch zulässiger Grenzen bleibt und die linearen Maxima in beiden Systemen die gleichen sind. Ueberdem könnte erstere auch einschliesslich der Reduktion vom Projektions-Horizont auf das thatsächliche Vermessungsniveau in einfachster Weise bei den Schlussflächen berücksichtigt werden.

Innerhalb der oben angegebenen Grenzen lassen sich demnach mittels der Gl. (19) kongruente in konforme Koordinaten überführen. Soll jedoch vom Netze III. Ordnung abwärts an die ebene Triangulirungsberechnung, bzw. die Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen möglich werden,

---

[1]) Für $o_1 = o_2$ wird $1+V = 1+\frac{o^2}{2R^2}$.

Digitized by Google

so kann dies bei grösserer Ausdehnung des einheitlichen Netzes zum Aufgeben der bisherigen einen Vermessungsachse, also zur Anlegung besonderer Kleinsysteme nötigen, in denen die Ordinaten höchstens bis 80 oder 90 km gehen, wobei das Maximum der linearen Verzerrung etwa 1 : 10 000 ist. Die Wahl der lokalen Vermessungsachsen unterliegt keiner mathematischen Beschränkung, selbst wenn die Beibehaltung der geometrischen Abschlussgrenzen der älteren Landesvermessungsblätter dabei Bedingung wäre. Nur würde es sich bei grösserer Konvergenz der lokalen Achsen mit der Richtung der ursprünglichen Vermessungsachse um umständlichere Transformationsarbeit sowie darum handeln, dass die neuen Achsenrichtungen mit den Blatträndern stärker und geometrisch merkbar divergirten. Das wären indess keine mathematischen, sondern lediglich technische Hemmnisse.

Einschneidender ist die bereits in Theil B erörterte, nicht bloss angenommene, sondern thatsächlich bestehende Bedingung, dass die neuen Koordinaten für die älteren Landesvermessungsblätter unmittelbar benützbar bleiben sollen. Das schränkt nicht nur die den neuen Systemen zu gebenden Abmessungen ein, sondern bedingt auch die Definition der neuen Achsen behufs Herbeiführung der geringst möglichsten Achsenkonvergenz. Die Erfüllung dieser Bedingung zwingt daher vermöge der Gl. (10) und (11) wieder dazu, den älteren Ordinatenkreis und dessen Perpendikel im neuen Nullpunkte zu Achsen zu nehmen. Vermittels der Transformationen (6) und (7) gelangt man zu neuen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten, die nach den Gl. (19) in rechtwinklig konforme übergeführt werden. Diese beiden Transformationen würden dann zweckmässig in eine verbunden. Sind ξ, η die konformen Koordinaten, a_0, o_0 die des neuen Nullpunktes, so ist nach (19)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y\left(1 + \frac{y^2}{6R^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

sodann mit Berücksichtigung von (7) unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung als der zweiten

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2}\left(o - \frac{o_0}{2}\right) o_0 = \Delta a + (\delta) \\ \eta &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 + \frac{(\Delta o)^3}{6R^2} = \Delta o + (\delta') \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

denen die Zurückführungsformeln entsprechen

$$\left.\begin{aligned} a &= (a_0 + \xi) + \frac{\xi}{R^2}\left(\frac{o_0}{2} + \eta\right) o_0 \\ o &= (o_0 + \eta) - \frac{\xi^2}{2R^2} o_0 - \frac{(\Delta o)^3}{6R^2} \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

Diese Transformationen sind demnach nur um Weniges umständlicher als die (7) und gleich diesen leicht tabellarisch einzurichten. Eine sofort anzustellende Untersuchung ergibt, dass die Blattrichtungsdivergenz hier nur um zu vernachlässigende Glieder vierter Ordnung von der bei (9) entwickelten abweicht und daher wieder die Gleichungen bestehen.

$$c = -\frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}; \qquad c_e = \pm \frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{2R^2} \tag{22b}$$

und für $c_e = 0{,}05$ mm

$$0{,}0001\, R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \tag{22c}$$

Die Blattseitenlängen in der Abscissenrichtung sind hier, wie sich aus der Diskussion der Gl. (14) in Verbindung mit dem Konformitätsprincip ergibt, gleich $l\left(1 - \frac{(2o - o_0)o_0}{2R^2} + \frac{(\Delta o)^2}{2R^2}\right)$, demnach in konformen Koordinaten ausgedrückt, um $\frac{l \cdot (\Delta o)^2}{2R^2}$ vergrössert, während auch die im vorigen Systeme unverändert gebliebenen Blattseiten in der Ordinatenrichtung hier ebenfalls um

$$v_l = \frac{(\Delta o_2)^3 - (\Delta o_1)^3}{6R^2} = l \cdot \frac{(\Delta o)^2}{2R^2}$$

vergrössert erscheinen. Das Verhältniss $\frac{v_l}{l}$ ist für $o = \pm 90$ km noch 1 : 10 000 und gibt somit kein Hinderniss ab, die trigono-

Digitized by Google

metrischen und geometrischen Arbeiten der Landesvermessung vom Netze III. Ordnung abwärts an durchaus in der Ebene zu führen.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich dahin aussprechen:

Wenn die Linear-Koordinaten (mit a und $o < 200$ km) einer einheitlich sphärischen Koordinirung in konforme übergeführt werden sollen und dabei die Bedingungen bestehen, dass sodann: 1) die sämmtlichen trigonometrischen und geometrischen Arbeiten innerhalb entsprechenden Vernachlässigungsgrenzen in der Ebene zu führen sind, und 2) die neuen Koordinaten ohne technische Schwierigkeiten nicht nur die alten Landesvermessungsblätter wiedergeben, sondern auch für Planarbeiten in diesen unmittelbar als ebene Koordinaten benützbar seien, so führt der einfachste Weg hierzu nur über transformirte (lokale) Koordinaten. Das entsprechende Mittel zu diesem Zwecke liegt dann lediglich in der passenden Wahl der neuen Koordinatenachsen unter veranlasster Begrenzung der lokalen Systeme.

Der Hauptzweck aller dieser Transformationen bestand in dem Wegbringen der sphärischen Beziehungen, bzw. deren unmittelbare Aufnahme in die Koordinaten. Es wird dies gleichermassen erreicht durch transformirte Soldner'sche oder konforme Koordinaten. In theoretischer Beziehung bleiben nach diesen Ueberführungen die bekannten Mängel und Vorzüge beider Koordinatenarten bestehen: Die grössere Richtungsverzerrung und die ungleichmässige Linearverzerrung mit mittlerer geringerer Verzerrung der Flächen bei Soldner, während das Gegenteil für die Konformität gilt. Eine graphische Aufnahme wird sich für das erstere entscheiden können, während der Zahlenmethode der modernen Landesvermessung zumeist die geringere Richtungsverzerrung im Vereine mit der (differentiellen) Gleichmässigkeit der Linearverzerrung als wichtigste Bedingung gilt. Indess kann man sich in einem vorliegenden Kongruenzsystem principiell für die Beibehaltung kongruenter Koordinaten ent-

Digitized by Google

scheiden, wenn denselben wie hier eine Einrichtung gegeben wird, dass sie technisch als ebene Koordinaten betrachtet werden können und zugleich in den Plänen der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwertbar sind.

D. Es genügt wohl, nur kurz daran zu erinnern, dass durch die Transformationen (7) und (22) wieder sphärische Koordinaten (x, y), bzw. konforme (ξ, η) gewonnen werden. Zufolge dessen kommt diesen derselbe Anwendungskreis zu, als den ursprünglichen Koordinaten a, o; sie müssen demnach sämtlich gleichzeitig < 200 km bleiben. Die Bedingung $y < 40$ km oder $\eta < 90$ km gründet sich nur auf die Absicht, innerhalb zulässiger Grenzen mit durchaus ebenen Koordinaten arbeiten zu wollen, und ebenso bezieht sich die in der Gleichung $0{,}0001\, R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o$ gegebene Einschränkung der zulässigen Ausdehnung von Δa lediglich auf die unmittelbare Verwertung der neuen Koordinaten in den Messblättern der ursprünglichen (einheitlichen) Koordinirung. Könnte man hiervon absehen, so würde man mit den transformirten $(x\, y)$, bzw. $(\xi\, \eta)$ in den angegebenen Grenzen (200 km) die bekannte sphärische Koordinatenberechnung haben, wie sie im Soldner'schen Systeme durch die Gl. (1) und (15) ausgedrückt ist. Für die Konformität pflegt man allerdings bei der Neuanlage einer umfassenden Landesvermessung einen ganz anderen Weg einzuschlagen, gegründet auf sphäroidische Beziehungen, bzw. geographische Positionen, in Form von Uebertragungen zwischen Ellipsoid oder Kugel und Ebene. Wenn jedoch in einem sphärischen Netze unter Beibehaltung der bisherigen Hauptachse vermittels der Beziehung $\eta = o\left(1 + \frac{o^2}{6\,R^2}\right)$ von bereits bestehenden Soldner'schen Koordinaten zu konformen übergegangen worden wäre, so liegt es nahe, die Form der Soldner'schen Berechnungsweise im Wesentlichen beizubehalten, d. h. direkt auf der Kugel zu rechnen. Hierfür kann noch ein weiterer Grund sprechen, wenn nämlich die sphärischen Ergänzungen nicht logarithmisch gerechnet, sondern bezüglichen Diagrammen entnommen werden, wie es z. B. im bayerischen Dreiecksnetze zumeist geschieht.

Digitized by Google

Man kann daher die sphärischen Berechnungsformeln für die konformen Koordinaten den Gl. (1) und (15) anpassen, wobei man in leichter Ableitung erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 &= \xi_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(\eta_1^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\
\eta_2 &= \eta_1 + n + \frac{n}{2R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{2R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{3}\right) + \frac{n^3}{24R^2} \\
(\varphi_2) &= (\varphi_1) + 180 + \frac{m}{R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \text{(y)}$$

In einem bereits bestehenden Landesnetze mit rechtwinklig konformen Koordinaten würden diese Ausdrücke nur für einzelne, neu einzuschaltende Punkte I. oder II. Ordnung zur Anwendung gelangen, soweit hierbei sphärische anstatt sphäroidische Rechnung und Einschränkung auf Glieder zweiter Ordnung zulässig ist. Hierfür reichen die Formeln aus und gestatten mit Hilfe jener Diagramme besonders bei den Netzpunkten II. Ordnung erleichterte Rechnung, da das dritte Glied $\frac{n^3}{24R^2}$ noch für $n = 17$ km $< 0{,}005$ m bleibt. Für die sämtlichen geodätischen Arbeiten vom Netze III. Ordnung abwärts an sind aber diese Formeln ebenso, wie vorher für die Soldner'schen Gl. (1) nachgewiesen, technisch unpraktikabel, weshalb hier gleichfalls zur Gewinnung ebener Koordinaten lokale Systeme und Transformationen entsprechend den Gl. (22) geboten sind.

Digitized by Google

Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Die folgenden Erörterungen sind veranlasst durch den Versuch, die Formeln für die Bewegung eines Planeten um die Sonne durch Grenzübergang aus denjenigen Gleichungen zu gewinnen, welche für einen von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punkt gültig sind. Es ergab sich, dass dieser Grenzübergang nicht so einfach auszuführen ist, wie man erwarten mochte; durch Anwendung der Formeln für die Additionstheoreme der elliptischen Functionen und Integrale liessen sich die gebräuchlichen Formeln herstellen. Für die Theorie dieser Integrale folgte hieraus das vielleicht bemerkenswerthe Resultat, dass ein gewisses Umkehrproblem sich auf die bekannte Kepler'sche Gleichung reduciren lässt. Für die Theorie der Kegelschnitte ist es von Interesse, dass sich die Gleichungen von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkte durch Summen von elliptischen Integralen mit verschiedenen Modul darstellen lassen; und hieraus wieder findet man die geometrische Deutung und die Lösung für ein Umkehrproblem, bei dem zwei Summen von zwei elliptischen Integralen mit verschiedenem Modul (aber mit zwei gemeinsamen kritischen Punkten) gegeben sind und die beiden oberen Grenzen als Functionen der Summen zu bestimmen sind.

Digitized by Google

§ 1. Das erweiterte Umkehrproblem für elliptische Integrale in verallgemeinerter Form.

Wir bezeichnen mit u und v zwei elliptische Integrale erster Gattung:

$$(1)\qquad u=\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}},\quad v=\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}}$$

Ist dann die Summe

$$(2)\qquad u+v=w$$

gegeben, so sind die oberen Grenzen ξ, η nach dem sogenannten erweiterten Umkehrproblem von Clebsch und Gordan bestimmt,[1]) falls ausserdem noch die Summe der entsprechenden Integrale dritter oder zweiter Gattung (genommen in Riemann's Sinne) gegeben vorliegt. Ist aber die entsprechende Summe von Legendre'schen Integralen dritter Gattung gegeben, so ist jenes erweiterte Umkehrproblem nicht anwendbar, da sich diese Integrale als Summen von Riemann'schen Integralen zweiter und dritter Gattung darstellen. Wir benutzen die Jacobi'sche Bezeichnungsweise (wie sie z. B. auch von Durège angewandt wird) und setzen

$$(3)\qquad \Pi(u,a)=\int_0^{u}\frac{\varkappa^2\cdot\operatorname{sn}a\cdot\operatorname{cn}a\cdot\operatorname{dn}a}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2a\cdot\operatorname{sn}^2u}du=u\,Z(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

$$(4)\qquad Z(a)=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=\frac{J}{K}u-\int_0^{u}\varkappa^2\operatorname{sn}^2u\cdot du,$$

wo mit J und K die bekannten ganzen elliptischen Integrale zweiter und erster Gattung bezeichnet sind.

---

[1]) Vgl. für elliptische Integrale, für welche Rosenhain schon den einfachsten Fall gelöst hatte, besonders Clebsch, Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, Crelle's Journal Bd. 64.

Digitized by Google

Seien nun A und B Constante und sollen aus der Gleichung (2) und aus der Gleichung

$$(5) \qquad A\,\Pi(u, a) + B\,Z(u) + A\,\Pi(v, a) + B\,Z(v) = w'$$

die oberen Grenzen ξ, η als Functionen von w und w' bestimmt werden, so kann die Aufgabe mit Hülfe der Additionstheoreme in folgender Weise umgeformt werden. Es ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\Pi(u, a) + \Pi(v, a) \\ &= \Pi(u+v, a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v-a)}{1 + \varkappa^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v+a)} \end{aligned}$$

$$(7) \qquad Z(u) + Z(v) = Z(u+v) + \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v).$$

In Folge dessen erhalten wir aus (5) und (1)

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{A}{2}\log\frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn}(w-a)}{1 + \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn}(w+a)} + B\varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} w \\ &= w' - A\,\Pi(w, a) - B\,Z(w). \end{aligned}$$

Die rechte Seite enthält jetzt nur gegebene Grössen; zur Berechnung der Unbekannten u und v haben wir also eine transscendente Gleichung für das Product $\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v$ vor uns. Ist $A = 0$, so wird dieselbe algebraisch, und wir haben das erweiterte Umkehrproblem für die Integrale zweiter Gattung. Der Fall $B = 0$ gibt das entsprechende Problem für Integrale dritter Gattung.

§ 2. Transformation eines analogen Umkehrproblems auf die Normalform.

Auf eine transscendente Gleichung ähnlicher Art führt die folgende Aufgabe. Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q}} = w \\ &\int_0^p \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} = w', \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo
$$P = A(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta),$$
$$Q = A(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta);$$

es sollen p und q als Functionen von w und w' bestimmt werden. Wir nehmen an, dass die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von einander verschieden seien.

Zunächst müssen die elliptischen Integrale der linken Seiten von (9) auf ihre Normalform gebracht werden. Zu dem Zwecke setzen wir

$$(10) \qquad p = \frac{\zeta^2 \alpha - \beta}{\zeta^2 - \tau^2}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}};$$

dann wird:

$$(11) \qquad \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\varkappa^2\zeta^2)}}, \quad \text{wo}$$

$$(11\text{a}) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{A(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}, \quad \varkappa^2 = \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}}.$$

Zur Umformung der Integrale aus der zweiten Gleichung (9) wenden wir die von Königsberger gegebene Weierstrass'sche Methode[1]) an; d. h. wir machen wieder die Substitution (10) und finden:

$$(12) \qquad \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\zeta^2-\tau^2)\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cdot l \cdot \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$
$$- \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cdot k \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \tfrac{1}{2}\,d\,[\xi f(\xi^2)\sqrt{R(\xi)}],$$

wo $R(\xi) = (1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)$, und wo mit C_1, l, k Constante mit $f(\xi^2)$ eine rationale Function von ξ^2 bezeichnet sind, welche sich nach den allgemein gültigen Regeln berechnen lassen, und für die sich dann folgende Werthe ergeben:

---

[1]) Vergl. Königsberger: De motu puncti versus duo fixa centra attracti, Inaugural-Dissertation, Berlin 1860 und dessen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. I, p. 275, Leipzig 1874.

Digitized by Google

$$(13)\quad C_1 = \sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4},\quad l = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta),$$

$$k = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta),\quad f(\xi^2) = -\tfrac{1}{2}\frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{\xi^2-\tau^2}.$$

Statt τ führen wir eine Constante ω, statt ξ eine Variable u ein mittelst der Substitutionen

$$(14)\qquad \tau = \operatorname{sn}(\omega + iK') = \frac{1}{\varkappa \operatorname{sn}\omega},\quad \xi = \operatorname{sn} u$$

dann wird auf der rechten Seite von (12):

$$\int_0^\xi \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\xi^2-\tau^2)\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi = -\frac{1}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\int_0^u \frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\operatorname{sn}^2 u}\,du$$

$$(15)\quad = -\frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\int_0^u du - \frac{1}{\varkappa}\int_0^u \frac{\varkappa^2\operatorname{sn}\omega\cdot\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}\,du$$

$$= -\frac{1}{\varkappa}\Pi(u,\omega) - \frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\cdot u.$$

Analoge Umformungen nehmen wir mit dem zweiten Integrale vor, das sich auf die Variable q bezieht, und finden

$$(16)\quad \int_0^\eta \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\eta^2-\tau^2)\sqrt{R(\eta)}}\,d\eta = -\frac{1}{\varkappa}\Pi(v,\omega) - \frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\cdot v,$$

wo

$$(17)\qquad q = \frac{\eta^2\alpha-\beta}{\eta^2-\tau^2},\quad \eta = \operatorname{sn} v.$$

Für das zweite Glied der rechten Seite von (12) erhalten wir nach (4):

$$(18)\qquad \varkappa^2\int_0^\xi \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \int_0^\xi \varkappa^2\operatorname{sn}^2\xi\,d\xi = -Z(u) + \frac{J}{K}u.$$

Sei endlich $p_0 = \frac{\beta}{\tau^2} = \beta\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, so ergibt sich aus (12), (15) und (18):

Digitized by Google

$$\int_{p_0}^{p} \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}}\,\Pi(u,\omega) - \tfrac{1}{4}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,Z(u)$$

$$-\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}}\,\frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega} - \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\frac{J}{K} - \tfrac{1}{2}\varkappa^2(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\right]u$$

$$+\tfrac{1}{4}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\operatorname{sn}^2 u}\,\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega$$

$$= B\,\Pi(u,\omega) + C\,u + D\left[\frac{\varkappa^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{sn}^2\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u} - Z(u)\right],$$

wo B, C, D zur Abkürzung für die betreffenden Coëfficienten eingesetzt ist. Der Factor von D kann mit Hülfe der Additionstheoreme für Integrale zweiter Gattung, d. h. mit Hülfe der Formel

$$Z(u) - \tfrac{1}{2}Z(u+\omega) - \tfrac{1}{2}Z(u-\omega) = \frac{\varkappa^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{sn}^2\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega}$$

vereinfacht wurden; so erhalten wir:

$$(19)\qquad \int_{p_0}^{p} \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = B\,\Pi(u,\omega) + C\,u - \frac{D}{2}\left[Z(u+\omega) + Z(u-\omega)\right].$$

Ebenso ist:

$$(20)\qquad \int_{q_0}^{q} \frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} = B\,\Pi(v,\omega) + C\,v - \frac{D}{2}\left[Z(v+\omega) + Z(v-\omega)\right].$$

Setzen wir also noch

$$w_0 = \varepsilon\,w - \int_0^{p_0} \frac{dp}{\sqrt{P}} - \int_0^{q_0} \frac{dq}{\sqrt{Q}}$$

$$(20\text{a})\qquad w_1 = w' - \int_0^{p_0} \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} - \int_0^{q_0} \frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} - C\,(u+v),$$

so gehen die Gleichungen (9) über in

$$(21)\qquad u + v = w_0$$

Digitized by Google

$$(21\,\mathrm{a})\quad B[\Pi(u,\omega)+\Pi(v,\omega)]-\tfrac{1}{2}D[Z(u+\omega)+Z(v+\omega)+Z(u-\omega)+Z(v-\omega)]=w_1.$$

Eine weitere Anwendung der Additionstheoreme (6) und (7) gibt endlich der Gleichung (21a) die Form:

$$(22)\qquad \frac{B}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{sn}\,(w_0-\omega)}{1+\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{sn}\,(w_0+\omega)}$$

$$-\frac{\varkappa^2 D}{2}[\mathrm{sn}\,(u+\omega)\,\mathrm{sn}\,(v-\omega)+\mathrm{sn}\,(u-\omega)\,\mathrm{sn}\,(v+\omega)]\,\mathrm{sn}\,w_0$$

$$=w_1-A\,\Pi(w_0,\omega)+D\,Z(w_0).$$

Andererseits kann man in die Gleichung (21a) mittelst (3) und (4) die Θ-Functionen einführen und findet dann:

$$(23)\qquad A\cdot\Omega+\frac{D}{2}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega}=w_1-A\,w_0,$$

wo zur Abkürzung

$$(24)\qquad \Omega=\log\frac{\Theta(u-\omega)\,\Theta(v-\omega)}{\Theta(u+\omega)\,\Theta(v+\omega)}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass sich in (23) die Differentiation nach ω nur auf die Argumente der Θ-Functionen bezieht, während ja thatsächlich auch der Modul $\varkappa^2$ dieser Functionen nach (11a) und (14) von ω abhängig ist. In (22), bez. (23) ist uns diejenige transscendente Gleichung gegeben, von welcher im vorliegenden Falle die Lösung des Umkehrproblems abhängt. Eine weitere Behandlung derselben in der vorliegenden Form würde Schwierigkeiten bieten; es dürfte deshalb von Interesse sein, dass sich durch Untersuchung der mechanischen Bedeutung der vorgelegten Gleichungen (9) die gefundene transscendente Gleichung auf die bei der Planetenbewegung auftretende Kepler'sche Gleichung reduciren lässt.

Digitized by Google

§ 3. Reduction des aufgestellten Umkehrproblems auf die Kepler'sche Gleichung.

Ein Punkt von der Masse 1 wurde von zwei festen Centren mit den Massen m und m' nach dem Newton'schen Gesetze angezogen; die Bewegung des Punktes ist schon von Euler und Lagrange bestimmt; Jacobi behandelt das Problem mittelst der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung. Die anziehenden Punkte mögen auf der X-Axe in der Entfernung f zu beiden Seiten des Anfangspunktes liegen, und zwar in den gemeinschaftlichen Brennpunkten eines Systems confocaler Kegelschnitte

$$(25)\qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{z^2}{b^2-\lambda}-1=0,\quad \frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{z^2}{b^2-\mu}-1=0,$$

wo $-\infty<\lambda<b^2$, $b^2<\mu<a^2$. Mittelst der Formeln

$$(26)\qquad x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2},\quad z^2=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{b^2-a^2},$$

wo $f^2=a^2-b^2$, werden elliptische Coordinaten eingeführt, und es werde

$$(27)\qquad \sqrt{a^2-\lambda}=p,\qquad \sqrt{a^2-\mu}=q$$

gesetzt; dann ist die Hamilton'sche charakteristische Function

$$W=\int dp\sqrt{\frac{hp^2+(m-m')p+2k-hb^2}{p^2-f^2}}$$
$$+\int dq\sqrt{\frac{hq^2+(m+m')q+2k-hb^2}{q^2-f^2}},$$

und die Integralgleichungen des Problems werden

$$(28)\qquad k'=\frac{\partial W}{\partial k},\quad t-t_0=\frac{\partial W}{\partial h}.$$

In jeder der beiden letzten Gleichungen kommen elliptische Integrale mit verschiedenem Modul vor; lassen wir aber die

Digitized by Google

Masse m' gleich Null werden,[1]) so sind beide Modulen einander gleich, und die Gleichungen (28) werden mit den Gleichungen (9) des in § 2 behandelten Umkehrproblems identisch. Um die Identität herzustellen, hat man nur zu setzen:

$$(29)\quad \begin{aligned} &A(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta) = (hp^2+mp+2k-hb^2)(p^2-f^2),\\ &A(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta) = (hq^2+mq+2k-hb^2)(q^2-f^2),\\ &k' = w + k_0, \quad t - t_0 = \tfrac{1}{2}(w' + k_0') - b^2(w + k_0). \end{aligned}$$

Dabei sind die Constanten k_0 und k_0' so bestimmt zu denken, dass die Coordinaten eines beliebigen Anfangspunktes der Bewegung (für die Zeit $t = t_0$) in den unteren Grenzen der Integrale auftreten.

Die Bewegung unseres Punktes erfolgt jetzt bekanntlich nach den Kepler'schen Gesetzen; die Bestimmung des Ortes als Function der Zeit, d. h. der oberen Grenzen p, q als Functionen von w und w' geschieht insbesondere durch die sogenannte Kepler'sche Gleichung

$$(30)\qquad t_1 = \sqrt{\frac{a_1^3}{m}}\,(\Phi - e\sin\Phi),$$

deren Lösung in bekannter Weise durch Anwendung der Lagrange'schen Formel oder durch Entwicklung von $\sin\Phi$ nach Bessel'schen Functionen von e und in eine trigonometrische Reihe nach den Sinus der vielfachen von t_1 geschieht. In (30) bedeutet t_1 die Zeit, e die Excentricität der elliptisch gedachten Bahn, a_1 ihre halbe grosse Axe, Φ die excentrische Anomalie, endlich m die Masse der Sonne. Auf diese Keplersche Gleichung muss sich daher das in den Gleichungen (9), bez. (21) vorgelegte Umkehrproblem aus der

[1]) Mit dem Falle $m = 0$ beschäftigt sich zu wesentlich anderen Zwecken auch Scheibner (Notiz über das Problem der drei Körper, Bericht der kgl. sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Classe, 1866); insbesondere geht derselbe auf die Einführung elliptischer Functionen nicht ein.

Digitized by Google

Theorie der elliptischen Integrale und somit auch die transscendente Gleichung (22), bez. (23) reduciren lassen.

Aus dem ersten Kepler'schen Gesetze folgt ferner: Die erste Gleichung (9) bez. (21) stellt in elliptischen Coordinaten λ, μ, die durch (26) und (27) einzuführen sind, einen Kegelschnitt dar, dessen einer Brennpunkt im Punkte m, d. h. im Punkte $x = -f = -\sqrt{a^2 - b^2}$, $z = 0$ sich befindet.

Von welcher Art dieser Kegelschnitt ist, lässt sich nach den allgemeinen Bemerkungen Königsberger's beurtheilen.[1]) Andererseits ist nach der Theorie der Planeten-Bewegung die Bahn eine Ellipse oder eine Hyperbel je nachdem

$$(31) \qquad 2h = v_0^2 - \frac{2m}{r_0} = v_0^2 - \frac{2m}{p_0 + q_0}$$

< 0 oder > 0 ist, wenn v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, r_0 die anfängliche Entfernung des Punktes vom anziehenden Centrum, p_0 und q_0 die Coordinaten der Anfangslage bezeichnen. Der Fall $h = 0$ gibt die Parabel.

§ 4. Durchführung der Transformation unserer transscendenten Gleichung.

Nachdem wir durch die mechanischen Ueberlegungen in § 3 erkannt haben, dass sich die transscendente Gleichung (22) bez. (23) auf die einfache Kepler'sche Form, die in (30) vorliegt, bringen lassen muss, erübrigt nur noch, diese Umformung wirklich durchzuführen.

---

[1]) Vgl. dessen oben citirte Dissertation, in welcher für den Fall $m' \gtrless 0$ die Integralgleichungen des fraglichen dynamischen Problems (für den Fall der Bewegung im Raume) durch Einführung elliptischer Θ-Functionen umgeformt werden. Weitere Vereinfachungen können (wie aus unseren Formeln hervorgeht) durch Benutzung der Additionstheoreme für Integrale zweiter und dritter Gattung erzielt werden.

Digitized by Google

Zu dem Zwecke ziehen wir die in (21) vorkommenden Integrale zweiter Gattung in anderer Weise zusammen, als es bei Ableitung von (22) geschehen ist. Nach (7) haben wir

$$(32)\quad Z(u+\omega)+Z(v+\omega)+Z(u-\omega)+Z(v-\omega)$$
$$=Z(u+v+2\omega)+\varkappa^2\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(v+\omega)\operatorname{sn}(u+v+2\omega)$$
$$+Z(u+v-2\omega)+\varkappa^2\operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(v-\omega)\operatorname{sn}(u+v-2\omega).$$

Nach dem Additionstheoreme für sinam ist ferner:

$$(33)\quad \begin{aligned}\operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(v+\omega)&=\frac{\operatorname{sn}^2\vartheta-\operatorname{sn}^2\sigma}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta}\\ \operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(v-\omega)&=\frac{\operatorname{sn}^2\vartheta'-\operatorname{sn}^2\sigma}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'},\end{aligned}$$

wo $\quad \sigma=\frac{u-v}{2},\quad \vartheta=\frac{u+v}{2}+\omega,\quad \vartheta'=\frac{u+v}{2}-\omega.$

Das Argument des in (22) auftretenden Logarithmus ist nach Jacobi[1]) gleich

$$(34)\quad \frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta}\cdot\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}\operatorname{sn}^2\vartheta}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}\operatorname{sn}^2\vartheta'}.$$

Der Logarithmus des zweiten Factors gibt eine additive Constante, deren Werth durch $w_0=u+v$ bestimmt ist; es kommt also nur auf den ersten Factor an. Wir setzen

$$(35)\quad L\cdot\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta}=e^{\Phi i},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ und L eine zu bestimmende Constante bedeutet. Die Auflösung von (35) ergibt

$$\operatorname{sn}^2\sigma=\frac{L-e^{\Phi i}}{L\sin^2\vartheta'-e^{\Phi i}\sin^2\vartheta}$$

---

[1]) Vgl. dessen Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, § 54; Gesammelte Werke, Bd. 1, p. 211.

Digitized by Google

Diesen Werth führen wir mittelst (33) in die rechte Seite von (32) ein. Seien für den Augenblick die Buchstaben M, N, R, R' durch die Gleichungen

$$M = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \vartheta', \quad N = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \vartheta,$$

$$(36) \quad R = \frac{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 w_0 \operatorname{sn}^2 2\omega}, \quad R' = \frac{\operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 w_0 \operatorname{sn}^2 2\omega}$$

definirt, so wird auf dieser rechten Seite

$$(37) \quad \operatorname{sn}(u+\omega) \operatorname{sn}(v+\omega) \operatorname{sn} 2\vartheta + \operatorname{sn}(u-\omega) \operatorname{sn}(v-\omega) \operatorname{sn} 2\vartheta'$$

$$= \frac{R+R'}{\varkappa^2 L(M-N)} \left[2L(MN-\varkappa^2) - (N^2-\varkappa^2) e^{\Phi i} - L^2(M^2-\varkappa^2) e^{-\Phi i}\right]$$

$$+ \frac{R-R'}{\varkappa^2 L(M-N)} \left[\qquad\qquad -(N^2-\varkappa^2) e^{\Phi i} + L^2(M^2-\varkappa^2) e^{-\Phi i}\right].$$

Um nun die rechte Seite in eine Function von $\sin \Phi = \frac{1}{2i}(e^{\Phi i} - e^{-\Phi i})$ zu verwandeln, müssen wir die noch nicht bestimmte Grösse L durch die Gleichung

$$(38) \quad L^2 = -\frac{R}{R'} \frac{N^2-\varkappa^2}{M^2-\varkappa^2} = -\frac{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}{\operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0} \left(\frac{\operatorname{cn} \vartheta}{\operatorname{cn} \vartheta'}\right)^2$$

bestimmen. Der Ausdruck (37) wird dann in Rücksicht auf die Relation

$$\frac{N-M}{\varkappa^2 - MN} = \frac{1}{\varkappa^2} \frac{\operatorname{sn}^2 \vartheta - \operatorname{sn}^2 \vartheta'}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \vartheta \operatorname{sn}^2 \vartheta'},$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2} \operatorname{sn}(\vartheta + \vartheta') \operatorname{sn}(\vartheta - \vartheta') = \frac{1}{\varkappa^2} \operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega,$$

gleich

$$(39) \quad \frac{\operatorname{sn}(w_0 + 2\omega)}{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega} + \frac{2 \operatorname{cn} \vartheta \cdot \operatorname{cn} \vartheta'}{\varkappa^2 (\operatorname{sn}^2 \vartheta' - \operatorname{sn}^2 \vartheta)} \cdot \Omega_0 \cdot \sin \Phi,$$

wo $\quad \Omega_0 = \sqrt{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}.$

Setzt man den so umgeformten Ausdruck (37) in (32) ein und substituirt die betreffende Summe von Integralen zweiter Gattung wieder in die Gleichung (21) bez. (22), so geht die letztere, unter Berücksichtigung von (34), über in

Digitized by Google

$$\frac{B}{2}\Phi i - D\frac{\operatorname{cn}\vartheta\cdot\operatorname{cn}\vartheta'}{\operatorname{sn}^2\vartheta'-\operatorname{sn}^2\vartheta}\cdot\Omega_0\cdot\sin\Phi$$

$$(40)\qquad = w_1 - BH(w_0,\omega) + \frac{B}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\vartheta\,\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\vartheta'\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}}$$

$$+\frac{D}{2}\left[Z(2\vartheta)+Z(2\vartheta')+\varkappa^2\frac{\operatorname{sn}(w_0+2\omega)}{\operatorname{sn}w_0\cdot\operatorname{sn}2\omega}\right].$$

Hierin sind die Werthe von B und D aus (19) einzuführen, während ω durch (14) bestimmt ist, und nach (29) ist $A = h$, d. h. gleich der Constanten aus dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Man findet

$$(41)\qquad B = -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}} = \frac{mf^2}{2\varkappa\sqrt{h^3}}.$$

Da bei der elliptischen Bewegung h negativ ist, so wird in der That in (40) die Constante iB reell.

Die Auflösung des in den Gleichungen (9) bis (21) vorliegenden Umkehrproblems geschieht jetzt in der Weise, dass man die Grösse Φ aus (41) bez. (30) berechnet, darauf $\operatorname{sinam}\frac{u-v}{2}$ und damit $u-v$ aus (35) bestimmt, wodurch dann die Integrale u und v, deren Summe gleich w_0 gegeben ist, einzeln und folglich auch ihre oberen Grenzen bekannt sind.

§ 5. Einige geometrische Folgerungen.

Wie in § 3 bemerkt wurde, stellt die erste der Gleichungen (9) bez. (21) einen Kegelschnitt dar, dessen einer Brennpunkt an der Stelle $x = -f$, $z = 0$ liegt. Es entsteht also die Aufgabe, den Mittelpunkt und die grosse Axe dieses Kegelschnittes zu bestimmen; dieselbe ist durch die in § 4 ausgeführte Transformation bereits gelöst.

Digitized by Google

Die Gleichungen (30) und (41) müssen mit einander identisch sein. Nach (20a) unterscheidet sich w' von w_1 nur um eine additive Constante, nach (28) und (29) ist daher

$$w_1 = 2\,t + \text{Constante}.$$

Durch Vergleichung von (30) und (41) findet man daher die halbe grosse Axe a_1 der Bahncurve bestimmt durch

$$(42) \qquad \sqrt{\frac{a_1^3}{m}} = -\frac{Bi}{4} = \frac{m\,f^2}{\varkappa\sqrt{-h^3}};$$

und für die numerische Excentricität e ergibt sich die Gleichung:

$$(43) \qquad e\sqrt{\frac{a_1^3}{m}} = -\tfrac{1}{2}\,D\,\Omega_0\,\frac{\operatorname{cn}\vartheta\cdot\operatorname{cn}\vartheta'}{\operatorname{sn}^2\vartheta' - \operatorname{sn}^2\vartheta},$$

wo $\vartheta = \frac{w_0}{2} + \omega$, $\vartheta' = \frac{w_0}{2} - \omega$. Es erübrigt noch, die Richtung der grossen Axe zu bestimmen.

Der durch (37) und (39) definirte Winkel Φ ist mit der excentrischen Anomalie identisch.[1]) Die Werthe $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$ geben also die Endpunkte der grossen Axe; die elliptischen Coordinaten der letzteren Punkte werden demnach aus der Gleichung (35) gewonnen. Für $\Phi = 0$ ergibt sich z. B., wenn $\sigma_0 = \left(\frac{u-v}{2}\right)_0$ gesetzt wird, die Relation

$$\operatorname{sn}^2\sigma_0 = \frac{1}{\varkappa^2}\,\frac{L-1}{\operatorname{sn}^2\vartheta - \operatorname{sn}^2\vartheta'},$$

wo L durch (38) gegeben ist. Für eine Parabel wird nach (31) $h = 0$, also nach (29) $\gamma = \infty$, also nach (10) $\tau = t$, also nach (14) $\omega = K + i\,K'$, also

---

[1]) Auch von Gylden ist die Planetenbewegung mittelst elliptischer Functionen behandelt worden, worauf mich Herr College Seeliger aufmerksam macht (Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft, Jahrg. X, 1875). Die Einführung dieser Functionen geschieht, indem die halbe excentrische Anomalie direct gleich der Amplitude eines elliptischen Integrals gesetzt wird.

Digitized by Google

$$\operatorname{sn}\vartheta = \operatorname{sn}\left(\frac{w_0}{2} + \omega\right) = \operatorname{sn}\left(\frac{w_0}{2} - \omega\right) = \operatorname{sn}\vartheta',$$

und somit nach (43) $e = \infty$, wie es sein muss; es wird zwar $\Omega_0 = 0$, aber $D = \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)$ wird auch unendlich gross.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, wo auch $m = 0$ wird. Dann muss nach dem Frägheitsgesetze die Bewegung in einer geraden Linie erfolgen. Die erste Gleichung (9) stellt also jetzt eine gerade Linie dar;[1]) in ihr ist nach (29):

$$P = (p^2 - f^2)(hp^2 + 2k - hb^2), \quad Q = (q^2 - f^2)(hq^2 + 2k - hb^2).$$

Aendert man die Constanten h, k, m und setzt

$$P_1 = (p^2 - f^2)(h_1 p^2 + m_1 p + 2k_1 - h_1 b^2),$$
$$Q_1 = (q^2 - f^2)(h_1 q^2 + m_1 q + 2k_1 - h_1 b^2),$$

so stellen die beiden Gleichungen

$$(43) \qquad \begin{aligned} \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q}} &= c \\ \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P_1}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q_1}} &= c' \end{aligned}$$

zwei Kegelschnitte dar. Die beiden Curven haben einen gemeinsamen Brennpunkt an der Stelle $x = -f$, $z = 0$. Soll der andere Brennpunkt in gleicher Weise benutzt werden, so muss man in W (§ 3) $m = 0$, $m' = 1$ setzen; es kommt dies darauf heraus, dass p durch $-p$ ersetzt wird, was den Werth von $\lambda = a^2 - p^2$ nicht beeinflusst. Führt man dann $\pi = -p$ als neue Variable ein, so tritt in (43) an Stelle der Summe die Differenz der Integrale erster Gattung auf. Erscheint in (43) einmal die Summe und einmal die Differenz, so liegt der eine Brennpunkt des ersten Kegelschnittes an der Stelle $x = -f$,

[1]) Wie schon Jacobi bei anderer Gelegenheit bemerkt: Vorlesungen über Dynamik, 30. Vorlesung.

Digitized by Google

$z = 0$, der eine Brennpunkt des zweiten Kegelschnittes an der Stelle $x = f$, $z = 0$.

In den ersten beiden Fällen sind zwei gemeinsame Tangenten der beiden Kegelschnitte (43) bekannt, die Bestimmung ihrer Schnittpunkte geschieht also mittelst quadratischer Gleichungen; im andern Falle ist zu diesem Zwecke eine Gleichung vierten Grades nöthig. Die elliptischen Coordinaten der vier Schnittpunkte genügen den beiden Gleichungen (43). Durch unsere geometrische Interpretation ist also die Lösung des durch die Gleichungen (43) dargestellten Umkehrproblems gegeben; und zwar sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Es sind zwei Summen oder zwei Differenzen von Integralen erster Gattung gegeben; die Lösung wird auf quadratische Gleichungen zurückgeführt;

2) es ist eine Summe und eine Differenz von Integralen erster Gattung gegeben; die Lösung erfordert eine biquadratische Gleichung;

3) $m = 0$ oder $m_1 = 0$; es ist ein Kegelschnitt mit einer geraden Linie zu schneiden;

4) $m = 0$ und $m_1 = 0$; es sind zwei gerade Linien zum Schnitt zu bringen.

Während man sonst mit Hülfe des Additionstheorems bez. des Abel'schen Theorems nur solche transscendente Relationen mit algebraischen in Beziehung bringt, bei denen es sich um elliptische Integrale mit gleichem Modul handelt, liegt hier ein ähnliches Resultat für elliptische Integrale mit verschiedenem Modul vor;[1]) die betreffenden Differentiale haben **zwei** singuläre Stellen gemeinschaftlich.

Statt der elliptischen Coordinaten hätten wir uns bei vorstehenden Ueberlegungen auch der bipolaren Coordinaten bedienen können, d. h. der Entfernungen des bewegten Punktes

[1]) Es liegt nahe, solche Betrachtungen auf Abel'sche Integrale auszudehnen, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

Digitized by Google

von den beiden festen Centren;[1]) in der That wird dadurch unser Problem in der gleichen Weise auf elliptische Integrale zurückgeführt.

§ 6. Ein besonderer Fall.

Stillschweigend wurde im Vorstehenden vorausgesetzt, dass die Wurzeln der Gleichungen $P = 0$ und $Q = 0$ von einander verschieden seien. Da f nothwendig von Null verschieden ist, so kann nach (29) entweder eine Wurzel der Gleichung

$$h p^2 + m p + 2 k - h b^2 = 0$$

gleich f werden, oder es können die beiden Wurzeln der letzteren Gleichung zusammenfallen. Je nach dem Intervalle, in welches diese Doppelwurzel dann fällt (nemlich $\lambda < b^2$ oder $b^2 < \mu < a^2$, d. h. $p^2 = a^2 - \lambda > a^2 - b^2$ oder $0 < q^2 = a^2 - \mu < a^2 - b^2$) wird das eine oder das andere der in den Gleichungen (9) vorkommenden Integrale unendlich gross; die Gleichungen können daher nur dadurch einen Sinn behalten, dass $d p = 0$ (bez. $d q = 0$) d. h. $p =$ const. (oder $q =$ const.) wird; die Bewegung findet in einer Ellipse (bez. Hyperbel) des ursprünglich angenommenen und durch (25) dargestellten confocalen Systems statt. Ist insbesondere f eine Doppelwurzel von $P = 0$, so werden beide Integrale von (9) unendlich gross, und es muss zugleich $p =$ const. und $q =$ const. $= f$, d. h. $\lambda = \mu = a^2 - b^2$ werden; die Bewegung geschieht in der X-Axe.

Will man auch hier die weitere Behandlung in elliptischen Coordinaten durchführen, so ist nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft, wenn wir uns auf die elliptische Bahncurve beschränken und etwa $\lambda = 0$, also $p = a$ wählen:

---

[1]) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 1. Aufl. p. 197. Jacobi behandelt auch die Planetenbewegung mit diesem Coordinatensysteme, legt dabei aber den einen festen Punkt auf die Bahn des Planeten, während der andere mit der Sonne zusammenfällt.

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{8}\,\frac{\lambda-\mu}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$$

$$= U + h = \frac{m}{\mu-\lambda}\left[\sqrt{a^2-\mu} - \sqrt{a^2-\lambda}\right] + h,$$

wo nun $\lambda = 0$ zu nehmen ist, oder:

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\,\frac{(q^2-a^2)\,dq}{\sqrt{f^2-q^2}\,\sqrt{h(a^2-q^2)+m(q-a)}} = dt$$

Bei der Planetenbewegung auf der Ellipse $\lambda = 0$ ist aber immer $h = \frac{m}{2a}$, wenn die Sonne im Brennpunkte $x = -f$, $y = 0$ steht; das zweite Radical im Nenner der linken Seite hat daher zwei einander gleiche Wurzeln (nemlich beide gleich a) und wir finden

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{m}}\,\frac{q+a}{\sqrt{f^2-q^2}}\,dq.$$

Von hier geht man leicht zu den bekannten Formeln über.

Digitized by Google

Die Resultate der Feldspathstudien.

Von **Eugraph v. Fedorow.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

In verschiedenen Wissenschaftszweigen kommt es nicht so selten vor, dass man in dem letzten Stadium einer immer intensiveren Erforschung zu den in dem primitiven Stadium vorherrschenden Auffassungen ganz analogen Schlüssen kommt.

So ist es z. B. mit der Theorie der Krystallstructur geschehen. Der berühmte Hauy hat in die Wissenschaft den Begriff der primitiven Form eingeführt, welcher aber infolge einer dürftigen Erfahrung und damit verbundener Willkür in der Deutung dieses Begriffes nicht fortbestehen konnte und infolge der intensiveren Erforschung von Delafosse und von Bravais und Frankenheim fallen musste.

In den letzten Jahrzehnten aber ist man endlich, auf Grund des von dem unvergesslichen L. Sohncke angebahnten und von dem Verfasser weiter verfolgtem Wege eines noch intensiveren Studiums, dazu gekommen, nach bestimmten, experimentell nachzuweisenden Merkmalen Schlüsse über die räumliche Lage der Punkte und über die jedem solchen zugehörenden Raumeinheiten ziehen zu können. Dementsprechend kam wieder der früher ganz verlassene Begriff der Hauptstructurrichtungen und Hauptstructurflächen zur Geltung. Die ersten sind nämlich die die Centralpunkte zweier nächster Raumeinheiten verbindenden Geraden. Die letzteren sind die je zweien solchen Richtungen parallelen Ebenen.

In der allerletzten Zeit gelang es dem Verfasser, auf äusserst einfache Weise die Hauptstructurflächen auf experimentellem Wege (wenigstens für Laboratoriums-Krystalle) bestimmen zu können. Dazu erwies sich als ganz genügend,

Digitized by Google

eine gesättigte Lösung der betreffenden Substanz zwischen Object- und Deckglas möglichst langsam krystallisiren zu lassen (zu welchem Zwecke in der Mitte des Deckglases ein kleines Loch angebohrt wird). In der sehr dünnen Schicht zwischen beiden Gläsern bilden sich dann von selbst ausgezeichnet schön auskrystallisirende Tafeln der Substanz, und die Endflächen dieser Tafeln stellen ganz genau die ihr zugehörenden Hauptstructurflächen dar. Diese Tafeln bilden zugleich ausgezeichnete Präparate für die optische Untersuchung nach der Universalmethode und lassen sich mit all' demjenigen Grad der Genauigkeit bestimmen, welche überhaupt durch diese Methode erreicht werden kann.

Es sei mir erlaubt, hier sogleich zu erwähnen, dass diese Präparate am geeignetesten dazu sind, die Syngonieart sofort und unzweifelhaft zu bestimmen.

Jedenfalls ist jetzt für uns der Begriff einer Hauptstructurfläche nicht mehr ein leeres Wort, und die Willkür bei dem Gebrauche dieses Wortes für gut untersuchte Krystalle besteht nicht mehr resp. ist auf die engsten Grenzen beschränkt.

Etwas ganz Analoges ist aber auch mit den Feldspathstudien geschehen.

Zuerst wurden verschiedene Typen der Feldspathe angenommen, wie Orthoklas resp. Adular, dann Albit, Oligoklas, Labradorit und Anorthit; später kam dazu noch der Bytownit; anfänglich waren dies ganz abgesonderte Mineralienspecies gewesen. Später aber, besonders durch die bahnbrechenden Arbeiten von Tschermak und Max Schuster, wurde ganz genau festgestellt, dass die Kalknatronfeldspathe — durch den Gattungsnamen Plagioklase in eine Gruppe vereinigt — eigentlich eine ununterbrochene Reihe bilden, wenigstens durch zahlreiche Mittelglieder in der Natur vertreten sind.

Viele Mühe ward darauf verwendet, eine möglichst grosse Anzahl verschiedener Glieder dieser Reihe aufzustellen und auf optischem Wege möglichst genau zu characterisieren. Diese Arbeit wurde gleichzeitig von einer Reihe namhafter Specialisten durchgeführt, bis endlich es sich als möglich erwies, die opti-

Digitized by Google

schen Eigenschaften dieser Reihe wirklich durch eine, wenn auch nur annähernd richtige, Curve darzustellen. Die nähere Betrachtung dieser Curve hat aber ganz bestimmt und unzweifelhaft zu dem Schlusse geführt, dass wir in dieser Reihe nicht eine einheitliche, sondern eine zusammengesetzte Curve vor uns haben. Man kann es sogar als constatirt gelten lassen, dass die Curve eigentlich aus vier Theilcurven besteht, und dass die gemeinschaftlichen Punkte dieser Curven ganz bestimmten Plagioklastypen entsprechen, und zwar gerade denjenigen, welche als solche in dem ersten Stadium der Feldspathstudien auftraten, d. h. Albit, Oligoklas, Labradorit, Bytownit und Anorthit, denen also resp. die Mischungsverhältnisse $1\,Ab + 0\,An$, $3\,Ab + 1\,An$, $1\,Ab + 1\,An$, $1\,Ab + 3\,An$, und $0\,Ab + 1\,An$ zukommen würden. Dieses Resultat ist aber nicht etwa auf einzelne, sondern auf hunderte einzelne Beobachtungen gegründet.

Als Grundlage dazu dienen die massenhaft ausgeführten neueren optischen Bestimmungen der Feldspathe des Bogoslowskschen Bergreviers durch den Verfasser. Auch wurden verschiedene frühere vollständige Bestimmungen herangezogen.

Die graphische Darstellung der Resultate geschah auf folgendem Wege: Für sämmtliche einzelne Beobachtungen wurden als Coordinatenaxen die Axen des optischen Ellipsoides des betreffenden Gliedes angenommen, und dann wurden die sphärischen Coordinaten des Poles der Fläche (010) und der Verticalaxe (früherer Aufstellungsart) ermittelt und auf dem stereographischen Netze angezeichnet. In Folge dessen traten die einzelnen Beobachtungen auf der Zeichnung als Punkte auf, und diese Punkte bestimmten eine mittlere Curve für jede dieser beiden krystallographischen Richtungen. Diese beiden Curven sind genügend, um die vollständige krystallographische Orientirung des betreffenden Gliedes zu erhalten. Ein einer dieser beiden Curven angehörender Punkt ist genau von dem entsprechenden Punkte der zweiten Curve um 90° entfernt.

Auf welche Weise können wir uns nun über die Einheitlichkeit resp. Zusammensetzung der Theilcurven ein Urtheil verschaffen? Ich bediente mich folgender Methode:

Digitized by Google

Gelingt es einmal auf der Sphäre einen Pol aufzufinden, welchem eine gleiche krystallographische und eine gleiche optische Bedeutung zugleich für zwei Endgliedern einer isomorphen Theilreihe zukommt, so muss dieser Pol (wenigstens sehr annähernd) diese zweifache Bedeutung für sämmtliche Mittelglieder dieser Reihe beibehalten. Diesem Pol gehören also zugleich dieselben optischen und dieselben krystallographischen Coordinaten für sämmtliche Glieder der Reihe an. Für diese Theilreihe ist also die entsprechende Richtung constant und kann als eine Drehungsaxe angenommen werden. Dementsprechend mussten dann die Theilcurven Kleinkreise sein, deren Centrum auf der Sphäre der betreffende Polpunkt der Drehaxe ist. Auf diesem Wege können wir also diese constanten Punkte für eine isomorphe Reihe auf graphischem Wege ermitteln. Ich habe dies ausgeführt, und für die Theilreihen 0—25, 25—50, 50—75 drei verschieden constante Punkte erhalten. Nur für die Theilcurve 75—100 erhalten wir auf der Sphäre eine so geringe Länge, dass es unpraktisch erscheint, den entsprechenden constanten Punkt zu ermitteln, wenn er natürlich auch ein bestimmter sein muss.

Sind einmal die constanten Punkte für die Theilcurven ermittelt, so kann man die Curven selbst auf graphischem Wege erhalten. Nun sieht man, dass die so construirten theoretischen Curven (also Kleinkreise) den unmittelbar aus den Beobachtungen ermittelten Curven so nahe stehen, dass wirklich die letzteren als einheitliche aufgefasst werden können. Wahrscheinlich nähern sich die theoretischen Curven noch mehr der Wahrheit, als die direct aufgezeichneten Mittelcurven.

Im Grossen und Ganzen nähern sich alle vier Theilcurven einem Kreise; natürlich müsste aber, wenn man diesen annehmen wollte, keine Rücksicht auf irgend einen Genauigkeitsgrad genommen werden. Man kann diesen Umstand in der Weise deuten, dass, wenn auch die Mittelglieder der Plagioklasreihe verschiedenen Theilreihen angehören, doch infolge unbedeutender chemischer Action zwischen den Molekeln, die ganze Reihe in erster Linie als eine annähernd isomorphe zu betrachten ist.

Digitized by Google

Zur Theorie des Doppel-Integrals.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 15. Januar*)

Nachdem Riemann, den Cauchy-Dirichlet'schen Integral-Begriff wesentlich erweiternd, die Grundlage für die moderne Theorie des einfachen bestimmten Integrales geschaffen hatte, lag es nahe, auch den Begriff des mehrfachen, insbesondere des Doppel-Integrales in analoger Weise zu vervollkommnen. Die Verallgemeinerung der betreffenden Definitionen und Existenzbeweise bot, zumal mit Benützung der seit Ausbildung der Cantor'schen Mengenlehre gewonnenen schärferen Begriffs-Bestimmungen, keine besonderen Schwierigkeiten. Dagegen ergaben sich solche bei der Formulirung und beim Beweise desjenigen Fundamental-Satzes, welcher von der Reduction eines Doppel-Integrales auf ein iterirtes Integral, d. h. von der Berechnung eines Doppel-Integrales mit Hülfe von zwei successive auszuführenden einfachen Integrationen handelt, da die Existenz des über eine gewisse Fläche erstreckten Doppel-Integrals $\int\int f(x,y)\cdot dx\cdot dy$ keineswegs diejenige der einfachen Integrale $\int f(x,y)\cdot dx$, $\int f(x,y)\,dy$ bei constantem y bezw. x praejudicirt. Hiernach entsteht also vor allem die Frage, in wieweit überhaupt der für eine stetige Function $f(x,y)$ geltenden Formel:

Digitized by Google

$$\text{(I)} \qquad \int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dx\cdot dy \begin{cases} = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy \\ = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx \end{cases}$$

eine wohl definirte Bedeutung auch dann noch beigelegt werden kann, wenn $f(x,y)$ nur denjenigen Beschränkungen unterliegt, welche die Existenz des betreffenden Doppel-Integrales nach sich ziehen, und sodann, ob diese letztere auch allemal für die Gültigkeit jener Formel ausreichend erscheint. Diese Fragen wurden wohl zum ersten Male von Du Bois Reymond[1]) in der Hauptsache richtig beantwortet, indem er die fragliche Formel als speciellen Fall eines von ihm aufgestellten allgemeineren Grenzwerth-Satzes auffasst. Allein seine ganze Darstellung ermangelt der nöthigen Präcision und Beweiskraft, da er gewissermaassen mit unendlich vieldeutigen Ausdrücken[2]) wie mit eindeutig definirten operirt.

Derselbe Mangel haftet auch dem directeren Beweise an, welchen Harnack in der deutschen Ausgabe des Serret'schen Lehrbuches der Differential- und Integral-Rechnung[3]) mitgetheilt hat.

Mit Hinzunahme einer gewissen beschränkenden Voraussetzung (nämlich der Existenz des Integrals $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ bezw. $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$ für jedes einzelne in Betracht kommende x bezw. y mit eventuellem Ausschlusse einer unausgedehnten Punktmenge) hat sodann Herr Stolz den Sinn und die Gültigkeit der Formel (I) in durchaus correcter Weise festgestellt.[4])

---

[1]) Ueber das Doppelintegral. Journ. f. Math. Bd. 44 (1883), S. 278. (Ich verdanke die folgenden literarischen Notizen zum Theil einer gelegentlichen Mittheilung des Herrn A. Voss.)

[2]) Als solche kann man doch allenfalls die Integrale von der Form $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ im Falle ihrer Nicht-Existenz auffassen.

[3]) Bd. II[1] (1885), Art. 582.

[4]) Math. Ann. Bd. 26 (1886), S. 43.

Digitized by Google

Eine vollständig befriedigende und allgemeine Lösung der angedeuteten Fragen hat jedoch erst Herr C. Jordan geliefert,[1]) indem er durchweg die auch im Falle der Nicht-Existenz von $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ völlig wohldefinirten und praecisen Begriffe des oberen und unteren Integrals in den Vordergrund stellt.

Bei der einigermaassen abstracten Fassung und ausserordentlich weit getriebenen Allgemeinheit[2]) der Jordan'schen Auseinandersetzungen dürfte vielleicht eine vereinfachte Darstellung der zu einer vollkommen strengen Auffassung und Begründung der Formel (I) dienlichen Betrachtungen nicht überflüssig erscheinen. Die von mir erzielten Vereinfachungen beruhen zum guten Theil auf der Anwendung einer gewissen neuen Bezeichnungsweise, welche mir nicht nur für den vorliegenden Fall, sondern für Fragen aller Art, in denen Unbestimmtheitsgrenzen eine Rolle spielen, äusserst zweckmässig erscheint. Nachdem dieselbe in Art. I erklärt ist, stelle ich zunächst in Art. II—IV diejenigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der einfachen Integrale zusammen, welche für das folgende erforderlich sind. Hieran schliesst sich in Art. V die Definition des Doppel-Integrales und sodann in Art. VI die Erörterung der fraglichen Formel (I), zunächst unter der Annahme constanter Grenzen, also eines rechteckigen Integrations-Bereiches. Ich gebe den Beweis dafür unter zwei verschiedenen Formen, deren erste wie bei Du Bois Reymond auf der Heranziehung eines allgemeinen Grenzwerth-Satzes beruht, während die zweite als eine Complettirung des Harnack'schen Beweises gelten kann. Als Erläuterung für die Tragweite der bewiesenen Formel wende ich dieselbe auf eine Function an, bei welcher die Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ für unend-

---

[1]) Journ. de Math. 4ième série, T. 8 (1892) p. 84, Art. 17. — Cours d'Analyse, 2de éd., T. I p. 42, Art. 56—58.

[2]) Herr Jordan dehnt z. B. den Integral-Begriff auf ganz beliebig gedachte, insbesondere also auch auf unstetige Punkt-Mengen aus.

Digitized by Google

lich viele, überall dicht liegende Werthe von x bezw. y nicht existiren. — In Art. VII folgt schliesslich die Uebertragung der Formel (I) auf den Fall eines krummlinig begrenzten Integrations-Bereiches mit Hülfe einer sehr einfachen Methode, welche zwar sehr nahe zu liegen scheint, aber meines Wissens für den vorliegenden Zweck bisher noch nicht angewendet wurde.

I. Oberer und unterer Limes. Ich bezeichne den oberen Limes (die obere Unbestimmtheits-Grenze) einer Zahlenfolge a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) für $\lim \nu = \infty$, bezw. denjenigen einer Function $\varphi(x)$ für $\lim x = x_0$, durch das Symbol:

$$(1) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x),$$

den unteren Limes entsprechend durch das Symbol:

$$(2) \qquad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \underline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x).\ ^{1)}$$

Die Anwendung der Bezeichnungen:

$$(3) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x)$$

soll dann bedeuten, dass in dem betreffenden Zusammenhange ganz nach Willkür der obere oder untere Limes gewählt werden darf. Hiernach sagt z. B. eine Beziehung von der Form:

$$(4) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu = a$$

nichts anderes aus, als dass der obere und untere Limes von a_ν den gemeinsamen Werth a besitzen d. h. dass in dem gewöhnlichen Sinne $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ wird.

---

[1]) Ich habe bisher den oberen und unteren Limes einer Zahlenfolge a_ν mit

$$\lim_{\nu=\infty} \sup a_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \inf a_\nu$$

bezeichnet. Wie ich nachträglich bemerkt habe und an dieser Stelle ausdrücklich erwähnen möchte, sind diese Bezeichnungen wohl zuerst von Herrn Pasch eingeführt worden: Math. Ann. Bd. 30 (1887), S. 134.

Digitized by Google

Der Nutzen der obigen Bezeichnungsweise tritt besonders deutlich hervor, wenn es sich um mehrere nach einander zu vollziehende Grenz-Uebergänge handelt. Namentlich gestattet dieselbe, gewisse Sätze über den Zusammenhang der Grenzwerthe von Functionen mehrerer Variablen bei simultanen und successiven Grenz-Uebergängen äusserst einfach und praegnant darzustellen. Hierher gehört z. B. der von mir bei anderer Gelegenheit[1]) ausgesprochene und bewiesene, im folgenden zu benützende Satz:

Ist:

$$\liminf_{\mu=\infty} a_{\mu\nu} = l_\nu, \quad \limsup_{\mu=\infty} a_{\mu\nu} = L_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\liminf_{\nu=\infty} a_{\mu\nu} = l_\mu, \quad \limsup_{\nu=\infty} a_{\mu\nu} = L'_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so hat man stets:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} l_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} l'_\mu = \lim\limits_{\mu=\infty} L'_\mu \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu},$$

sobald ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}$ existirt.

Dieser Satz lautet jetzt einfach folgendermaassen:

Man hat:

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\left(\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} a_{\mu\nu}\right) \\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\left(\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} a_{\mu\nu}\right) \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}$$

allemal, wenn der rechts stehende Grenzwerth existirt.[2])

---

[1]) Sitz.-Ber. 1897, S. 105.

[2]) Mit Berücksichtigung der an Gl. (4) geknüpften Bemerkung kann man natürlich statt Gl. (5) auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty}\left(\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} a_{\mu\nu}\right) \\ \lim\limits_{\mu=\infty}\left(\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}} a_{\mu\nu}\right) \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\, \nu=\infty} a_{\mu\nu}.$$

Digitized by Google

II. Oberes und unteres Integral. Es sei $f(x)$ endlich und eindeutig definirt im Intervalle $x_0 < x < X$. Wird das letztere in n beliebige Theil-Intervalle δ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ zerlegt und bedeutet G_ν die obere, g_ν die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle δ_ν, so haben die Summen:

$$\sum_1^n{}_\nu G_\nu \delta_\nu = S_n \text{ eine bestimmte untere Grenze } S,$$

$$\sum_1^n{}_\nu g_\nu \delta_\nu = s_n \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{obere} \quad \text{„} \quad s.^{1})$$

Alsdann lässt sich zeigen,[2]) dass:

$$(6) \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu G_\nu \delta_\nu = S, \quad \lim_{\delta_\nu = 1} \sum_1^n{}_\nu g_\nu \delta_\nu = s,$$

und zwar unabhängig von der Wahl der Theil-Intervalle δ_ν und der besonderen Art des Grenz-Ueberganges. Speciell ist also auch:

$$(7) \qquad \lim_{n = \infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n{}_\nu G_\nu = S, \quad \lim_{n = \infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n{}_\nu g_\nu = s,$$

wenn $X - x_0 = A$, $\delta_\nu = \frac{A}{n}$ gesetzt wird, und G_ν bezw. g_ν wiederum die obere bezw. untere Grenze von $f(x)$ im ν^{ten} Theil-Intervalle bezeichnet.

S heisst sodann das obere, s das untere Integral von $f(x)$ für das Intervall (x_0, X) — in Zeichen (nach dem Vorgange des Herrn Peano):

---

[1]) Diese Art, die Zahlen S und s zu definiren (statt, wie gewöhnlich geschieht, ihre Definition an die Gleichungen (6) anzuknüpfen) rührt, wie ich einer Mittheilung des Herrn Stolz entnehme (Monatsh. f. Math. VIII, S. 95), von Herrn Peano her: Atti Torin. T. XVIII, p. 441 (1883). Dieselbe findet sich auch in der oben citirten Abhandlung des Herrn Pasch: a. a. O. S. 144.

[2]) S. z. B. Pasch, a. a. O. S. 143. — C. Jordan, Cours d'analyse, 2de éd., T. I, p. 33. —

Digitized by Google

$$(8) \qquad S = \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx, \quad s = \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx.$$

Die von mir im folgenden anzuwendende Bezeichnung:

$$(9) \qquad \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x)\, dx$$

soll dann wiederum ausdrücken, dass in der betreffenden Formel das obere oder untere Integral ganz nach Willkür gewählt werden kann.

III. Das obere und untere Integral als oberer und unterer Limes. Das obere bezw. untere Integral lässt sich auch noch in anderer Weise, nämlich als oberer bezw. unterer Limes der Summen von der Form $\sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu$ auffassen (wo ξ_ν dem Intervalle δ_ν angehört). Es gilt nämlich der folgende Satz:

Bedeutet ξ_ν irgend eine und jede beliebige Stelle des Intervalles δ_ν, so gelten die Beziehungen:

$$(10) \qquad \overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s,$$

bei beliebiger Wahl der Theil-Intervalle δ_ν. Insbesondere wird also:

$$(11) \qquad \begin{aligned} &\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_0^{n-1}{}_\nu f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) = S, \\ &\underline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_0^{n-1}{}_\nu f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) = s \end{aligned}$$

(wo: $0 < \vartheta_\nu \leqq 1$).

Beweis. Man hat bei jeder Wahl der Theil-Intervalle δ_ν, laut Definition:

Digitized by Google

(a) $$\sum_1^n{}_\nu\, G_\nu\, \delta_\nu \geqq S.$$

Andererseits lässt sich in Folge der Beziehung (6) δ_ν so klein, n so gross annehmen, dass:

(b) $$\sum_1^n{}_\nu\, G_\nu\, \delta_\nu < S + \varepsilon \text{ etwa für: } \delta_\nu \leqq \delta,\ n \geqq N,$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben wird.

Da sodann für jede Wahl der Stelle ξ_ν innerhalb des Intervalles δ_ν stets: $f(\xi_\nu) \leqq G_\nu$, so wird auch:

(c) $$\sum_1^n{}_\nu\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu < S + \varepsilon \quad \text{für: } \delta_\nu \leqq \delta,\ n \geqq N.$$

In Folge der Definition von G_ν (als obere Grenze der Werthe $f(\xi_\nu)$ im Intervalle δ_ν) muss es aber in δ_ν Stellen ξ'_ν geben, sodass:

$$G_\nu - f(\xi'_\nu) < \frac{\varepsilon}{A} \quad (\text{wo: } A = X - x_0 = \sum_1^n{}_\nu\, \delta_\nu),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}_\nu\, G_\nu\, \delta_\nu - \sum_1^n{}_\nu\, f(\xi'_\nu) \cdot \delta_\nu < \varepsilon$$

d. h.

$$\sum_1^n{}_\nu\, f(\xi'_\nu) > \sum_1^n{}_\nu\, G_\nu\, \delta_\nu - \varepsilon$$

(d) $$> S - \varepsilon \qquad \text{(s. Ungl. (a))}.$$

Aus Ungl. (c) und (d) folgt dann schliesslich, dass in der That:

$$\overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich:

$$\underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s. \text{ —}$$

Digitized by Google

IV. Das bestimmte Integral. Ist $S = s$, und nur in diesem Falle, so wird nach III:

$$(12) \qquad \overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu,$$

d. h. dann existirt ein bestimmter $\lim\limits_{\delta_\nu = 0} \sum\limits_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu$, welcher als das bestimmte Integral von $f(x, y)$ in den Grenzen x_0 und X bezeichnet wird, und man setzt, wie üblich:

$$(13) \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = \int_{x_0}^{X} f(x) \cdot dx.$$

In diesem Falle besteht also die Beziehung:

$$(14) \qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx = \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx.$$

V. Das Doppel-Integral. Ist $f(x, y)$ endlich und eindeutig definirt im Innern und auf den Grenzen des continuirlichen und quadrirbaren[1]) Bereiches T, und bedeutet $\sum\limits_1^n{}_\nu t_\nu$ irgend eine Zerlegung von T in n quadrirbare Theilbereiche t_ν, ferner G_ν die obere, g_ν die untere Grenze von $f(x, y)$ für den Theilbereich t_ν, so besitzt von den beiden Summen:

$$(15) \qquad \sum_1^n{}_\nu G_\nu \cdot t_\nu = S_n, \quad \sum_1^n{}_\nu g_\nu \cdot t_\nu = s_n$$

die erstere eine untere Grenze S, die letztere eine obere Grenze s. Und es lässt sich wiederum zeigen,[2]) dass bei beliebiger Wahl der Theilbereiche t_ν und unabhängig von der

[1]) Mit anderen Worten: die Punkte von T sollen ein stetiges System bilden, dem eine bestimmte Flächenzahl zukommt. Es erscheint mir pädagogisch zweckmässig, den Begriff der Flächenzahl, welche ja in Wahrheit nur einen speciellen Fall des Doppel-Integrals bildet, bei dessen allgemeiner Definition als bereits bekannt vorauszusetzen. —

[2]) S. z. B. Serret-Harnack, Bd. II, Art. 581. — C. Jordan, a. a. O. p. 33.

Digitized by Google

besonderen Art des Grenz-Ueberganges die Beziehungen bestehen:

$$(16) \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu G_\nu \cdot t_\nu = S, \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu g_\nu \cdot t_\nu = s,$$

wenn δ_ν den grössten Durchmesser von t_ν bedeutet. S heisst alsdann das obere, s das untere Doppel-Integral[1]) von $f(x, y)$, erstreckt über den Bereich T.

Die Bedingung $S = s$ ist dann wiederum nothwendig und hinreichend für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes:

$$\lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu$$

(wo (ξ_ν, η_ν) eine beliebige Stelle von t_ν bedeutet). Derselbe heisst das über T erstreckte Doppel-Integral von $f(x, y)$, in Zeichen:

$$(17) \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n{}_\nu f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu = \iint_{(T)} f(x, y) \cdot dt.$$

VI. Das Doppel-Integral mit constanten Grenzen und seine Reduction auf ein iterirtes Integral. Ist der Bereich T ein Rechteck mit den Eckpunkten (x_0, y_0), (X, y_0), (X, Y), (x_0, Y), so mag das entsprechende Doppel-Integral mit $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ bezeichnet werden. Wählt man alsdann als Theil-Bereiche $m \cdot n$ Rechtecke mit den Grundlinien δ_μ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ und den Höhen ε_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, so hat man laut Definitions-Gleichung (17):

$$(18) \quad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{\delta_\mu = 0, \varepsilon_\nu = 0} \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu f(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) \cdot \delta_\mu \cdot \varepsilon_\nu,$$

---

[1]) Andere Definitionen und zugleich Verallgemeinerungen dieser Begriffe mit ausschliesslicher Benützung von geradlinig begrenzten Theilbereichen hat neuerdings Herr Stolz gegeben: „Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist." Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 1897, S. 453 ff.

Digitized by Google

und, wenn man die $\delta_\mu (\mu = 1, 2, \ldots m)$, ebenso die $\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ einander gleich macht:

$$(19) \quad \begin{aligned} &\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \int f(x, y) \cdot dx \cdot dy \\ &= \lim_{m=\infty, n=\infty} \frac{AB}{mn} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right) \end{aligned}$$

wo: $X - x_0 = A, \quad Y - y_0 = B, \quad 0 < \vartheta_\mu \leq 1, \quad 0 < \vartheta'_\nu < 1.$

Dann soll gezeigt werden, dass:

$$(20) \quad \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \int f(x, y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy \\ = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx \end{cases}$$ [1]

allemal wenn das betreffende Doppel-Integral im Sinne der Def.-Gleichung (18) existirt.[2] —

Beweis I. Nach dem am Schlusse von Art. I citirten Satze oder, genauer gesagt, mit Hülfe einer leicht vorzunehmenden Modification[3]) desselben, ergiebt sich, wenn das fragliche Doppel-Integral, also der Grenzwerth (19) existirt, unmittelbar:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \int f(x, y) \cdot dx \cdot dy$$

$$= \lim_{m=\infty} \frac{A}{m} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \lim_{n=\infty} \frac{B}{n} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right)$$

d. h. mit Berücksichtigung von Gl. (11) und (8):

---

[1]) Selbstverständlich kann man bei den äusseren Integralen auch einfach: $\int\limits_{x_0}^{X}, \int\limits_{y_0}^{Y}$ schreiben — cf. Gl. (14).

[2]) Es handelt sich, mit anderen Worten, hier immer nur um „eigentliche" Doppel-Integrale.

[3]) Diese Modification ist erforderlich wegen der Unbestimmtheit der mit ϑ_μ, ϑ'_ν bezeichneten Zahlen.

Digitized by Google

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{m = \infty} \frac{A}{m} \sum_{0}^{m-1}{}_{\mu} \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y\right) \cdot dy$$

und schliesslich:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} dx \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog erhält man:

$$\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} dy \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx.$$

Beweis II. Es sei $\delta_\mu = x_\mu - x_{\mu-1}$, $\varepsilon_\nu = y_\nu - y_{\nu-1}$, ferner $G_{\mu\nu}$ die obere, $g_{\mu\nu}$ die untere Grenze von $f(x, y)$ in dem betreffenden Rechtecke, sodass also:

$$g_{\mu\nu} \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_{\mu\nu} \quad \text{für:} \begin{cases} x_{\mu-1} \leqq \xi_\mu < x_\mu \\ y_{\nu-1} < \eta_\nu \leqq y_\nu. \end{cases}$$

Dagegen soll mit $G_\nu(\xi_\mu)$, $g_\nu(\xi_\mu)$ die obere bezw. untere Grenze von $f(\xi_\mu, y)$ im Intervalle $(y_{\nu-1}, y_\nu)$ bei constantem ξ_μ bezeichnet werden, also:

$$g_\nu(\xi_\mu) \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \quad \text{für:} \quad y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu < y_\nu.$$

Alsdann ist offenbar:

$$g_{\mu\nu} \leqq g_\nu(\xi_\mu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \leqq G_{\mu\nu}$$

und daher:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Andererseits hat man nach Art. II:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu \cdot y) \cdot dy \leqq \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu$$

und daher a fortiori:

$$\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Digitized by Google

Daraus folgt weiter:

$$\sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu g_{\mu\nu} \cdot \delta_\mu \cdot \varepsilon_\nu \leq \sum_1^m{}_\mu \delta_\mu \cdot \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leq \sum_1^m{}_\mu \sum_1^n{}_\nu G_{\mu\nu} \cdot \delta_\mu \cdot \varepsilon_\nu,$$

und somit für $\lim m = \infty$, $\lim n = \infty$, unter der einzigen Voraussetzung, dass das betreffende Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt:

$$(20\text{a}) \qquad \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\!\!\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \underline{\int_{x_0}^{X}} dx \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich wiederum:

$$(20\text{b}) \qquad \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\!\!\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \underline{\int_{y_0}^{Y}} dy \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx.$$

Zusatz. Man bemerke, dass die rechte Seite der Formeln (20) in jedem Falle durchaus wohldefinirte Operationen enthält, auch wenn keins der einfachen bestimmten Integrale $\underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy$, $\underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx$ existirt: für die Gültigkeit jener Formeln ist eben nur die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals erforderlich.

Beispiel. Denkt man sich jeden Werth einer Veränderlichen x in der üblichen Weise[1]) durch einen endlichen oder unendlichen Decimalbruch dargestellt, so möge die Anzahl der jedesmal erforderlichen Decimalstellen durch p_x bezeichnet werden (sodass also p_x nur dann einen endlichen Werth besitzt, wenn x von der Form $\frac{m}{10^n}$ ist, während in jedem anderen Fall $p_x = \infty$ wird). Alsdann ist offenbar (bei beliebiger Wahl von x_0 und X):

$$(\text{a}) \qquad \underline{\int_{x_0}^{X}} \frac{1}{p_x + 1} dx = 0,$$

[1]) D. h. mit Ausschluss solcher unendlicher Decimalbrüche, welche die Periode 9 besitzen.

Digitized by Google

da es in jedem endlichen Intervalle (x_0, X) immer nur eine endliche Anzahl von Stellen x giebt, für welche p_x unter einer beliebig gross anzunehmenden, also $\frac{1}{p_x + 1}$ über einer beliebig klein anzunehmenden positiven Zahl liegt. Setzt man jetzt:

$$\text{(b)} \qquad f(x, y) = \frac{1}{p_x + 1} + \frac{1}{p_y + 1},$$

(sodass also $f(x, y) = 0$, ausser wenn mindestens eine der beiden Veränderlichen x, y durch einen endlichen Decimalbruch darstellbar ist), so erkennt man analog, dass:

$$\text{(c)} \qquad \int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \int f(x, y) \cdot dx \cdot dy = 0.$$

Andererseits hat man (mit Benützung von Gl. (a')):

$$\text{(d)} \qquad \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy = \frac{1}{p_x + 1}(Y - y_0), \quad \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy = 0,$$

$$\text{(e)} \qquad \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx = \frac{1}{p_y + 1}(X - x_0), \quad \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx = 0,$$

sodass also keins der beiden Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x, y)\, dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x, y)$ existirt. Nichtsdestoweniger findet man unmittelbar (wiederum mit eventueller Benützung von Gl. (a)):

$$\text{(f)} \qquad \int_{x_0}^{X} dx \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x, y) \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x, y) \cdot dx = 0$$

d. h. die zweimalige Integration liefert den nämlichen Werth, wie das Doppel-Integral, und zwar gleichgültig, ob man für jedes der inneren Integrale in Gl. (*f*) das betreffende obere oder untere Integral in Rechnung zieht.[1])

[1]) Ein ähnliches Beispiel, bei welchem nur das eine Integral $\int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy$ ein analoges Verhalten zeigt, gab schon Du Bois Reymond (a. a. O. S. 278).

Digitized by Google

VII. Reduction des Doppel-Integrals auf ein iterirtes Integral für einen (im wesentlichen) beliebig begrenzten Bereich. Es sei T ein quadrirbarer Bereich, dessen Begrenzung von jeder Parallelen zur Y-Axe nicht mehr als zweimal geschnitten wird. Sind dann x_0, X die äussersten Abscissen, denen noch Punkte der Begrenzungs-Curve entsprechen, und wird diese letztere durch die zu x_0 und X gehörigen Ordinaten in die beiden Curvenbögen zerlegt:

$$y = \varphi(x), \quad y = \Phi(x) \quad (\Phi(x) > \varphi(x)),$$

so gilt die Beziehung:

$$(21) \qquad \iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y) \cdot dy,$$

falls das Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt.

Beweis. Es bedeute $g(x,y)$ eine Function von der Beschaffenheit, dass:

$g(x,y) = f(x,y)$ für alle (x,y) des Bereiches T
$g(x,y) = 0$ „ „ „ ausserhalb T.

Ist dann U irgend ein den Bereich T einschliessender Bereich, so existirt das Doppel-Integral $\iint g(x,y) \cdot dU$ über den Bereich U erstreckt, da die Integrabilität von $g(x,y)$ durch die Unstetigkeit längs der Grenz-Curve von T offenbar nicht alterirt wird. Zugleich ergiebt sich, wenn $U = T + T'$ gesetzt wird:[1])

$$\iint\limits_{(U)} g(x,y) \cdot dU = \iint\limits_{(T)} f(x,y) \cdot dT \quad (\text{wegen: } \iint\limits_{(T')} g(x,y) \cdot dT' = 0).$$

Bedeutet nun y_0 den kleinsten, Y den grössten Ordinatenwerth für die Grenz-Curve von T, und wählt man für den Bereich U dasjenige Rechteck, welches durch die vier Geraden: $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ begrenzt wird, so nimmt die letzte Gleichung (bei Vertauschung ihrer beiden Seiten) die folgende Form an:

---

[1]) Diese Zerlegung $U = T + T'$ soll so aufgefasst werden, dass derjenige Theil der Begrenzung von T, welcher auch T' begrenzt, zweimal gezählt, nämlich sowohl zu T als zu T' gerechnet wird.

Digitized by Google

$$\iint\limits_{(T)} f(x, y) \cdot dT = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} \int g(x, y) \cdot dx \cdot dy,$$

und daher mit Anwendung von Gl. (20 a):

$$\iint\limits_{(T)} f(x, y) \cdot dT = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} g(x, y) \cdot dy.$$

Da aber — in Folge der Definition von $g(x, y)$ — für jeden dem Intervalle (x_0, X) angehörigen Werth x offenbar die Beziehung besteht:

$$\int\limits_{y_0}^{Y} g(x, y) \cdot dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x, y) \cdot dy,$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\iint\limits_{(T)} f(x, y) \cdot dT = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x, y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Zusatz. Wird die Begrenzungs-Curve von T von jeder Parallelen zur X-Axe höchstens zweimal geschnitten, so findet man analog:

$$\iint\limits_{(T)} f(x, y) \cdot dT = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{\psi(y)}^{\Psi(y)} f(x, y) \cdot dx, \tag{22}$$

wenn die Gleichungen:

$$x = \psi(y), \quad x = \Psi(y) \quad (\text{wo: } \Psi(y) \geqq \psi(y))$$

die beiden Curvenbögen darstellen, in welche die Grenz-Curve durch die beiden Geraden $x = x_0$, $x = X$ zerlegt wird.

Hierzu sei noch bemerkt, dass T offenbar eo ipso quadrirbar ist, wenn die Grenz-Curve von jeder Parallelen sowohl zur X- als zur Y-Axe nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird.

Digitized by Google

Das Fraunhofer-Objectiv.

Von **Sigmund von Morz.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Im VII. und VIII. Jahrgang der Zeitschrift für Instrumenten-Kunde kommen C. Moser und Dr. Hugo Krüss wieder auf Fraunhofer's Heliometer-Objectiv der Königsberger Sternwarte, als den Typus der Fraunhofer-Objective zurück, mit dessen Constructions-Verhältnissen sich bereits früher schon Bessel[1]) und Hansen[2]) beschäftiget hatten. Es wandte sich Herr Dr. Krüss wohl auch einmal schriftlich an mich, ihm nähere Angaben über die Glasarten, aus welchen das fragliche Heliometer-Objectiv hergestellt sei, zukommen zu lassen. Leider konnte ich diesem Wunsche damals nicht entsprechen, da mir zuverlässige Daten nicht zu Handen schienen. Nun mir mehr Musse geworden, all das in meinem Besitze befindliche handschriftliche Material der älteren Periode des Fraunhofer'schen Institutes wiederholt zu stöbern und zu sichten, war ich endlich so glücklich, einen sogenannten Radius-Zettel, datirt vom 5. Oktober 1822 „für Flintglas No. 43 und Crownglas No. 32" mit den Werthen:

$a = 72''$ $f = 53''.500$ $g = 21''.304$ $F = -21''.736$ $G = 74''.841$

zu finden, welcher für $a = 94'' = 1127^{L}.991$ umgerechnet, die Radien:

---

[1]) Schuhmacher's astronomische Nachrichten 18. Band 1841.

[2]) Abhandlungen der math.-phys. Classe der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften X. Band 1871.

Digitized by Google

$$f = 69''.847 = 838^{L}.166 \qquad g = 27''.814 = 333^{L}.763$$
$$F = 28''.378 = 340^{L}.531 \qquad G = 97''.709 = 1172^{L}.51$$

ergiebt, wie sie eben Bessel als die ihm von Utzschneider mitgetheilten Werthe im 18. Bande der astronomischen Nachrichten Seite 415 unter folgender Bezeichnung:

$$r = 838^{L}.164 \quad \varrho = 333^{L}.768 \qquad r' = 340^{L}.536 \quad \varrho' = 1172^{L}.508$$

aufführt.

Diese Uebereinstimmung allein schon müsste die Annahme rechtfertigen, dass das Königsberger-Objectiv aus diesen bisher unbekannt gebliebenen Gläsern: Flint. No. 43 und Crown. No. 32 besteht. Es findet sich eine weitere Bestätigung dafür aber auch in dem Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisse besagter Gläser, wie ich es den noch vorhandenen Brechungs-Bögen Fraunhofers entnehme und welchen wohl auch Utzschneider seine Daten entnommen haben dürfte.

Es verzeichnet Tabelle I dieser Brechungs-Bögen für:

Flint. No. 43	Crown. No. 32
$Bn' = 1.628463$	$Bn = 1.523746$
$Cn' = 1.630307$	$Cn = 1.524738$
$Dn' = 1.635451$	$Dn = 1.527357$
$En' = 1.642271$	$En = 1.530726$
$Fn' = 1.648455$	$Fn = 1.533699$
$Gn' = 1.660623$	$Gn = 1.539271$
$Hn' = 1.671168$	$Hn = 1.543985$

woraus die partiellen Zerstreuungen

$$Dn' - Cn' = 0.005144 \qquad Dn - Cn = 0.002619$$
$$En' - Dn' = 0.006820 \qquad En - Dn = 0.003369$$
$$Fn' - En' = 0.006184 \qquad Fn - En = 0.002973$$

$$Fn' - Cn' = 0.018148 = dn'$$
$$Fn - Cn = 0.008961 = dn$$

sich berechnen und schliesslich der Differential-Quotient

$$dn' : dn = 2.02522$$

sich ergiebt.

Digitized by Google

Fraunhofer bediente sich somit für den practischen Fall der Formel $\int_C^F \frac{dn'}{dn}$ für den Zerstreungs-Quotienten und wie die vorerwähnten Bögen weiter zeigen der Formel

$$n = \frac{Cn + Dn + En + Fn}{4},$$

entsprechend einer Wellenlänge von 564.5, für das mittlere n, im gegebenen Falle also der Werthe

$$n' = 1.639121 \qquad n = 1.529130$$

wie dies völlig wieder mit Utzschneiders Angabe an Bessel übereinstimmt. Mit diesen Constanten und den Dicken $d = 6^{L}000$ (Crownglaslinse) und $d_{,} = 4^{L}000$ (Flintglaslinse), ferner 0.000 Linsenabstand wurde das Heliometer-Objectiv von Königsberg des öfteren rechnerisch geprüft.

Leider findet sich unter den hinterlassenen Papieren Fraunhofer's keine vollendete Rechnung für diese Gläser vor. Eine für Flint. No. 43 und Crown. No. 32 aufgefundene Rechnung endet mit + 0.29 Correction der Randabweichung.

Ich sah mich deshalb veranlasst, das vorerwähnte Objectiv vom 5. October 1822 auf seine Abweichungen zu prüfen. Dabei fand ich die Vereinigungsweite der mittleren Strahlen ($n = 1.52913$ $n' = 1.639121$) nach Fraunhofers Bezeichnung $DH = 71^{\prime}968$ (Axe), die Vereinigungsweite der farbigen Strahlen ($n = 1.538091$ $n' = 1.657269$) $DH = 71^{\prime}9894$ (Axe), sohin eine Differenz von + 0.0214 als Farbenabweichung. Die Vereinigungsweite der mittleren Randstrahlen ergab ein $DH = 71^{\prime}9641$ und die Differenz $DH_R - DH_A = 0.0039$ als Randabweichung gegen + 0.29 von oben.

Als ich alsdann die factischen Werthe von Bessel in Pariser Zollen und mit Fraunhofer's Bezeichnung

$$f = 69^{\prime}847 \quad g = 27^{\prime}814 \quad F = -28^{\prime}378 \quad G = 97^{\prime}709$$

Dicke der Crownglaslinse $AB = 0^{\prime}5$, Dicke der Flintglaslinse $CD = 0^{\prime}33333$ und halbe Objectiv-Oeffnung $X = 3''$ in Rech-

Digitized by Google

nung zog, fanden sich für die vorgenannten Strahlen die Werthe:

$DH = 93''.975944$ (mittlerer Axenstrahl)

$DH = 94''.0036$ (farbiger Axenstrahl)

Differenz $= + 0.027656$

$DH = 93''.971617$ (mittlerer Randstrahl)

Differenz $= - 0.004327$

oder die fast gleiche Correction des Objektives vom October 1822.

Würde die Rechnung für die von Hansen benützten Strahlen

(roth) $n = 1.518700$ $n' = 1.618000$

(indigo) $n = 1.539560$ $n' = 1.660242$

weiter durchgeführt, ergäbe sich ein $DH = 93''.944164$ (rother Axenstrahl), $DH = 94''.007544$ (indigo Axenstrahl).

Diese Correction scheint Fraunhofer auch für genügend erachtet zu haben. Sprechen dafür, dass dieselbe thatsächlich genügt, einerseits schon die allgemeinen Erfolge der Fraunhofer-Objective und für das Königsberger Objectiv speciell Bessels Anerkennung und Auffindung[1]) der Parallaxe von 61 Cygni, so vermag diese Ansicht ins weitere der folgende Umstand zu stützen.

Es liegen mir für die Gläser „Flint. No. 43 und Crown. No. 32" noch fünf Radiuszettel vor und zwar:

1. für $a = 60''$ (vom gleichen Datum, wie oben, 5. October 1822)

$f = 44''.583$ $g = 17''.753$ $F = - 18''.114$ $G = 62''.367$

2. für $a = 48''$ (vom 8. November 1822)

$f = 35''.666$ $g = 14''.203$ $F = - 14''.491$ $G = 49''.894$

3. für $a = 42''.5$ (vom 28. November 1822)

$f = 31''.580$ $g = 12''.575$ $F = - 12''.830$ $G = 44''.177$

4. für $a = 27''.8$ (vom 6. August 1823)

$f = 20''.65$ $g = 8''.22$ $F = - 8''.39$ $G = 28''.89$

---

[1]) Humboldt, Kosmos III. Band. S. 273.

Digitized by Google

5. für $a = 17'.1$ vom 9. September 1823)

$$f = 12''.706 \quad g = 5''.060 \quad F = -5''.162 \quad G = 17''.774$$

woraus hervorgeht, dass von den Gläsern Flint. No. 43 und Crown. No. 32 vom Jahr 1822 bis zum Jahr 1823 astronomische Objective geschliffen wurden. Aus dem Prüfungs-Ergebniss musste Fraunhofer Raisonement und Calcul wiederholt für richtig und genügend befunden haben, denn von ihm darf doch nicht angenommen werden, dass er während der Zeit eines Jahres Fehler nicht entdeckt und entsprechend corrigirt haben würde, wenn sich dieselben von Einfluss gezeigt hätten, um so mehr als schon zwischen der Inangriffannahme des einen und anderen Objectives dieser diversen Brennweiten elf Monate (5. October 1822 — 9. September 1823) dazwischen lagen.

Sämmtliche fünf Radiuszettel stellen, wenn auf die Brennweite des Königsberger Heliometer-Objectives bezogen, dieses selbst wieder bis auf das Zehntausendtel eines Zolles dar.

Hätte Fraunhofer die Farben-Correction in gleichem Grade, wie bezüglich des Aplanatismus die Kugelabweichung berücksichtigen wollen, so hätte er es ja leicht gekonnt.

Dass das Fraunhofer'sche Objectiv, wie zuerst Arnold[1])

[1]) Arnold „die neueren Erfindungen und Verbesserungen in Betreff der optischen Instrumente." Quedlinburg 1833. Arnold's Untersuchungen verdienten eine classische Arbeit genannt zu werden. Es mag hier am Platze sein zu zeigen, wie genau Arnold's gemessene Werthe mit den factischen Werthen Fraunhofer's übereinstimmen. Ich wähle dafür Objectiv Nr. 3 (Arnold Seite 38) aus den Fraunhofer Gläsern Flint. Nr. 60 und Crown. Nr. 33 bestehend, dessen noch vorhandener Radius-Zettel Fraunhofer's vom 12. October 1825 für $a = 42''.5$ folgende Radien verzeichnet:

$$f = 28''.785 \quad g = 11''.463 \quad F = -11''.677 \quad G = 52''.229.$$

Dieselben in Wiener Zoll umgerechnet ergeben die Werthe

$$f = 29''.580 \quad g = 11''.780 \quad F = -12''.000 \quad G = 53''.671$$

im Vergleiche dagegen Arnold's gemessene Werthe dieses Objectives Nr. 3

$$f = 29''.581 \quad g = 11''.782 \quad F = -12''.032 \quad G = 53''.690$$

die wohl kaum nennenswerthen Differenzen

$$f = +0.001 \quad g = +0.002 \quad F = +0.032 \quad G = +0.019$$

Digitized by Google

darauf aufmerksam macht, auch für divergirende Strahlen die sphärische Abweichung hebt, erklärt sich aus dem Umstande, dass Fraunhofer bei Prüfung seiner Objective sich terrestrischer[1]) Objecte bediente.

Wie ein höher corrigirtes Objectiv sich ergeben würde, will ich in nachgehendem zu zeigen versuchen, um damit sowohl das historisch gewordene Objectiv in seinem Werden vorführen, als auch Fraunhofer's Rechnungsmethode zur näheren Anschauung bringen zu können.

Der Fraunhofer'sche Calcul bedient sich im allgemeinen der Klügel'schen Formeln[2]), insbesondere aller Bezeichnungen, die Klügel bei seinem in Gilbert's Annalen von 1810 beschriebenem verbessertem Objective gebraucht. Ich führe die Rechnung mit Fraunhofer für den Strahl der Wellenlänge 564.5, nehme $dn' = 0.018148$, $dn = 0.008961$, wie oben gezeigt, somit $n' = 1.639121$ $n = 1.529130$ (für den mittleren Strahl) und $n' = 1.657269$ $n = 1.538091$ (für den farbigen Strahl).

Vorbereitend für den Calcul ergeben die Gleichungen für die Hülfsgrössen[3]) μ. ν. ϱ. σ. τ. und zwar für

Flintglas No. 43

$\mu' = 0.7658755$	(log)	9.8841583
$\nu' = 0.2940533$		9.4684261
$\varrho' = 0.0571156$		8.7567551
$\sigma' = 1.5075327$		0.1782667
$\tau' = 0.8306180$		9.9194041

zeigen. Die optischen Constanten von Flint. Nr. 60 und Crown. Nr. 33

sind nach Arnold	nach Fraunhofer
$n = 1.530800$	$n = 1.531394$
$n' = 1.616420$	$n' = 1.616506$
$dn = 0.009010$	$dn = 0.009010$
$dn' = 0.016563$	$dn' = 0.016509.$

[1]) Lamont „Astronomie und Erdmagnetismus." Stuttgart 1851, S. 23, § 27.

[2]) Klügel „Analytische Dioptrik." Leipzig 1778.

[3]) Klügel „Analytische Dioptrik." Leipzig 1778, Seite 75 — und Euler dioptricae, pars prima, caput 1, pag. 39.

Digitized by Google

Crownglas No. 32.

μ	$= 0.9897750$	(log) 9.9955365
ν	$= 0.2188820$	9.3402100
ϱ	$= 0.2283035$	9.3585125
σ	$= 1.6615908$	0.2205240
τ	$= 0.9261292$	9.9666716

Bei dem constanten Radien-Verhältnisse[1]) von $f:g=2.511214$, wird, wenn wir mit Fraunhofer für die erste Crownglasseite f

[1]) Dasselbe ist wohl das Ergebniss practischer Versuche. Fraunhofer zeigt ja selbst schon pag. 2 und 24 seiner berühmten Abhandlung „Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glassorten in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernrohre", von welch' hoher Bedeutung der practisch experimentelle Weg sein könne, und auch Gilbert, welcher diese Abhandlung im 56. Bande seiner Annalen der Physik zum Abdruck bringt, scheint diess durch ihre Eintheilung in besondere Abschnitte hervorheben zu wollen.

Als Euler (Euler pars I 1769 Cap. VII pag. 323) Dollond's Objectiv darzustellen bemüht war, glaubte er das Verhältniss 1 : 7 (genau 1 : 7.327) als das günstigste betrachten zu müssen, alsbald aber erkannte er die gleichseitige Crownglaslinse (Euler pars II Cap. V pag. 132) für die noch bessere Form. Nach ihm dachte Klügel (Gilbert's Annalen 1810 Seite 276) die Crownglaslinse ins Minimum der Ablenkung stellen zu sollen und empfahl das Verhältniss 11 : 36, während Bohneberger (Zeitschrift für Astronomie von Lindenau und Bohneberger 1816 Seite 277) die Aufmerksamkeit auf das Verhältniss 2 : 3 lenkt. Alle diese Objective kehren die kürzere convexe Fläche dem Objecte zu und erfordern eine biconcave Flintglaslinse. Nach solchen Vorgängen wählte Fraunhofer das Verhältniss 5 : 2 (genauer 2.511214 : 1), zweifellos in der bewussten Absicht, das ganze Objectiv dadurch dem Minimum der Ablenkung näher zu bringen und konnte ihm dasselbe genügen, da er den trigonometrischen Weg betretend durch eine entsprechende Radien-Correction, wie sie schon Klügel 1810 empfiehlt, Farben- und Kugelabweichung streng zu heben im Stande war. Sein Objectiv kehrt entgegen den bisher empfohlenen Objectiven die längere Seite des Crownglases dem Objecte zu, gestaltet das Flintglas zum Meniscus, dessen convexe Seite sich dem Bilde zuwendet. Die Summe der Brechungen, welche Klügel bei seinem verbesserten Objective als Wesenheit seiner Verbesserung betrachtet und auf ein Minimum gebracht annimmt, verringert Fraunhofer selbst noch um sieben Grade. Die Radien sind übrigens durch die Formeln

Digitized by Google

seinen willkürlichen Werth[1]) 1794.249 setzen, zunächst dann $g = 714.4986$ erhalten.

Ich entnehme nun Glasdicken und halbe Oeffnung gleichfalls der vorhin als begonnen erwähnten Rechnung für Flint. No. 43 und Crown. No. 32 worin AB 13.''9 (Dicke der Crownglaslinse), $CD = 10.''8$ (Dicke der Flintglaslinse) und halbe Oeffnung $X = 82''$ gesetzt sich finden. Damit berechnen sich aus den Formeln Seite 278 von Gilberts Annalen Jahrgang 1810 die Werthe $AE = 5185.191236$ und $BF = 965.007444$ (Axe).

Nun setzen wir mit Klügel

$$\zeta = \frac{dn}{n-1} \quad \eta = \frac{dn'}{n'-1} \quad \beta = \frac{\eta p}{\eta - \varsigma} \quad q = \frac{\zeta - \eta}{\varsigma}\beta$$

wo p = Brennweite der Crownglaslinse, q = Brennweite der Flintglaslinse und β die Gesammtbrennweite des Objectives bedeuten, erhalten nun dafür die Werthe

$$f = \frac{(Md+n)(n-1)}{Mn} \qquad M = \frac{g - p(n-1)}{gp}$$

darstellbar, woraus durch Substitution noch die eleganteren Formeln

$$f = g\left(\frac{(Md+n)(1-Mp)}{Mnp}\right) \qquad g = f\left(\frac{Mnp}{(Md+n)(1-Mp)}\right)$$

resultiren. Die Hülfsgrösse M steht zu $f \cdot p \cdot$ und β im umgekehrten Verhältnisse. Dieselbe wächst bei Abnahme des Werthes von f.

Fraunhofer's experimentelles Vorgehen beweist des weiteren ein ebenfalls noch vorhandener Radius-Zettel aus der Zeit seiner früheren Geschäfts-Leitung für sein Flint. Nr. 3 und Crown. Nr. 3 mit den Werthen:

$$a = 110'' \quad f = 91.''442 \quad g = 30.''480 \quad F = -30.''531 \quad G = +102.''455$$

wobei er Klügel's Verhältniss von 1 : 3 gerade in 3 : 1 verkehrt.

Georg Merz bediente sich später mit gutem Erfolge zuweilen auch dieses Verhältnisses.

[1]) Eine Erklärung der Wahl gerade dieser Zahl dürfte schwierig sein. Wir kommen jedoch auf diesen Zahlenwerth, wenn wir bei Flint. Nr. 43 und Crown. Nr. 32 unter Annahme von 13.''9 Crownglaslinsen-Dicke in den Gleichungen der vorhergehenden Anmerkung $M = 0.0002956955$ setzen. Annähernd kommt man wohl auf die Höhe dieser Zahl, wenn man allgemein 2400 als Objectiv-Brennweite setzt, was auch Fraunhofer je gethan.

Digitized by Google

$\zeta =$	0.01693534	(log)	8.2287940
$\eta =$	0.02839524		8.4532456
$\beta =$	2391.087166		3.3785954
$q =$	1618.013333		3.2089821

und vermögen mit Fraunhofer die Formeln in Gilberts Annalen Seite 279 zu Hülfe nehmend nun auch BF für die Randstrahlen zu berechnen.

Es ergeben sich folgende Werthe:

$ked = 2^0\,37'\,9''.91 \quad KeE = 1^0\,42'\,45''.62$

$E = 0^0\,54'\,24''.29 \quad KE = 3388.630777 \quad LE = 5883.474377$

$lfE = 7^0\,29'\,15''.16 \quad lfF = 11^0\,29'\,37''.68 \quad F = 4^0\,54'\,46''.81$

$LF = 1662.383076 \quad BF = 947.888476$ (Rand)

endlich die Differenz

$$BF_A - BF_R = db = 17.118968$$

womit Fraunhofer aus der Formel

$$\lambda' = \frac{(db)\,q^3}{\mu'\,p^2\,x^2} + \frac{\nu'\,q^3}{p\beta^2} \quad ^{1)}$$

λ' berechnet, wofür wir hier $\lambda' = 15.3466036$ finden und nun mittelst der Formeln

$$F = \frac{-q}{\sigma' - (q:p)(\sigma' - \varrho') + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

$$G = \frac{-q}{\varrho' + (q:p)(\sigma' - \varrho') - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

---

[1]) Sie ist gleichwerthig der Klügel'schen Formel für

$$\lambda' = -\frac{\mu\,\lambda\,q^3}{\mu'\,p^3} + \frac{\nu'\,q^2}{p\,\beta}$$

und entwickelt sich aus dieser, wenn

$$\lambda = \frac{\mu'\,\nu'\,p^2}{\mu\,q\,\beta} - \frac{\mu'\,\nu'\,p^2}{\mu\,\beta^2} - \frac{(d\,p)\,p}{\mu\,x^2}$$

in ihr gesetzt wird.

Digitized by Google

auch die Flintglas-Radien zu erhalten vermögen. Wir finden

$$F = 728.255166 \quad G = 2462.287968$$

und weiter entwickelnd für die Centralstrahlen die Werthe

$$CG = 10331.335714 \quad DH = 2390.141661$$

für die Randstrahlen

$$MF = 1676.143642 \quad mgF = 11^0.22'\,5''.88$$

$$mgG = 6^0\,54'\,24''.86 \quad G = 0^0\,27'\,5''.79 \quad MG = 11111.151026$$

$$NG = 12834.383828 \quad NhG = 2^0\,21'\,16''.50 \quad NhH = 3^0\,51'\,40''.61$$

$$H = 1^0\,57'\,29''.90 \quad NH = 4852.27679$$

und nun, weil 4. Seite convex $DH = NH - G = 2389.988822$.

Die schliessliche Differenz dieser Vereinigungsweiten giebt alsdann der Kugelabweichung $DH_R - DH_A = -0.152839$

Als Vereinigungsweiten der Centralstrahlen für den farbigen Strahl $n' = 1.657269$ $n = 1.538091$ erhalten wir $AE = 5128.721111$ $BF = 948.929$ $CG = 10953.950253$ $DH = 2390.184444$, welch' letzterer Werth mit dem $DH_A = 2390.141661$ des mittleren Strahles verglichen in seiner Differenz $+ 0.042783$ die Grösse der Farbenabweichung nach Fraunhofer zur Anschauung bringt.

Für eine Brennweite gleich der Einheit stellt sich die Correction nun folgend dar:

Achromasie	$+ 0.0000179$
Aplanatismus	$- 0.0000639$

Um nun diese Abweichungen für längere Brennweiten ebenso verschwindend klein zu machen, corrigirt Fraunhofer die Randabweichung durch eine Aenderung von λ', die Farbenabweichung durch eine Aenderung von q, wodurch nur mehr für F und G neue Werthe sich ergeben. Es muss λ' kleiner genommen werden bei positiver Randabweichung oder einem längeren Randstrahl, grösser, wenn bei kürzerem Randstrahl die Abweichung sich negativ zeigt, q dagegen muss grösser genommen werden, wenn die Farbenabweichung zu gross (positiv) und kleiner, wenn dieselbe zu klein (negativ) ist.

Digitized by Google

Nach einigen Versuchen, welche, wenn mehrfache Objectiv-Berechnungen schon vorliegen, keinen erheblichen Zeitaufwand beanspruchen, gelangt man bald zu geeigneten Werthen für λ' und q.

Der Kürze halber von solchen Versuchen absehend will ich hier nur den Schluss der Rechnung folgen lassen.

Wir finden mit $q = 1618.6982$ und $\lambda' = 15.38795$ für den mittleren Randstrahl:

$$(q:p)(\sigma' - \varrho') = 2.4329206 \quad r'\sqrt{\lambda' - 1} = 3.1506544$$
$$F = 727.417333 \quad G = 2450.277906 \quad CG = 10397.574072$$
$$DH = 2388.661111 \text{ (Axe)},$$

$$MF = 1675.305809 \quad mgF = 11^0\,22'\,32''.89 \quad mgG = 6^0\,54'\,41''.13$$
$$G \quad = 0^0\,26'\,55''.05 \quad MG = 11179.44618 \quad NG = 12891.506753$$
$$NhG = 2^0\,21'\,39''.45 \quad NhH = 3^0\,52'\,18''.29 \quad H = 1^0\,57'\,33''.89$$
$$NH = 4838.938888 \quad DH = 2388.660982 \text{ (Rand)},$$

daraus $DH_R - DH_A = -0.000129$ (Kugelabweichung)
und für den farbigen Strahl

$$CG = 11029.730253 \qquad DH = 2388.661661,$$

letzteres grösser als DH (Axe) somit Differenz: $+0.000550$ (Farbenabweichung) oder auf die Einheit bezogen die Grössen

der sphärischen Aberration $= -0.00000005397$
der chromatischen Aberration $= +0.00000023011$

Damit schliessen Fraunhofer's Objectiv-Berechnungen überhaupt ab. Ich wollte die Rechnung aber noch für Hansen's rothen Strahl

$$n' = 1.620973 \qquad n = 1.520169$$

und für den farbigen Randstrahl (Fraunhofer's blauen Strahl) erweitern und fand für den Fall

$$DH_A = 2388.65 \quad \text{roth (Hansen)}$$
$$DH_R = 2388.110982 \quad \text{roth (Hansen)}$$
$$DH_R = 2389.178760 \quad \text{blau (Fraunhofer)}$$

mithin eine grösste Abweichung der farbigen Strahlen

$$DH_{blau} - DH_{roth} = 1.067778$$

Digitized by Google

so dass für die Focal-Weite von Bessel's Heliometer-Objectiv nur mehr eine chrom. Aberration von circa $0''.42$ oder $0^{L}.5$ gegen $2^{L}.24$, die Hansen am Königsberger-Objectiv constatirt, verbleiben würde.

Für dieses höher corrigirte Objectiv würden sich bei 94" Focus allerdings die Radien-Werthe in die folgenden verändern:

$$f = 847^{L}.300 \quad g = 337^{L}.40655 \quad F = 343^{L}.509 \quad G = 1157^{L}.097$$

Dass Fraunhofer sich übrigens auch der Planfläche für die vierte Objectiv-Seite bediente, constatirt bereits Prechtl[1]) und zeigt dies an einem von Stampfer analysirten 12 zölligen Reichenbach'schen Theodolit-Objectiv Fraunhofer's aus dem Jahr 1818. Diese Form benützte Fraunhofer auch für seine Zugfernrohr-Objective, deren Focal-Weiten inner die Grenzen von 12—20 Zoll fielen. Dass die Planfläche bei grösseren astronomischen Objectiven ausser Gebrauch blieb, dafür scheinen nur Fabrications-Erwägungen massgebend gewesen zu sein. Fraunhofer bearbeitete seine Objective bekanntlich auf der von ihm erfundenen Radius-Schleifmaschine[2]), eine höchst elegante Schleifweise, bis zuletzt die wachsenden Dimensionen von Brennweite und Oeffnung zum Schleifen der Gläser aus freier Hand zwangen. Die ersten Schwierigkeiten in Folge Durchbiegung der Radiusstange sollen sich beim Dorpater 9 Zoll-Objectiv gezeigt haben. Beim Schleifen aus freier Hand bediente sich Fraunhofer zur Controle der Radien seiner Sinus-versus-Lamellen, kleiner planparalleler Glasstreifen, deren Dicken er am grossen Schraubenmicrometer-Microscope mass, da sein Sphärometer noch nicht mit micrometrisch verstellbarer Sinus-versus-Spitze versehen war, wie die gegenwärtig gebräuchlichen so bequemen Sphärometer es sind. Um die Basis-Curve zu construiren, wurden die besagten Sinus-versus-Lamellen auf ein Planglas, welches der Oeffnung des herzustellenden Objectives

---

[1]) Prechtl, practische Dioptrik, Wien 1828.

[2]) Prechtl, practische Dioptrik, § 242—268.

Digitized by Google

entsprach, mit Speichel gekittet. Für eine convexe Fläche genügte eine Lamelle, für eine concave Fläche waren deren zwei nöthig.

Die Berechnung der Objective mit planconcavem Flint geschah ebenso auf trigonometrischem Wege, nachdem die optischen Constanten festgestellt waren. Die Reihenfolge der Radien war jedoch die folgende. Es wurde zuerst F aus

$$F = \frac{-q}{\sigma' - (q:p)(\sigma' - \varrho') + \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$$

berechnet, da alsdann, β [1]) als Gesammt-Objectiv-Brennweite als bekannt vorausgesetzt, die Einzelbrennweiten aus den Bedingungs-Gleichungen

$$p = \frac{\eta - \zeta}{\eta} \beta \text{ und } q = \frac{\zeta - \eta}{\zeta} \beta$$

erhalten werden konnten und bei $G = \infty$ aus

$$G = \frac{-q}{\varrho' + (q:p)\sigma' - \varrho') - \tau' \sqrt{\lambda' - 1}}$$

für λ' die Gleichung

$$\lambda' = \left(\left(\frac{\sigma'}{p} - \frac{\varrho'}{\beta} \right) \frac{q}{\tau'} \right)^2 + 1$$

resultirt.

Alsdann ergeben sich mittelst der Formel

$$\lambda = -\frac{\mu' p}{\mu q} \left(\lambda' \frac{p^2}{q^2} - \nu' \frac{p}{\beta} \right) \quad ^{2)}$$

schliesslich die Radien der Crownglaslinse aus den Gleichungen

$$f = \frac{p}{\sigma - \tau \sqrt{\lambda - 1}} \qquad g = \frac{p}{\varrho + \tau \sqrt{\lambda - 1}} \quad ^{3)}$$

Dennoch wurde unter Fraunhofer kein grösseres Objectiv der

---

[1]) Bei allen für Planflächen berechneten Objectiven setzt Fraunhofer $\beta = 1000$.

[2]) Klügel's Dioptrik, § 337.

[3]) Klügel, § 199.

Digitized by Google

Art ausgeführt. Selbst das 1835[1]) von Georg Merz gelieferte Bogenhauser-Objectiv von 10½ Zoll Oeffnung hat noch die vierte Seite convex. Erst als die Pulkowaer Aufträge das Institut vermehrt beschäftigten, ging Georg Merz daran, auch einmal den Versuch eines grösseren Objectives mit planconcavem Flint und zwar gleich mit einem 14 Zöller zu wagen, welches Objectiv mit dem Pulkowaer 14 Zöller, dessen 4. Seite convex, verglichen, sich demselben auch gleichwerthig erwies und später nach Odessa kam.

Seit dem 14 Zöller für Lissabon 1858, bei dessen Herstellung ich persönlich schon thätig war, kamen nur mehr Objective mit planconcavem Flint für astronomische Refractoren zur Ausführung.

Bei zwei derselben documentiren ganz besondere Umstände die zweifellose Güte eines solchen Objectives. Das eine, der von mir 1880 für Bordeaux gefertigte 14 Zöller bestand die scrupulösesten Prüfungen[2]), denen er vor seinem Ankaufe durch die französische Regierung am Observatoire in Paris unterzogen ward. Das andere, der 1864 für Mailand gefertigte 8 Zöller hat seine Kraft auf Mars durch Schiaparelli's[3]) Beobachtungen ebenso genügend erprobt.

Dass das Fraunhofer'sche Institut bezüglich der Correction seiner Objective an der traditionellen Gepflogenheit des Altmeisters bei solchen Erfolgen festhielt, mag nun nicht Wunder nehmen. Die hier zum Schlusse noch folgenden geometrischen und optischen Constanten des in Folge der vorberührten Lei-

---

[1]) Zu der Zeit wurde mit günstigem Erfolge aber schon das mittlere n von 564.5 auf 558 zu verrücken versucht oder $n = \frac{Dn + En}{2}$ gesetzt und bei constantem $dn = 0.009$ der Zerstreuungs-Coefficient aus

$$\frac{Dn' - Cn'}{Dn - Cn} + \frac{En' - Dn'}{En - Dn}$$

berechnet.

[2]) Rayet annales de l'Observatoire de Bordeaux, Tom. I, 1885, fol. 52.

[3]) Schiaparelli del Pianeta Marte, Reale Accademia del Lincei, Roma 1878, 1881. Osservasioni fatte coll' equatoriale di Merz.

Digitized by Google

stungen des Mailänder 8 Zöllers mir von Professor Schiaparelli weiter bestellten und 1881 der Königl. Sternwarte in Mailand gelieferten 18 Zöllers werden dies gleichfalls erhärten.

Der Fraunhofer'sche Calcul ergab für denselben unter Zugrundlage von

$$G = \infty \quad AB = 1''.44 \quad CD = 1''.03$$

bei den gegebenen optischen Constanten;

$$n = 1.521007 \quad n' = 1.622307 \quad dn' : dn = 1.859444$$
$$f = 107''.72 \quad g = 86''.69 \quad F' = -89''.07$$

als Radien.

Auf die Einheit der Brennweite bezogen finden wir damit die Farbenabweichung $= -0.0000078$, Kugelabweichung $= +0.0000032$, so dass auch in diesem Falle die Aberrationen eine wohl zulässige Grösse in der That nicht überschreiten.

Digitized by Google

Ueber Ausbreitung von Flüssigkeiten und damit zusammenhängende Erscheinungen.[1])

Von **J. Stark.**

(*Eingelaufen 15. Januar*)

In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst eine Reihe von Versuchen über die verschiedenen Arten von Ausbreitung vorgeführt, sodann werden Bewegungserscheinungen beschrieben, die bei der Ausbreitung von Flüssigkeiten auftreten können.

Bezüglich der einschlägigen Literatur sei verwiesen auf eine Arbeit von G. Quincke[2]) und eine Abhandlung von O. Lehmann.[3])

Der Erklärung der im folgenden behandelten Erscheinungen ist die von Segner[4]) und Th. Young[5]) eingeführte, in neuerer Zeit fast allgemein adoptierte Annahme einer kontraktilen Kraft in einer Flüssigkeitsoberfläche zu Grunde gelegt. $a_{\iota o}$ bezeichne die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit ι gegen Luft, $a_{\iota n}$ oder $a_{n\iota}$ sei die Oberflächenspannung in der Kontaktfläche einer Flüssigkeit ι und einer anderen n. a ist die in Gewichtsmilligrammen gemessene Spannung, welche auf eine Strecke der flüssigen Grenzfläche von der Breite eines Millimeters ausgeübt wird. Es sei $a_{10} > a_{20} > a_{30}$.

---

[1]) Die vorliegende Untersuchung wurde im Laboratorium des Herrn Prof. von Lommel im phys. Institut der Münchener Universität angestellt.

[2]) G. Quincke. Pogg. Ann. 134. p. 356—357. 1868.

[3]) O. Lehmann. Wied. Ann. 56. p. 771—774. 1895.

[4]) Segner. Comment. societ. reg. sc. Gott. tom. I. 1851. p. 301—372.

[5]) Th. Young. Phil. trans. 1805. part I. p. 65—87.

Digitized by Google

Wie Quincke[1]) theoretisch und experimentell nachgewiesen hat, wird eine Flüssigkeit 2 an der Oberfläche einer Flüssigkeit 1 ausgebreitet, wenn $a_{10} > a_{20} + a_{21}$. Nach demselben Forscher wird eine Flüssigkeit 3 an der Kontaktfläche der Flüssigkeiten 1 und 2 ausgebreitet, wenn $a_{12} > a_{31} + a_{32}$.

I. Die verschiedenen Arten von Ausbreitung.

Vorbemerkung. Bei den Versuchen, die im folgenden beschrieben werden, wurde zumeist, um Strömungen in den Flüssigkeiten sichtbar zu machen, in diesen Gasruss suspendiert. Um Russ in Wasser zu suspendieren, muss man ihn mehrmals in diesem unter Umrühren abkochen. Am besten geht er in Alkohol in feine Teilung. Bringt man einige Tropfen Alkohol, in dem Russ suspendiert sind, auf Wasser, so scheidet sich unter lebhafter Bewegung auf dessen Oberfläche ein feines, sehr leicht bewegliches Russhäutchen ab.

1. Einfluss der Temperatur auf die Oberflächenspannung. — Wie bereits experimentell und theoretisch nachgewiesen ist, wächst die Oberflächenspannung mit sinkender Temperatur und nimmt ab mit steigender. Eine Bestätigung dieser Thatsache enthält auch folgender Versuch.

Chloroform hat das spec. Gewicht 1,9, Russsubstanz nach einer vom Verfasser[2]) ausgeführten Bestimmung 2,1. Bringt man etwas Russ in Chloroform, das sich in einem Uhrglas befinden mag, und deckt dieses mit einer Glasplatte zu, damit kein Chloroform verdampfen kann, dann sinken die Russteilchen wegen ihres grösseren spec. Gewichtes im Chloroform allmählich unter und sammeln sich in kleinen Ballen auf dem Boden des Uhrglases. Das ist wenigstens der Fall, wenn man im Schatten gearbeitet hat. Rückt man dann das Uhrglas mit dem Chloroform in das Sonnenlicht, so beobachtet man folgendes. Die Russballen beginnen sich langsam vertikal nach auf-

[1]) G. Quincke. Pogg. Ann. 139. p. 1. 1870.
[2]) J. Stark. Wied. Ann. 62. p. 354. 1897.

Digitized by Google

wärts in Bewegung zu setzen; sind sie an der Oberfläche angelangt, so weichen ihre Teilchen mit einem Ruck in horizontaler Richtung auseinander, verteilen sich gleichmässig in der Oberfläche und behaupten sich solange in ihr, als nicht beschattet wird. Lässt man auf einen Teil der mit Russ bedeckten Chloroformoberfläche einen Schatten, etwa von einem Federmesser oder einem Bleistift, fallen, so zucken die Russteilchen im beschatteten Gebiet und an dessen Rande fast momentan zusammen und drängen sich im Schatten dichter als in dem besonnten Teil der Oberfläche, so dass sie in dieser Verteilung die Form des Schattens nachbilden und der „Russschatten" den optischen begleitet, falls dieser langsam weiterwandert. Zieht man den schattenwerfenden Gegenstand zurück, so weichen die Russteilchen, die im Schatten lagen, wieder momentan auseinander.

Die drei beschriebenen Vorgänge, das Aufsteigen der Russteilchen, ihr Auseinanderweichen an der Oberfläche und ihre Koncentration im Schatten, sind nicht schwer zu erklären. Der Russ absorbiert von dem auffallenden Sonnenlicht mehr Wärme als das durchsichtige Chloroform. Er erwärmt daher sich und die ihn unmittelbar umgebende Flüssigkeit stärker, als es bei der übrigen Chloroformmenge der Fall ist. Das den Russ umgebende Chloroform wird daher leichter als das übrige und wird deshalb von diesem nach aufwärts gedrückt; und da der Russ spec. nicht viel schwerer als Chloroform ist, so wird er von der aufsteigenden Strömung an die Oberfläche geführt. Da wo in dieser ein Russballen liegt, tritt aus dem angegebenen Grunde eine stärkere Erwärmung und damit eine Erniedrigung der Oberflächenspannung ein; infolgedessen zieht sich an der betreffenden Stelle die stärker gespannte Oberfläche zurück und reisst die schwächer gespannte und mit dieser den Russballen auseinander. Auf diese Weise vollzieht sich die Verteilung des Russes in der Oberfläche. Wird ein Teil derselben beschattet, so geben die im Schatten liegenden Russteilchen durch Strahlung und Leitung ihren Wärmeüberschuss gegenüber der Umgebung ab, ohne dass ihnen durch die Sonnenstrahlen neue Wärme zugeführt wird, während das im besonnten Teil der

Digitized by Google

Oberfläche der Fall ist. Man hat also in dieser eine kältere Partie mit höherer und eine an sie angeheftete wärmere mit niedrigerer Spannung. Die erste kontrahiert sich, indem sie die zweite an sich zieht und die eingelagerten Russteilchen mit sich nimmt, und bringt so deren Koncentration hervor. Sowohl bei der beschriebenen Disgregation wie Koncentration der Russteilchen ist im gleichen Sinne wie die Oberflächenspannung die Schwere verschieden stark erwärmter Partien des Chloroforms als Bewegungsursache thätig. Das Momentane in den gedachten Vorgängen spricht jedoch dafür, dass die Wirkung der Oberflächenspannung überwiegt.

Auf Grund der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Temperatur erklärt sich auch folgender Versuch. Wird auf eine feste, glatte Unterlage ein Tropfen einer Flüssigkeit gelegt und an einem Punkte des Tropfenrandes die Unterlage oder der Tropfen erwärmt, dann weicht dieser von der erwärmten Stelle zurück, wie wenn er sich der Wärme entziehen wollte. Zum Beispiel ein Tropfen Stearin auf einer warmen Messerspitze wandert von dieser, wenn sie in die Kerzenflamme gehalten wird, weg nach den nächst gelegenen kälteren Stellen des Messers, selbst wenn er dabei in die Höhe steigen muss.

Nach dem vorhergehenden ist ohne weiteres der Satz verständlich: Herrschen an der Grenzfläche einer Flüssigkeit Temperaturdifferenzen, so bewirkt die Oberflächenspannung durch Ausbreitung in kurzer Zeit einen Ausgleich derselben.

Wird an einem Teil der Oberfläche einer Flüssigkeit auf irgend eine Weise beständig Wärme zugeführt, so dass dauernd Temperaturdifferenzen in der Oberfläche vorhanden sind, dann entsteht an der Stelle mit höherer Temperatur eine stationäre centrifugale Störung oder, wenn man will, eine stationäre Ausbreitung von wärmerer Flüssigkeit durch kältere. Ein besonders interessantes Beispiel dieser Art, mit dem der Verfasser in einer eigenen Abhandlung näher bekannt machen wird, bietet der Leidenfrost'sche Tropfen. Ein anderes ist folgendes. Um den Docht einer brennenden Kerze bildet sich bekanntlich eine Vertiefung aus, die von einem ziemlich hohen Rande

Digitized by Google

ungeschmolzenen Stearins und in ihrer Mitte vom Docht begrenzt ist. Auf ihrem Boden liegt geschmolzenes Stearin. In der Nähe des Dochtes wird das flüssige Stearin wegen der Nachbarschaft der Flamme stärker erwärmt als an dem weiter abliegenden Rande. Infolge der daraus sich ergebenden Differenz der Oberflächenspannung wird dann das flüssige Stearin beständig vom Docht weg nach dem ungeschmolzenen erhöhten Kerzenrand und an diesem etwas emporgezogen und dann einwärts nach unten zusammengeschoben, um, dem Zug der Schwere und der saugenden Wirkung des Dochtes folgend, vom Boden der Vertiefung wieder nach dem Docht zurückzukehren. An der Oberfläche des flüssigen Stearins hat man demgemäss eine vom Docht weggerichtete, an seiner Grenzfläche gegen das noch feste Stearin eine auf ihn zugerichtete Strömung. Die beiden übereinander liegenden entgegengesetzt gerichteten Strömungen kann man dadurch sichtbar machen, dass man dem flüssigen Stearin feine Russteilchen beimischt, am besten, indem man ein Messer über der Kerzenflamme etwas berusst und dann die noch warme berusste Fläche rings am erhöhten Kerzenrande abstreift, so dass von diesem geschmolzenes mit Russ beschicktes Stearin in die erwähnte Vertiefung niederfliesst. Dadurch, dass stark erwärmtes Stearin vom Docht beständig nach dem kälteren Kerzenrande gezogen wird, wird fortwährend nach diesem Wärme transportiert und so ein Beitrag zur Schmelzung des dort gelegenen festen Stearins geliefert. Es spielt also die Oberflächenspannung, abgesehen von der kapillaren Saugwirkung des Dochtes, in dem Mechanismus der Kerze noch eine gewisse andere, nicht zu unterschätzende Rolle.

2. Die Ausbreitung von mischbaren Flüssigkeiten. — An einem Tropfen Olivenöl, der auf koncentrierte Schwefelsäure gesetzt wird, beobachtet man folgendes. Der Tropfen wird langsam auseinander gezogen bis zum Rande des Gefässes, wo er sich um die Schwefelsäure herumstülpt. Gleichzeitig mischt sich die Oelschicht an ihrer unteren Fläche unter chemischer Zersetzung mit der Säure. Die beschriebene Bewegung dauert solange als unzersetztes Oel vorhanden ist.

Digitized by Google

Der Vorgang erklärt sich leicht. Da an der Grenzfläche von Oel und Säure die Spannung von Null wohl nur wenig verschieden ist, so kommen für die Ausbreitung nur die Spannungen in der freien Oberfläche der Säure a_{10} und des Oels a_{20} in Betracht. In der Formel $a_{10} > a_{20} + a_{21}$ ist für den gegebenen Fall $a_{21} = 0$, so dass $a_{10} > a_{20}$ bleibt. Und da in der That die Spannung der Säure grösser ist als die des Oels, so wird dieses ausgebreitet.

Die gleiche Ueberlegung gilt von der Ausbreitung einer beliebigen Flüssigkeit auf der freien Oberfläche einer anderen höher gespannten mit ihr unbeschränkt mischbaren, z. B. von Alkohol auf Wasser. Ferner kann sie auf den im vorhergehenden Abschnitt behandelten Fall von Ausbreitung angewendet werden; man hat nur für die Spannung der kälteren Flüssigkeit die Bezeichnung a_{10}, für die der wärmeren a'_{10} zu wählen und zu beachten, dass $a_{10} > a'_{10}$ ist.

Lässt man aus einem Röhrchen mit kapillarer Oeffnung ungefähr 5 mm unter der Oberfläche reinen Wassers Alkohol langsam ausströmen, so beobachtet man eine rings vom Röhrchen ausgehende stationäre Ausbreitung des Alkohols auf der Oberfläche des Wassers. Der ausströmende Alkohol steigt nämlich vermöge seines kleineren spec. Gewichtes beständig empor, wird an der Oberfläche ausgebreitet und mischt sich dann mit dem Wasser, so dass der nachströmende Alkohol ebenfalls ausgebreitet werden kann.

Eine stationäre Ausbreitung von Alkohol (oder Aether) auf Wasser erhält man auch auf folgende Weise. An der Oberfläche eines etwa 0,5 bis 2 cm tief unter Wasser liegenden Chloroformtropfens lasse man Alkohol austreten. Unter lebhaften Bewegungen wird dieser ausgebreitet (siehe S. 99 u. 104) und tritt zum Teil in das Wasser, zum Teil in den Chloroformtropfen, da er mit beiden Flüssigkeiten mischbar ist. Hat man nun durch Aufbringen eines Tropfens russhaltigen Alkohols auf der Wasserfläche ein Russhäutchen (siehe Vorbem.) zur Abscheidung gebracht, so beobachtet man nach der obigen Operation, dass die Russteilchen auf der Wasserfläche von der

Digitized by Google

Stelle, die über dem Chloroformtropfen liegt, sich zurückziehen und, von kleinen Schiebungen abgesehen, für längere Zeit, unter Umständen bis zu 10 Minuten, jene Stelle meiden. Es bildet sich also über dem Chloroformtropfen auf der Wasserfläche gleichsam eine staubfreie Ebene aus. Betrachtet man die Wasserfläche schief in der Weise, dass das Licht einer hellen Fläche etwa einer weissen Wolke an ihr in das Auge reflektiert wird und auch ein dunkler Streifen, etwa das dunkle Bild eines Fensterkreuzes auf ihr zu sehen ist, so beobachtet man, besonders wenn die Grenze von Dunkel und Hell entsprechend zu liegen kommt, auf der Wasserfläche über dem Chloroform eine kleine spitze Erhebung und rings um diese in gewisser Entfernung einen Ring, der in steilem Abfall einen höher gelegenen Teil der Wasserfläche von einem diesen umgebenden niedriger gelegenen trennt. Auf jenem Teil, dem hervorragenden Plateau mit der centralen Spitze, sind mehr oder minder lebhafte centrifugale Strömungen wahrzunehmen. Die Erscheinung erklärt sich so. Nach dem Aufbringen von Alkohol auf die Grenzfläche von Wasser und Chloroform ist sowohl im Wasser wie im Chloroform, aber in beiden in verschiedener Koncentration Alkohol enthalten. Durch Diffusion entzieht das Wasser dem Chloroform Alkohol. Die an der Oberfläche des Chloroformtropfens sich bildende Mischung aus Alkohol und Wasser steigt, weil sie spec. leichter ist als die umgebende Flüssigkeit, an der Fläche des Tropfens nach dessen Kuppe empor und wird von da nach der Oberfläche des Wassers getrieben. Hier angelangt, wird sie von der umgebenden stärker gespannten Wasserfläche sofort ausgebreitet. Die Bewegung dauert so lange, als sich zwischen dem Alkoholgehalt des Chloroforms und Wassers kein Gleichgewichtszustand hergestellt hat. Benützt man Schwefelkohlenstoff statt Chloroform, dann tritt früher Ruhe ein. Der beschriebene Vorgang bietet, was hier gelegentlich bemerkt werden mag, ein instruktives Beispiel zu folgendem Satze. Stehen zwei Flüssigkeiten, die mit einander nicht mischbar sind, in Berührung und ist in beiden die gleiche dritte Flüssigkeit, der gleiche feste Körper

Digitized by Google

oder das gleiche Gas in Mischung bzw. Lösung vorhanden, so findet durch die Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten solange eine Diffusion des gemeinsamen Bestandteils statt, bis sich ein Gleichgewichtszustand im Koncentrationsgehalt der beiden Flüssigkeiten hergestellt hat, der abhängig ist von ihrer molekularen Verwandtschaft zum gemeinsamen Bestandteil, und bei einem Gas wahrscheinlich dann erreicht ist, wenn sich die von der Volumeneinheit der beiden Flüssigkeiten absorbierten Gasmengen wie die bezüglichen Absorptionskoëfficienten verhalten.

Am Schlusse dieses Abschnitts mag noch der leicht verständliche Satz angeführt werden: Ist in der Oberfläche eines Flüssigkeitsgemisches oder einer Lösung an verschiedenen Stellen die Koncentration verschieden gross, so erfolgt unter der Wirkung der oberflächlichen Spannungsdifferenzen in kurzer Zeit ein Ausgleich in der Koncentration der Oberfläche.

3. Die Ausbreitung von beschränkt mischbaren Flüssigkeiten. — Bei beschränkt oder nicht mischbaren Flüssigkeiten ist, wie G. Quincke (l. c.) gezeigt hat, die Spannung in der gemeinsamen Grenzfläche von Null verschieden. In diesem Fall von Ausbreitung einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1 gilt die Formel $a_{10} > a_{20} + a_{21}$. Ein bekanntes Beispiel hiefür ist die Ausbreitung von Oel auf Wasser. Ferner gehört hieher die von P. du Bois-Reymond[1]) besonders eingehend beschriebene unter Umständen stationäre Ausbreitung von Alkohol auf Oel. Wie leicht sich durch Ausbreitung zumeist unsichtbare Oel- oder Fetthäutchen auf Wasserflächen bilden, lässt sich bequem mittels des Russhäutchens zeigen, das man erhält, wenn man einen russhaltigen Alkoholtropfen auf eine Wasserfläche bringt. Ist diese rein, so wird das Häutchen von den niedersinkenden Dämpfen eines übergehaltenen Tropfens Alkohol leicht in Bewegung gesetzt. Berührt man aber nur mit dem Finger oder mit einem, nicht einmal künstlich eingefetteten Haar die Wasserfläche, so werden die

[1]) P. du Bois-Reymond. Pogg. Ann. 104. p. 193. 1858; 139. p. 262. 1870.

Digitized by Google

Russteilchen von der Berührungsstelle weggeschoben und bleiben dann fast ohne Empfindung für Alkoholdämpfe träg liegen.

4. Die Wirkung von Dämpfen auf die Oberflächenspannung. — Die Einwirkung von Dämpfen auf die Oberflächenspannung ist auf die Ausbreitung einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1 zurückzuführen. Hält man einen Tropfen von einer flüchtigen Flüssigkeit 2 über die Oberfläche einer anderen 1 mit grösserer Oberflächenspannung und grösserer spec. Dichte, so beginnt 1 unter dem Tropfen in der Oberfläche centrifugal zu strömen; ein auf 1 liegendes Russhäutchen wird gesprengt, leichte schwimmende Körper weichen vor dem Tropfen zurück. Es sinken nämlich von diesem Dämpfe auf die Oberfläche nieder, werden hier teilweise zu kleinen Linsen kondensiert, und durch deren Ausbreitung wird dann die bezeichnete Bewegung hervorgebracht. Ein sehr empfindliches Reagens auf die Einwirkung von Dämpfen ist das bereits mehrmals erwähnte Russhäutchen auf einer Wasserfläche. Dämpfe von einem Aethertropfen treiben es schon aus einer Entfernung von 2 cm in eilige Flucht, die Dämpfe eines dicht über die Oberfläche gehaltenen Petroleumtropfens vermögen es noch in Bewegung zu setzen.

5. Die Ausbreitung an der Kontaktfläche zweier Flüssigkeiten. — Eine Flüssigkeit 3 in Tropfengrösse an die Kontaktfläche der oberflächlich höher gespannten Flüssigkeiten 1 und 2 gebracht, breitet sich aus, wenn $a_{12} > a_{31} + a_{32}$. Ein Beispiel hiefür gibt folgender Versuch.

Die Oberflächenspannung von Alkohol mit hohem Procentgehalt ist kleiner als die von Petroleum und Wasser. Schichtet man auf Wasser Oel ungefähr 1 cm hoch und bringt man mittels eines Röhrchens, dessen eines Ende kapillar ausgezogen ist, einen Tropfen Alkohol, in dem Russ suspendiert ist, an die Grenzfläche von Oel und Wasser, so wird der Alkoholtropfen mit grosser Heftigkeit ausgebreitet. Man erkennt das an den auftretenden Strömungen, noch besser an der Bewegung der Russteilchen und an der Thatsache, dass sämtliche Russ-

Digitized by Google

teilchen zu einem Häutchen angeordnet in der Kontaktfläche liegen bleiben. Es ist für diesen Fall in der Formel $a_{12} > a_{31} + a_{32}$ die Spannung $a_{31} = 0$. Ein Beispiel, in dem sowohl a_{31} wie a_{32} gleich Null ist, bietet die Ausbreitung von Alkohol oder Aether an der Grenzfläche von Chloroform und Wasser.

Tropfen von Petroleum, besonders von solchem, das längere Zeit an der Luft gestanden hat, sinken in spec. leichterem Alkohol unter. An Russteilchen, die im Oel suspendiert sind, erkennt man, dass bald an dieser bald an jener Stelle der Kontaktfläche centrifugale Strömungen auftreten. Diese erklären sich so. An der Kontaktfläche von Oel und Alkohol bildet sich eine Mischung aus beiden. An manchen Stellen enthält diese mehr Alkohol als in der Umgebung und wird daher von der umliegenden stärker gespannten Oberfläche ausgebreitet.

Chloroformtropfen in Wasser zeigen an ihrer Oberfläche keine Ausbreitbewegungen. Das kommt daher, dass sich beide Flüssigkeiten so gut wie gar nicht mit einander mischen. Setzt man aber dem Chloroform etwas Alkohol zu, dann treten aus leicht ersichtlichen Gründen jene Ausbreitbewegungen auf.

6. Drei Versuche über Oberflächenspannung. — Am Schlusse dieses Abschnittes, in dem die Ausbreitung von Flüssigkeiten als Wirkung der Verschiedenheit der Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten behandelt wurde, mögen drei Versuche mitgeteilt werden, welche die Wirkung der Oberflächenspannung in verwandter Art zeigen.

Eine Kugel, etwa von Messing, die so präpariert ist, dass die eine Hälfte ihrer Oberfläche von Quecksilber benetzt wird, die andere nicht, stellt sich in Quecksilber, selbst wenn dafür gesorgt ist, dass ihr Schwerpunkt etwas nach der unbenetzten Seite hin liegt, immer so ein, dass ihre benetzte Seite nach unten zu liegen kommt. Wird sie zwangsweise so in das Quecksilber getaucht, dass der Grenzkreis zwischen der benetzten und unbenetzten Halbfläche vertikal steht, und überlässt man sie dann sich selbst, so fällt sie immer nach der benetzten Seite. Wie leicht zu sehen ist, erklärt sich das Verhalten der Kugel

Digitized by Google

ohne Schwierigkeit aus der Annahme einer Oberflächenspannung, welche die Grenzfläche einer Flüssigkeit auf ein Minimum zu reducieren trachtet.

Die Verschiedenheit der Oberflächenspannung von Wasser und Alkohol kann auf folgende Art demonstriert werden. Eine Metallschale wird durch Einlötung einer in der Mitte erhöhten Scheidewand in zwei Hälften geteilt. Bringt man in die eine derselben Wasser, in die andere Alkohol, so steigen an der Kante von Gefäss und Scheidewand unter der Wirkung der kapillaren Krümmung die Flüssigkeiten empor; bei genügender Füllung steigen sie so hoch, dass sie an dem Rande der Scheidewand in Spitzen zusammenstossen. Dann wird der Alkohol von der Wasserzunge in das Wasserbassin hinübergezogen. Das Ueberströmen des Alkohols macht man am besten durch Beimischen von Russ ersichtlich. Der Alkohol strömt selbst dann über, wenn er ein tieferes Niveau als Wasser hat. An der Scheidewand, wo sich beide Flüssigkeiten treffen, ist die stärker gespannte Oberfläche des Wassers an die schwächer gespannte des Alkohols geheftet; darum reisst jene diese an sich.

Aus der Oberflächenspannung resultiert in jedem Punkt einer gekrümmten Oberfläche in der Richtung der nach dem Innern der Wölbung gezogenen Normalen ein Druck, dessen Grösse gleiche $a\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ ist, wo R und R' die Hauptkrümmungsradien in dem betreffenden Punkt bezeichnen. Dieser Druck variiert demgemäss mit a. Das wird in folgendem Versuch gezeigt. In ein horizontal gelegtes Röhrchen mit entsprechendem Kaliber sei ein 0,5 bis 1 cm langer Cylinder einer Flüssigkeit gebracht, so dass dessen eine konkave Endfläche nahezu an dem einen Ende der Röhre liegt. Wird nun auf diese konkave Endfläche ein Tröpfchen einer Flüssigkeit mit niedrigerer Oberflächenspannung gebracht, so weicht der Flüssigkeitscylinder gegen das Innere der Röhre zurück, weil der Zug nach der nicht verunreinigten Endfläche stärker ist als nach der verunreinigten. Ein Cylinder aus Wasser weicht bereits vor Aetherdämpfen zurück; vor Petroleum zieht er sich erst schnell, dann mehrere Minuten lang sehr langsam zurück.

Digitized by Google

II. Ueber Erscheinungen, welche die Ausbreitung begleiten können.

Die nachfolgenden Mitteilungen machen nicht den Anspruch, das vorgesetzte Thema erschöpfend zu behandeln. Wer die hieher gehörigen Erscheinungen, soweit es möglich ist, in vollständiger Zahl kennen lernen will, der sei verwiesen auf eine grosse wertvolle Arbeit von G. Quincke,[1]) welche ausführlich eine ganze Reihe von Erscheinungen der bezeichneten Art behandelt.

1. Strömungen in der Oberfläche. — Bei der Ausbreitung einer Flüssigkeit hat man im allgemeinen Fall zu unterscheiden zwischen einer ausbreitenden (a_{12}) und zwei ausgebreiteten (a_{31} und a_{32}) Flächen. Die erste wird verkleinert, die zwei letzten werden vergrössert. Die ausbreitende Fläche wird dabei, ähnlich wie die Auszüge bei einem Fernrohr, zusammengeschoben, indem die Teile, die dem Ausbreitcentrum näher liegen, unter die entfernteren geschoben werden. Damit ist angedeutet, dass die ausbreitende Fläche nicht in ihrer Gesamtheit in allen ihren Punkten mit gleicher Geschwindigkeit von dem Ausbreitcentrum zurückweicht und erst am Gefässrand sich zusammenschiebt, sondern dass die Geschwindigkeit, mit welcher die das Ausbreitcentrum umgebenden Ringe unter die entfernteren geschoben werden, vom Centrum nach aussen schnell abnimmt.

Infolge des molekularen Zusammenhangs, der zwischen benachbarten Teilchen oder Schichten einer Flüssigkeit besteht, werden von der obersten bei der Ausbreitung zurückgezogenen Schicht die zunächst unter ihr liegenden mit fortgerissen. Ist daher die Masse der Flüssigkeit, an deren Oberfläche eine Ausbreitung erfolgt, verhältnismässig klein, so nimmt sie in allen ihren Teilen an der bezeichneten Bewegung teil. Bewirkt man z. B. an einem Tropfen eine Ausbreitung und sorgt dafür, dass diese nur in einer Richtung erfolgen kann, dann gerät der

[1]) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 580—642. 1888.

Digitized by Google

Tropfen mit der obersten Schicht in dieser Richtung in Rotation. Das ist z. B. bei einem unter Wasser liegenden Chloroform- oder Schwefelkohlenstofftropfen der Fall, wenn man Aether oder Alkohol am Rande des Tropfens aus einem kapillar ausgezogenen Röhrchen treten lässt, indem man dieses mehr in der Richtung einer Tangente als einer Normale zur Tropfenfläche hält.

Die bei der Ausbreitung auftretenden Bewegungen fester Teilchen in der Oberfläche von Flüssigkeiten kommen dadurch zu stande, dass die festen Teilchen von der zurückweichenden stärker gespannten Oberfläche mit fortgeführt oder fortgezogen werden. Ist auf einer Seite eines in einer Oberfläche schwimmenden festen Körpers die Spannung grösser als auf der entgegengesetzten, so bewegt sich der Körper nach der Seite mit grösserer Spannung. Auf diese Weise erklären sich die bekannten translatorischen und rotatorischen Bewegungen fester Körper auf Flüssigkeiten. Diese treten aus leicht ersichtlichen Gründen mit Lebhaftigkeit auch an grösseren Russstückchen auf, die in etwas Alkohol auf Wasser gebracht werden.

Wie in der ausbreitenden Flüssigkeitsfläche, so tritt auch in den ausgebreiteten, indem diese auseinander gezogen werden, eine centrifugale Strömung auf.

2. Strömungen im Innern der Flüssigkeiten. — Indem die ausbreitende Flüssigkeitsfläche beim Zurückweichen zusammengeschoben wird, entsteht eine von ihr ausgehende schief nach dem Innern gerichtete Strömung. Mit dieser kombiniert sich eine zweite, die im gleichen Sinne wirkt. Indem die ausgebreiteten Grenzflächen 31 und 32, die sowohl der Flüssigkeit 3 wie 1 bzw. 2 angehören, ausgebreitet werden, nehmen ihre Teilchen in der Richtung der Ausbreitung Bewegung an, wie bereits erwähnt. Die ihnen gegen das Innere der Flüssigkeiten benachbarten Teilchen werden von ihnen mit fortgerissen. Es entsteht so längs der Ausbreitfläche erstens eine centrifugale Strömung. An die Stelle der centrifugal fortgeführten Teilchen rücken dann, mehr oder weniger senkrecht

Digitized by Google

gegen die Ausbreitfläche strömend, andere weiter im Innern gelegene Teilchen; dadurch kommt zweitens eine zur Ausbreitfläche orthogonale Strömung zu stande. Die Kombination der einzeln aufgeführten Strömungen ergibt in jeder Flüssigkeit, die an der Ausbreitung beteiligt ist, folgende Cirkulation oder Wirbelbewegung. Vom Innern der Flüssigkeiten strömen orthogonal gegen die Ausbreitfläche die unter oder über dieser liegenden Flüssigkeitsteilchen, an dieser oder in der Nähe derselben biegen sie um, laufen längs derselben fort und biegen in geringer Entfernung vom Rand der ausgebreiteten Fläche gegen das Innere zurück, um nach einer weiteren Wendung, horizontal laufend, zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Ist die Masse der Flüssigkeit, an deren Oberfläche eine Ausbreitung erfolgt, verhältnismässig klein, dann nimmt die ganze Masse an der beschriebenen Wirbelbewegung teil. Man kann diesen Fall in schöner Weise an einem unter Wasser liegenden Chloroformtropfen verwirklichen, wenn man auf seiner Kuppe aus einem Röhrchen etwas Alkohol austreten lässt. Um die Bewegungen im Tropfen wahrnehmen zu können, setzt man zweckmässig dem Chloroform oder Alkohol Russteilchen bei.

Durch die eben behandelte orthogonal gegen die Ausbreitfläche gerichtete Strömung einer an der Ausbreitung beteiligten Flüssigkeit wird diese, soweit sie der Ausbreitfläche gegenüber liegt, gegen diese gleichsam hingesaugt. Es ist diese Strömung die Ursache verschiedener interessanter Erscheinungen.

Feste Teilchen, die in der betreffenden Flüssigkeitspartie suspendiert sind, scheinen sich unter der Wirkung von anziehenden Kräften der Ausbreitfläche zu nähern; indes ist ihre Bewegung nur ein Transport, herbeigeführt von der bezeichneten orthogonalen Strömung der suspendierenden Flüssigkeit. Aus der gleichen Ursache erklärt sich die bereits von Quincke behandelte scheinbare gegenseitige Anziehung von Oelkugeln, die in spec. leichterem Alkohol schweben. Wie bereits dargelegt, finden an der Oberfläche der Oelkugeln infolge der allerdings beschränkten Löslichkeit beider Flüssigkeiten in einander beständig Ausbreitbewegungen statt. Vermöge der-

Digitized by Google

selben saugen die Oelkugeln alkoholische Flüssigkeit an sich heran und mit dieser gegenseitig sich selbst.

Endlich erklärt sich aus der in Rede stehenden Strömung wohl auch die allerdings nur sehr niedrige plateauartige Erhebung des Teiles einer Flüssigkeit, auf dem eine Ausbreitung von einer sehr kleinen Menge einer anderen Flüssigkeit erfolgt. Auf einer Wasserfläche zeigt sich diese Erhebung z. B. schon unter einem übergehaltenen Aethertropfen, und wird dieser entsprechend auf und nieder bewegt, so gerät die Wasserfläche in eine wellenartige Bewegung.

3. Erscheinungen hervorgerufen durch Aenderung des Oberflächendruckes. — Quincke[1]) hat gezeigt, dass die Erniedrigung der Oberflächenspannung, die an einem Punkte der Oberfläche eines Sphäroids einer Flüssigkeit 2 in einer anderen 1 bei Einführung einer Flüssigkeit 3 sich zeigt, eine Ausbauchung des Sphäroids an der betreffenden Stelle und eine Bewegung desselben nach der Seite der Ausbauchung hervorbringt. Da nämlich die Krümmung in einem Punkte eines Sphäroids abhängig ist von dem dort herrschenden hydrostatischen Druck und der dort herrschenden Oberflächenspannung, so stellt sie sich dieser entsprechend her, wird z. B. grösser, wenn diese vorübergehend oder für längere Zeit herabgesetzt wird. Bevor diese Aenderung, die Herstellung eines Gleichgewichts in der Krümmung des Sphäroids erfolgt, ist, allerdings nur für sehr kurze Zeit, der Oberflächendruck auf der Seite desselben grösser, welche entgegengesetzt ist zu der oberflächlich niedriger gespannten Partie. Dieser Druck gibt daher für einen Moment dem Sphäroid einen Bewegungsantrieb nach der Seite hin, wo die Oberflächenspannung herabgesetzt ist. Während dieser Antrieb schnell vorübergeht, hält die Aenderung der Krümmung, d. h. die Ausbauchung an der oberflächlich niedriger gespannten Stelle so lange an, als die entsprechende Differenz in der Oberflächenspannung existiert. Die charakte-

[1]) Quincke. Wied. Ann. 35. p. 608—614. 1888.

Digitized by Google

risierte Deformation der Oberfläche lässt sich z. B. an hängenden Tropfen beobachten, wenn ihnen Dämpfe von Substanzen mit kleinerer Oberflächenspannung von unten her genähert werden. Neu mag in dieser Beziehung folgender Versuch sein. Lässt man auf ziemlich, aber nicht allzu fein gepulverten Schwefel, der auf einer Glasplatte liegen mag, vorsichtig einen Tropfen Wasser fliessen, so bleibt dieser in schön ausgebildeter Form als Tropfen liegen. Nähert man ihm von der Seite her einen Aethertropfen, so baucht er sich gegen diesen aus und nimmt eine mehr eiförmige Gestalt an. Hat man dafür gesorgt, dass der Wassertropfen auf einen sanften Abhang der aufgestreuten Schwefelschicht zu liegen kommt, und an seiner unteren Fläche keine grösseren Schwefelstückchen bei einer Bewegung sich ihm entgegenstellen, dann rollt er bei einer raschen seitlichen Annäherung (bis auf 1 mm) eines Aethertröpfchens gegen dieses und hat sich in dasselbe gestürzt, ehe man es zurückziehen kann.

4. Die Ausscheidung fester Teilchen an der Grenzfläche von Flüssigkeiten. — Es wurde bereits mehrmals die Ausscheidung von Russteilchen an der Grenzfläche von Flüssigkeiten erwähnt, und das sich dabei bildende Russhäutchen dazu benützt, um Schiebungen der Flüssigkeiten in den Grenzflächen sichtbar zu machen. Dieser Vorgang soll nun näher beschrieben und erklärt werden.

Um eine Ausscheidung von Russteilchen aus Alkohol auf Wasser zu erhalten, hat man Sorge zu tragen, dass der Russ in Alkohol möglichst fein verteilt ist. Dies erreicht man dadurch, dass man den Russ längere Zeit in Alkohol liegen lässt und ihn dann heftig aufschüttelt. Die mit Russ getrübten Alkoholtropfen darf man nicht aus zu grosser Höhe in das Wasser einfallen lassen; dieses muss eine reine Oberfläche besitzen. Je grösser der Procentgehalt des Alkohols ist, desto lebhafter und bedeutender ist die Abscheidung der Russteilchen.

Suspendiert man Kaolin oder Quecksilberchlorür in Alkohol und giesst einige Tropfen davon auf Wasser, dann tritt eben-

Digitized by Google

falls eine Abscheidung eines Teiles der suspendierten Körperchen an der Wasseroberfläche unter Bildung eines feinen weissen Häutchens ein. Doch ist in diesem Fall der Vorgang wegen des grösseren Gewichtes der festen Teilchen und wegen ihrer Farbe nicht so lebhaft und auffallend.

Statt mit Alkohol und Wasser lässt sich die Abscheidung der suspendierten Teilchen auch mit einer einzigen Flüssigkeit erzielen. Lässt man nämlich einige Tropfen heissen Wassers, die suspendierte Russteilchen enthalten, auf kaltes fallen, so werden aus dem heissen ebenfalls Russteilchen abgeschieden.

Wenn man Wassertropfen mit suspendierten Russteilchen auf Alkohol fallen lässt, so beobachtet man keine nennenswerte Abscheidung der letzteren. Das ist auch nicht der Fall, wenn man kaltes durch Russ getrübtes Wasser auf warmes tropfen lässt.

Die beschriebene Ausscheidung fester Teilchen aus einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1, die eine höhere Oberflächenspannung als 2 besitzt und mit dieser unbeschränkt mischbar ist, kommt offenbar durch die Wirkung der Oberflächenspannung zu stande, wie nun gezeigt werden soll. Bringt man eine sorgfältig gereinigte Kugel, etwa eine Messingkugel, so tief in Wasser mit reiner Oberfläche, dass von ihr eben noch eine Haube über dem Wasserspiegel liegt, aber bereits von einer Wasserhaut überzogen ist, lässt man dann auf den höchsten Punkt der Haube einen kleinen Tropfen Alkohol fliessen, so beobachtet man folgendes. Der Alkoholtropfen wird in heftiger centrifugaler Bewegung von der Kugelhaube herab und auseinander gerissen, so dass diese nach wenigen Sekunden von aller Flüssigkeit gesäubert ist und sie daher trocken erscheint. Das umgebende Wasser begrenzt sie dann für einige Zeit in konvexer Wölbung und steigt nur langsam wieder an ihr empor, um sie schliesslich wieder zu überziehen.

Bringt man nach der angegebenen Art die Kugel in Alkohol und setzt auf die hervorragende Haube, die nunmehr mit einer Alkoholhaut überzogen ist, einen Wassertropfen, so wird dieser nicht in centrifugaler Bewegung in die umgebende Flüssigkeit hinabgezogen, sondern bleibt nach einer anfäng-

Digitized by Google

lichen nach seinem Innern gerichteten Zuckung in Tropfenform auf der Kugelhaube liegen.

Die beschriebenen Erscheinungen erklären sich nach den weiter oben mitgeteilten Ansichten und Versuchen aus der Verschiedenheit der Oberflächenspannungen des Wassers und Alkohols. Da nämlich dieser eine kleinere Oberflächenspannung als jenes besitzt, so wird er von der Wasserhaut auseinandergezogen und solange ausgebreitet, bis überall an der freien Oberfläche die Spannung gleich gross ist.

Der Vorgang, der sich beim ersten Versuch mit der Messingkugel abspielt, stellt einen spec. Fall des allgemeinen Satzes dar: Einem festen Körper, der zum Teil in eine Flüssigkeit von gewisser Oberflächenspannung getaucht, im übrigen mit einer Schicht oder Haut einer anderen Flüssigkeit mit niedrigerer Oberflächenspannung bedeckt ist, wird diese Haut oder Schicht, sobald beide Flüssigkeiten zum Kontakt kommen, von der ersten Flüssigkeit abgezogen.

Nimmt man zu diesem Satz die Thatsache, dass leichte Körperchen in der Oberfläche einer Flüssigkeit festgehalten werden und, wenn sie einander nahe kommen, sich scheinbar anziehen, dann ist die beschriebene Abscheidung eines Russhäutchens genügend aufgeklärt.

Eine oberflächliche Abscheidung von Russteilchen erhält man auch, wenn man auf alkoholisches Wasser einen Chloroformtropfen legt. Man verfährt zu diesem Zweck am besten so. In Wasser lässt man aus einer Höhe von ungefähr 1 dm einige Alkoholtropfen fallen, die mit Russ stark getrübt sind. Es scheidet sich dann nur ein kleiner Teil der Russkörperchen aus; die grössere Zahl derselben verteilt sich infolge der Mischung des Alkohols mit dem Wasser in diesem. Legt man dann einen Chloroformtropfen auf das Wasser, dann werden unter den bekannten lebhaften Strömungen im Wasser und Chloroform Russteilchen in grosser Zahl an der Kontaktfläche beider Flüssigkeiten ausgeschieden, schiessen in dieser zum Rande der Chloroformlinse empor und werden hier auf der Wasserfläche centrifugal fortgeführt. Infolge der Strömungen im Wasser und der

Digitized by Google

damit verbundenen fortgesetzten Ausscheidung von Russ wird das Wasser allmählich in seiner obersten Schicht vom Russ gesäubert, während die unter dieser liegende ihre dunkle Russschattierung beibehält.

Die Beobachtung, dass Chloroform Russteilchen aus Wasser vor allem dann zur Abscheidung bringen kann, wenn das Wasser mit Alkohol versetzt ist, legt die Vermutung nahe, dass zwischen der Ausscheidung fester Teilchen aus Alkohol auf Wasser und dem eben behandelten Fall insoferne eine Verwandtschaft vorliegt, als hier wie dort eine Ausbreitung der Flüssigkeit, welche die Russteilchen suspendiert, und damit ein Abziehen jener von diesen erfolgt. Diese Vermutung wird durch folgende Versuche bestätigt.

Ein Chloroformtropfen unter Wasser, in dem Russteilchen suspendiert sind, zeigt an seiner Oberfläche keine Abscheidung von Russ. Dagegen tritt diese Erscheinung ein, wenn dem Wasser oder dem Chloroform Alkohol beigegeben wird. Nunmehr bilden sich nämlich an der Grenzfläche von Wasser und Chloroform russhaltige Gemische von Chloroform und Alkohol mit verschiedener Koncentration. Die an Alkohol reicheren und darum niedriger gespannten Mischungspartien werden ausgebreitet und von der Oberfläche ihrer Russteilchen herabgezogen; diese bleiben dann in Kontaktfläche von Chloroform und Wasser liegen. Durch die bei der Ausbreitung auftretende orthogonal zur Ausbreitfläche gerichtete Strömung werden neue Russteilchen in die Nähe der Kontaktfläche geführt und hier durch Ausbreitung ihrer sie führenden Flüssigkeit abgesetzt. Auf diese Weise klärt sich die durch Russ getrübte Flüssigkeit allmählich.

Besonders schön ist der beschriebene Vorgang an kleinen Oelkugeln zu beobachten, die mit Russteilchen versetzt sind und in spec. etwas leichterem Alkohol schweben. Unter lebhaften radialen und centrifugalen Strömungen an der Oberfläche der Oelkugeln werden nach kurzer Zeit fast alle Russteilchen aus ihnen in die Kontaktfläche von Oel und Alkohol ausgeschieden. Hier bilden sie eine ziemlich dicke Russhaut,

Digitized by Google

da wegen der Löslichkeit von Oel und Alkohol in einander die Grenzfläche dieser beiden Flüssigkeiten nicht scharf ausgebildet ist. Diese wird um so schärfer, je mehr Wasser man dem Alkohol zusetzt. Dann steigen die Oelkugeln, die sich mit der Zeit zu einer einzigen vereinigen, an die freie Oberfläche, und die ausgeschiedenen Russteilchen ordnen sich dann zu einem sehr feinen Häutchen an der Grenzfläche von Oel und dem Gemisch aus Wasser und Alkohol.

Digitized by Google

Sitzung vom 5. Februar 1898.

1. Herr Emil Selenka hielt einen Vortrag: „Ueber die Architektur des Orangutan-Schädels.“ Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Eugen v. Lommel macht eine Mittheilung: „Ueber aus Kalkspath und Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen.“

3. Herr Eugen v. Lommel legt eine Abhandlung des Herrn Professor Paul Glan in Berlin: „Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektrizität“ vor.

Ueber aus Kalkspath und Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen.

Von **E. v. Lommel.**

(*Eingelaufen 5. Februar.*)

In den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin hat Herr C. Leiss[1]) über ein neues, aus Kalkspath und Glas zusammengesetztes Nicolsches Prisma berichtet. Solche Prismen sind schon seit mehr als zwei Jahren in meinem Besitz; sie wurden Ende 1895 von der Firma Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. in bekannter vorzüglicher Ausführung nach meinen Angaben hergestellt. Schon etwa ein Jahr früher hatte Herr Strübin, Optiker in Basel, solche Prismen verfertigt, ebenfalls von der Absicht geleitet, die Hälfte des immer kostbarer werdenden Kalkspathmaterials zu ersparen.

[1]) Sitzung vom 21. Oktober 1897.

Digitized by Google

Ein so zusammengesetztes Prisma kommt begreiflicherweise einem echten Nicol an Vollkommenheit nicht gleich. Das Gesichtsfeld erscheint verzerrt, weil sich die aussergewöhnliche Brechung des Kalkspaths durch die gewöhnliche des Glases nicht für alle Strahlen des nutzbaren Strahlenkegels gleichzeitig aufheben lässt. Die Dimensionen des Gesichtsfeldes parallel zum Hauptschnitt erscheinen gegenüber jenen senkrecht zum Hauptschnitt verkürzt. Deshalb genügt auch das neue Prisma der von Nicol[1]) angegebenen Probe für die richtige Konstruktion seiner Prismen nicht. Betrachtet man nämlich durch ein echtes Nicol ein Fensterkreuz aus einer Entfernung von 1 bis 2 m, so bleibt es unbeweglich und rechtwinklig, wie man auch das Prisma um seine Achse drehen mag. Durch das neue Prisma dagegen erscheinen die Arme des Kreuzes nur rechtwinklig, wenn der Hauptschnitt des Kalkspaths mit einem derselben parallel ist; beim Drehen des Prismas aber werden die Quadranten, durch welche der Hauptschnitt des Kalkspaths geht, stumpfwinklig, die beiden andern spitzwinklig, und die Kreuzesarme erscheinen ein wenig gekrümmt. Zugleich ist das Gesichtsfeld nicht vollkommen achromatisch, ein Uebelstand, der übrigens bei Anwendung von homogenem Licht (z. B. Natriumlicht) wegfällt.

Wegen dieser Mängel, welche die Brauchbarkeit des künstlichen Nicols zu Messungszwecken in Frage stellen, unterliess ich damals die Veröffentlichung. Nachdem aber der Gegenstand nunmehr zur Sprache gekommen ist, sei es mir gestattet, die Gesichtspunkte, welche mich bei der Konstruktion dieser Prismen leiteten, in Kürze darzulegen.

Indem wir die Betrachtung auf den Hauptschnitt des Krystalles einschränken, wählen wir in diesem die Rotationsachse $2b$ der ellipsoidischen Wellenschale als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, mit welcher die Eintrittsfläche des Krystalls den Winkel a bilde. Zu der aus der Luft unter dem Winkel i einfallenden Welle ergibt sich die im Krystall aussergewöhn-

[1]) Nicol, Pogg. Ann. Bd. 49, p. 239. 1840.

Digitized by Google

lich gebrochene Welle als die vom Punkt $x_1 = \cos a / \sin i$, $y_1 = \sin a / \sin i$ der Eintrittsfläche an die Ellipse mit den Halbachsen a und b gelegte Tangente. Die vom Mittelpunkt der Ellipse (Koordinatenanfang) auf diese Tangente gefällte Senkrechte ϱ stellt alsdann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle dar. Wählen wir nun die Glassorte so, dass der Radius ihrer kugelförmigen Wellenfläche $= \varrho$, oder ihr Brechungsindex $n = 1/\varrho$ ist, so geht jene ebene Welle aus dem Krystall ohne Richtungsänderung in das Glas über, und tritt aus der mit der Eintrittsfläche parallelen Endfläche unter demselben Winkel i wieder in die Luft aus. Die Bedingung, dass ein an der vorderen (Spath-)Fläche unter beliebigem Einfallswinkel i eintretender (senkrecht zum Hauptschnitt polarisierter) Strahl an der hinteren (Glas-)Fläche mit ungeänderter Richtung austrete, fordert also, dass der Brechungsindex des Glases

$$n = \sqrt{\frac{x'^2}{b^4} + \frac{y'^2}{a^4}}$$

sei, wo x', y' die Koordinaten des Berührungspunktes der Ellipse und jener Tangente sind, und sich daher aus den Gleichungen

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'}{b^2}\cos a + \frac{y'}{a^2}\sin a = \sin i$$

ergeben. Man kann nach Einsetzung dieser Werte den Ausdruck für n leicht wie folgt umformen:

$$n = \sqrt{\sin^2 i + P^2},$$

wo

$$PN = \sqrt{N - a^2 b^2 \sin^2 i} - (a^2 - b^2) \sin a \cos a \sin i$$

und

$$N = a^2 \cos^2 a + b^2 \sin^2 a$$

ist. Die Gleichungen gelten, unter welcher Neigung zur Krystallfläche die zum Hauptschnitt senkrechte Schnittfläche auch geführt sein mag.

Digitized by Google

Diese Bedingung kann, wie man sieht, durch einen einfach brechenden Körper mit konstantem n jeweils nur für einen einzigen Einfallswinkel befriedigt werden. Die erwähnte Verzerrung des Gesichtsfeldes ist die notwendige Folge davon.

Man kann aber wenigstens dafür sorgen, dass der mit den Längskanten des Prismas parallel einfallende Strahl (der Achsenstrahl) beim Austritt seine Richtung beibehalte, so dass ein anvisierter ferner Punkt beim Drehen des Prismas in seiner Lage verharrt.

Ist die Kalkspathfläche eine natürliche, so ist der Einfallswinkel des Achsenstrahls $i = 19^0\,8'$ ($109^0\,8' - 90^0$), der Winkel der optischen Achse mit jener Fläche $a = 45^0\,23'$, ferner für Natriumlicht $a = 0{,}67270$, $b = 0{,}60297$. Danach berechnet sich $n = 1{,}5321$. Für die Linie B ($a = 0{,}67381$, $b = 0{,}60547$) findet man $n = 1{,}5287$, und für die Linie F ($a = 0{,}67077$, $b = 0{,}59954$) $n = 1{,}5377$.

Wählt man also ein Crownglas, dessen Brechungsverhältnisse sind:

$$B)\ 1{,}5287 \quad D)\ 1{,}5321 \quad F)\ 1{,}5377\ ^{1})$$

so erleidet der Achsenstrahl nicht nur keine Richtungsänderung, sondern auch keine Farbenzerstreuung. Für ein mit dem Achsenstrahl paralleles Strahlenbündel ist sonach das neue Prisma ganz tadellos. Aber auch in anderen Fällen, so lange es sich nicht um Messungen handelt, z. B. zur subjektiven Beobachtung und zur objektiven Darstellung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation, kann das Prisma, insbesondere als Polarisator, vorteilhaft verwendet werden.

Bisher wurde angenommen, dass die Kalkspathhälfte des Prismas der Lichtquelle zugewendet sei. Die gewöhnlich gebrochenen, im Hauptschnitt polarisirten Strahlen werden als-

---

[1]) Ein Crownglas von Guinand hat nach Messungen von Dutirou die Indices

$$B)\ 1{,}52805, \quad D)\ 1{,}53173, \quad F)\ 1{,}53825,$$

welche den obigen sehr nahe kommen.

Digitized by Google

dann wie bei dem echten Nicol durch totale Reflexion an der Kanadabalsamschicht beseitigt.

Man kann aber das Prisma ebensogut auch umgekehrt, die Glashälfte voran, gebrauchen. Die aussergewöhnlichen Strahlen gehen dann auf denselben nur umgekehrten Wegen durch das Prisma durch. Die im Hauptschnitt polarisierten Strahlen dagegen dringen durch die Kittschicht in die Kalkspathhälfte und werden an deren Hinterfläche zum Teil nach innen total reflektiert, zum Teil unter starker Ablenkung in die Luft hinaus gebrochen. Zwischen dem Einfallswinkel i an der Glasfläche und dem Austrittswinkel i' an der Spathfläche besteht, wenn die Schnittfläche senkrecht zu den Endflächen geführt ist, die Beziehung:

$$\sin^2 i' = \sin^2 i + n_\omega^2 - n^2,$$

wenn n_ω den Brechungsindex des gewöhnlichen Strahles in Kalkspath, n wie vorhin den Brechungsindex des Glases bezeichnet.

Nach dieser Formel bestimmt sich der kleinste Austrittswinkel der gewöhnlich gebrochenen Strahlen (für $i = o$) aus

$$\sin^2 i' = n_\omega^2 - n^2$$

wie folgt:

$$B)\ 38^0\,42' \quad D)\ 39^0\,25' \quad F)\ 40^0\,12'.$$

Der Einfallswinkel, bei welchem an der Spathfläche die totale Reflexion beginnt ($i' = 90$), ergibt sich aus der Gleichung

$$\cos^2 i = n_\omega^2 - n^2;$$

er ist das Complement des vorigen, also beziehungsweise $51^0\,18'$, $50^0\,35'$, $49^0\,48'$; Strahlen, welche unter grösseren Einfallswinkeln auf die vordere (Glas-)Fläche treffen, treten aus der Hinterfläche nicht mehr aus. Die gewöhnlich gebrochenen Strahlen, welche aus der Hinterfläche noch austreten, liegen also (für Natriumlicht) zwischen $i' = 39^0\,25'$ und $i' = 90^0$; sie entsprechen einfallenden Strahlen zwischen $i = o$ und $i = 50^0\,35'$, während alle zwischen $i = 50^0\,35'$ und $i = 90^0$ einfallenden

Strahlen nach innen total reflektiert werden. Jene noch austretenden ordinären Strahlen bilden ein (bei Benutzung des vollen Gssichtsfeldes unreines) Spektrum, welches aber so stark zur Seite gelenkt ist, dass es die Beobachtung in keiner Weise hindert; für Natriumlicht z. B. beträgt die Ablenkung gegen den Axenstrahl $39^0\,25' - 19^0\,8' = 20^0\,17'$. Bei diesem Gebrauche (Glas voran) wirkt das neue Prisma eigentlich ähnlich wie ein achromatisches Kalkspathprisma, das aber wegen der weit grösseren Ablenkung der ordinären Strahlen nach Art eines Nicols verwendbar ist.

Digitized by Google

Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektrizität.

Von **Paul Glan.**

(*Eingelaufen 5. Februar.*)

Die Grenze eines Körpers habe die Gleichung

$$\omega = \psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{o}),$$

in der $\mathfrak{g}$ die Länge einer geodätischen Linie seiner Oberfläche von einem Punkte derselben aus und $\mathfrak{o}$ den Winkel bedeutet, den diese Linie im Anfangspunkte von $\mathfrak{g}$ mit einer bestimmten Geodätischen bildet. Von einem Punkte einer solchen Linie mag nach dem Innern des Körpers in der Richtung ihrer Hauptnormale der Einheitsvektor ν gehen, in der Richtung ihrer Tangente und zwar nach der Seite wachsender Länge der Einheitsvektor τ und in der Binormalen liegend der Einheitsvektor ι; es sei die Drehung um ν von τ nach ι rechtsläufig oder positiv. Ein Vektor im Raume kann in der Form

$$\omega = \psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{o}) + n\nu$$

gegeben sein, in der n ein Skalar ist. Es ist weiter

$$\tau = UD_{\mathfrak{g}}\psi, \quad \iota = \pm UD_{\mathfrak{o}}\psi, \quad \nu = \pm UVD_{\mathfrak{g}}\psi\, D_{\mathfrak{o}}\psi.$$

Das Vorzeichen ist in den Ausdrücken für ι und ν so zu nehmen, dass τ, ι, ν die zuvor angegebene Lage zu einander haben.

Der Zuwachs Δa_1, Δa_2, Δa_3, den die Vektoren der elastischen Kräfte bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung

Digitized by Google

$dm_1, \ldots dt$ im Zeitelement dt erleiden, soll nun in seiner Abhängigkeit von der Zeit in Betracht gezogen werden, in der sie erfolgt. Ein bestimmter Zustand ist dann durch die ihm zukommenden Werte der Formvariabeln, der Temperatur und der Zeit charakterisiert, in welcher sie ausgeführt ward. Es wird, zum Beispiel,

$$A a_1 = \varphi\,(m_1, \ldots n_3, \mathrm{t}, t, dm_1, \ldots dn_3, d\mathrm{t}, dt).$$

Die Entwickelung nach $dm_1, \ldots dt$ und alleinige Berücksichtigung der Glieder mit den ersten Potenzen dieser Grössen, welche erlaubt ist, wie früher in diesen Untersuchungen erläutert ward, wenn sich a_1 nur wenig und stetig mit $m_1, \ldots \mathrm{t}$ ändert, giebt

$$A a_1 = \mu_1' \, dm_1 + \mu_1'' \, dm_2 + \mu_1''' \, dm_3 + \nu_1' \, dn_1 + \nu_1'' \, dn_2 + \nu_1''' \, dn_3 + \chi_1 \, dt.$$

Hier sind die vektor Faktoren vektor Funktionen von $m_1, \ldots \mathrm{t}, t, dt$. Sie sind nach den vorliegenden Erfahrungen, wie früher ausgeführt ist, entwickelbar jedenfalls bis zu den Gliedern mit $m_1, \ldots n_3$ anzusehen und es können dann bei der Kleinheit von $m_1, \ldots n_3$ nur die von den Formvariabeln unabhängigen Glieder dieser Entwickelungen zunächst in Betracht gezogen werden. Diese nur von t, t und dem Zeitelement dt abhängigen Vektoren sollen $\mu_1', \ldots \chi_1$ von jetzt sein. Bei raschen periodischen Formänderungen können wir, da sich bei mehreren solchen die Temperatur nur wenig infolge derselben ändert und sich nach dem bisher Bekannten die elastischen Konstanten im allgemeinen in geringem Masse mit der Temperatur verändern, für kürzere Zeit die Aenderung der Temperatur t ausser Acht lassen in Bezug auf ihren Einfluss auf die Vektoren $\mu_1', \ldots \chi_1$. Da ferner nach mehreren raschen periodischen Aenderungen der Form keine Veränderung des Stoffes im allgemeinen einzutreten pflegt, wollen wir die elastischen Vektoren $\mu_1', \ldots \chi_1$ periodisch veränderlich nehmen. Die Dauer ihrer Periode sei $4:h$ und gleich derjenigen der Formänderung. Die Vektoren $\mu_1', \ldots \nu_1'''$ mögen hier so bestimmt werden wie zuvor in diesen Abhandlungen bei langsamen Aenderungen;

Digitized by Google

nun sind jedoch ihre elastischen Koeffizienten periodische Funktionen von $4:h$ und ein elastischer Skalar wie e_1 dann darstellbar in der Form:

$$e_1 = E_1 + E_1' \sin\left(\frac{\pi h t}{2} + U_1'\right) + E_1'' \sin\left(2 \cdot \frac{\pi h t}{2} + U_1''\right) + \ldots$$

und es sind $E_1, \ldots U_1', \ldots$ abhängig von h. Es sollen nur die ersten Glieder dieser Reihen vorläufig in Betracht gezogen werden.

Da die innere elastische Kraft dieselbe bleibt, wenn sich bei konstanten äusseren Kräften die Formvariabeln um $d_t m_1, \ldots d_t n_3$ ändern, wie es einer Aenderung der Temperatur um dt entspricht, folgt zum Beispiel,

$$\chi_1 dt = -\mu_1' d_t m_1 - \mu_1'' d_t m_2 - \mu_1''' d_t m_3 - \nu_1' d_t n_1 - \nu_1'' d_t n_2 - \nu_1''' d_t n_3.$$

Die thermischen Ausdehnungsindizes für einen bestimmten Zustand, der nun durch seine Formvariabeln, Temperatur und die Zeit, in der er entstanden, zu charakterisieren ist, ergeben sich dann nach Früherem in der Form:

$$a = a_o + a_{m_1} m_1 + a_{m_2} m_2 + a_{m_3} m_3 + a_{n_1} n_1 + a_{n_2} n_2 + a_{n_3} n_3,$$

und es sind $a_o, \ldots a_{n_3}$ Funktionen von t, t, dt ähnlich den elastischen Skalaren zu behandeln, wie die Leitfähigkeit für Wärme k. In Kristallen sind beide thermischen Indizes von der Richtung im allgemeinen abhängig.

Die Gleichung zur Bestimmung des Wärmeverbrauchs einer unendlich kleinen Zustandsänderung kann die frühere bleiben; es ist die spezifische Wärme bei konstanter Form dann so wie zuvor die elastischen Skalare und thermischen Ausdehnungsindizes zu betrachten.

Für die Grenze kann weiter der zu ihr senkrechte Wärmefluss unendlich nahe ihren beiden Seiten und nach derselben Richtung genommen gleich gesetzt werden. Dies ergiebt für $\lim n = 0$:

Digitized by Google

$$(k_1 dt_{\omega_1} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_1} + k_2 dt_{\omega_2} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_2} + k_3 dt_{\omega_3} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_3})_{n>0}$$
$$= (k_1 dt_{\omega_1} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_1} + k_2 dt_{\omega_2} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_2} + k_3 dt_{\omega_3} S\varphi\nu U d\varphi_{\omega_3})_{n<0};$$

es ist $\varphi\nu$ das Lot zu ihrer Grenze bei der Formänderung $\varphi(\omega, t)$.

Für einen nichtkristallischen Stoff von unendlich grosser Ausdehnung haben die Vorgänge an der unendlich entfernten Grenze keinen zu beachtenden Einfluss auf das im Endlichen vor sich Gehende und hier Betrachtete und können unbeachtet bleiben. Es mag die folgende Bewegung geprüft werden:

$$\varrho = \omega + \tau g \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g}:4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)} (\pm 1 + S\iota^{\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht}).$$

Der variable Vektor $(\varrho - \omega)$ ist die Verschiebung eines Teilchens; τ, ι, ν stellt ein System dreier zu einander rechtwinkligen Einheitsvektoren dar und die Drehung um τ von ι nach ν ist rechtläufig und positiv. Eine Länge $\mathfrak{g}$ ist in der Richtung von τ vom Vektorenanfangspunkte aus genommen. Die Bewegung erfolgt in ebenen Wellen mit Längsschwingungen, welche in der Richtung von τ fortschreiten, dabei absorbiert werden und mit der Zeit verlöschen, während die Ruhelage an einem Endpunkte ihrer Bahn liegt. Sie liegt für den der fortlaufenden Welle Entgegensehenden im hinteren Teile der Schwingungsbahn, wenn + vor 1 genommen wird, im vorderen bei — vor 1. Die Schwingungen und g sollen sehr klein sein. Es werden die Formvariabeln

$$m_1 = -g \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g}:4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)} \left[(\pm 1 + \cos) \left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{2\mathfrak{l}} \right) + \frac{\pi}{2\mathfrak{l}} \sin \right],$$

$m_2 = m_3 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Es bedeuten hier und im folgenden cos und sin abkürzend $\cos \frac{\pi}{2} (\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)$ und $\sin \frac{\pi}{2} (\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)$.

Die Vektoren der elastischen Kräfte werden

$$a_1 = \tau \left[-m_1 V \frac{(4V - E)}{3V - E} + \frac{a_0 E}{3 - E:V} (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0) \right],$$

$$a_2 = \iota \left[m_1 V \frac{(2V - E)}{3V - E} + \frac{a_0 E (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)}{3 - E:V} \right],$$

$$a_3 = \nu \left[m_1 V \frac{(2V - E)}{3V - E} + \frac{a_0 E (\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)}{3 - E:V} \right],$$

Digitized by Google

und die Gleichung zur Bestimmung der Temperatur wird, da hier die Temperatur, allein durch die betrachteten Wellen geändert, in jeder Ebene senkrecht zur Richtung von τ in jedem Punkte dieselbe sein muss,

$$D_t \mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{T}\, a_0 E}{s\, c_g\, \mathfrak{a}\,(3 - E : V)} D_t\, m_1 + \frac{k}{s\, c_g} D_{\mathfrak{g}}^2 \mathfrak{T}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0\, \varepsilon^{f(\mathfrak{g},\, t)},$$

$$f(\mathfrak{g},t) = -\frac{a_0 E}{s c_g \mathfrak{a}(3 - E : V)}\left[m_1 + \int \frac{k}{s c_g} D_{\mathfrak{g}}^2 m_1 dt + \int \frac{k}{s c_g} dt \int \frac{k}{s c_g} D_{\mathfrak{g}}^4 m_1 dt + \ldots\right]$$

und es sind nur die in Bezug auf g von der ersten Ordnung sich ergebenden Glieder in Betracht gezogen. Es bezeichnen dann hier k und c_g den von den Formvariabeln unabhängigen Teil dieser Grössen und es soll dann für c_g der Wert von c_v für langsame Steigerung der Temperatur genommen werden. Die Bewegungsgleichung für das Innere ist dann

$$s\, D_t^2\, \varrho = \tau\left[\frac{V(4\,V - E)}{3\,V - E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s\, c_v\, \mathfrak{a}\,(3 - E : V)^2}\right] D_{\mathfrak{g},t}^2\, m_1$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2 \tau}{s c_v \mathfrak{a}(3 - E : V)^2} \cdot \left[\frac{k}{s\, c_v} D_{\mathfrak{g}}^3 m_1 + \frac{k}{s c_v} \int \frac{k}{s\, c_v} D_g^5\, m_1\, dt + \ldots\right].$$

In dieser Gleichung, die für alle Werte der Zeit t gelten soll, müssen dann nach Fortlassung des gemeinsamen Faktors

$$\tau\, g\, \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g} : 4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g} : \mathfrak{l} - h t)}$$

die von der Zeit unabhängigen Glieder und die Koeffizienten von cos und sin einzeln null sein. Dies führt zu den drei Gleichungen, wenn für den thermischen Leitungsindex k und die spezifische Wärme bei konstantem Volumen c_v nur der von den Formvariabeln unabhängige Teil genommen und dieser von der Entstehungszeit eines Zustandes unabhängig betrachtet wird,

$$-s\frac{\mathfrak{j}'^3 h^3}{64} = -\left[\frac{V(4\,V - E)}{3\,V - E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3 - E : V)^2}\right] \frac{\mathfrak{j}' h}{4}\left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\,\mathfrak{l}}\right)^2$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3 - E : V)^2}\left[\frac{k}{s c_v} \cdot \left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\,\mathfrak{l}}\right)^4 - \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2 \frac{4}{\mathfrak{j}' h}\left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\,\mathfrak{l}}\right)^6 + \ldots\right],$$

Digitized by Google

$$-s\frac{\mathfrak{j}' h^3}{64}+3s\pi^2\frac{\mathfrak{j}' h^3}{16}$$

$$=\left[\frac{V(4V-E)}{3V-E}+\frac{\mathfrak{T}a_0^2E^2}{sc_v\mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]\left[-\frac{\mathfrak{j}'h}{4}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^2+\frac{\pi^2h}{(4\mathfrak{l})^2}(\mathfrak{j}'-2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'))\right]$$

$$+\frac{\mathfrak{T}a_0^2E^2}{sc_v\mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left[\frac{k}{sc_v}\left(\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^4+\frac{16\pi^4}{(4\mathfrak{l})^4}-\frac{24(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2\pi^2}{(4\mathfrak{l})^4}\right)\right.$$

$$+\left(\frac{k}{sc_v}\right)^2\left[-\frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2h}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^6-\frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2h}\left(\frac{240\pi^4(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2}{(4\mathfrak{l})^6}-\frac{60\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^4}{(4\mathfrak{l})^6}-\frac{64\pi^6}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{\pi h}\left(\frac{12\pi(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^5}{(4\mathfrak{l})^6}-\frac{160\pi^3(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3}{(4\mathfrak{l})^6}+\frac{192\pi^5(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right]:\left(\frac{\mathfrak{j}'^2}{4\pi^2}+1\right)+\ldots\right],$$

$$\frac{3}{32}s\pi\mathfrak{j}'^2h^3-\frac{s\pi^3h^3}{8}$$

$$=-\left[\frac{V(4V-E)}{3V-E}+\frac{\mathfrak{T}a_0^2E^2}{sc_v\mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]\frac{h\pi}{(4\mathfrak{l})^2}\left[\mathfrak{j}'(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2+2\pi^2\right]$$

$$+\frac{\mathfrak{T}a_0^2E^2}{sc_v\mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left[\frac{k}{sc_v}\frac{8\pi}{(4\mathfrak{l})^4}\cdot((\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3-4\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'))\right.$$

$$+\left(\frac{k}{sc_v}\right)^2\left(\frac{-2}{\pi h}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^6-\frac{2}{\pi h}\left(\frac{240\pi^4}{(4\mathfrak{l})^6}\cdot(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2-\frac{60\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^4}{(4\mathfrak{l})^6}-\frac{64\pi^6}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2h}\left(\frac{12\pi(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^5}{(4\mathfrak{l})^6}-\frac{160\pi^3(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3}{(4\mathfrak{l})^6}+\frac{192\pi^5(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right):\left(\frac{\mathfrak{j}'^2}{4\pi^2}+1\right)+\ldots\right].$$

Es sollen nun Wellenlängen von der Ordnung der Lichtwellen in Betracht gezogen werden, die schwache Absorption erleiden. Dann ist $(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')$ klein und es folgt aus der ersten Gleichung, wenn die Glieder mit der vierten und sechsten Potenz des Vernichtungsindex fortbleiben,

$$\frac{\mathfrak{j}'h}{4}=\left(\frac{\mathfrak{j}'-\mathfrak{j}}{4\mathfrak{l}}\right)\left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)}+\frac{\mathfrak{T}a_0^2E^2}{s^2c_v\mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

In der dritten Gleichung sollen auch nur ausser den vom Vernichtungsindex unabhängigen Gliedern die mit seiner ersten

Digitized by Google

Potenz berücksichtigt werden; es wird dann, wenn G die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet:

$$G^2 = \left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)} + \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]$$

$$+ \frac{4\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left[\frac{k}{s c_v G}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right) - \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{G^2(4\mathfrak{l})^2}\right].$$

In erster Näherung braucht nur das erste Glied der rechten Seite der letzten Gleichung gerechnet zu werden, und es ergiebt sich:

$$G = \left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)} + \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Erlöschungsindex wird

$$\frac{\mathfrak{j}' h}{4} = \left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right) G,$$

und danach der Erlöschungsindex für eine Schwingung:

$$\mathfrak{j}' = \mathfrak{j} : 2.$$

Aus der zweiten, aus der Bewegungsgleichung für das Innere sich ergebenden Gleichung folgt mit demselben Grade der Annäherung wie bisher,

$$\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}} = \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2} \frac{k\pi^2}{s c_v G^3 (4\mathfrak{l})^2}$$

$$\left[1 - \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2 \pi^2 7}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left(\frac{k}{s c_v}\right)^2 \frac{1}{G^4 (4\mathfrak{l})^2}\right]^{-1},$$

oder es wird der Vernichtungsindez, da das zweite Glied der eckigen Klammer klein gegen deren erstes ist, wenn N den Brechungsindex dieser Strahlen gegen den Weltraum bezeichnet,

$$\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}} = \mathfrak{T} a_0^2 E^2 k \pi^2 N^5 : s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2 s c_v G_0^3 (4\mathfrak{l}_0)^2,$$

wenn G_0 und $4\mathfrak{l}_0$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellen-

Digitized by Google

länge im Weltalle für diese Wellen bei gleicher Schwingungszahl sind.

Die Teilchen verschieben sich in derselben oder entgegengesetzter Richtung des Fortschreitens der Wellen um

$$g\,\varepsilon^{-\left(\frac{1-1'}{4\,1}\right)(\mathfrak{g}+a\,t)}$$

und das ergiebt für eine kurze Strecke $\mathfrak{g}$, die sie in einem Stoffe vorschreiten, annähernd als bestimmend für die Grösse der Verschiebung, um deren Endpunkt sie schwingen,

$$g - g\,\frac{a_0^2\,k}{s\,c_v^2}\,\frac{\mathfrak{T}\,\pi^2 E^2 h^2}{\mathfrak{a}\,V^2\,16}\cdot\left[4 - E:V + \frac{\mathfrak{T}\,a_0^2\,E^2}{s\,c_v\,\mathfrak{a}\,V(3 - E:V)}\right]^{-2}.$$

Das Verhältnis des Dehnungs- zum Verdrehungsindex $E:V$ ist für langsame Formänderungen, wie es sich aus dem Dehnungsverhältnis w gleich $2 - 2\,w$ ergiebt, für verschiedene Substanzen wenig anders und schwankt im äussersten Falle zwischen 2 und 3. Wir werden dies auch für sehr rasche Aenderungen annehmen. Für die Metalle Messing, Stahl, *Fe*, *Ag*, *Cu*, *Pb*, *Ni*, für die $E:V$ aus dem Dehnungsverhältnis erhalten werden kann, ergiebt sich auch

$$\frac{E^2}{V^2}\left[4 - E:V + \frac{\mathfrak{T}\,a_0^2\,E^2}{s\,c_v\,\mathfrak{a}\,V(3 - E:V)}\right]^{-2}$$

bei langsamer Formänderung nicht sehr verschieden und ist 2·920 am kleinsten beim *Fe* und 4·973 am grössten für *Pb*. Wir werden dies bei den Metallen auch für sehr rasche Aenderung der Form so annehmen. Bei derselben Temperatur und Grösse der Anfangsamplitude g ist bei Wellen mit gleicher Schwingungszahl $h:4$ die Grösse der Verschiebung dann hauptsächlich bestimmt durch $a_0^2\,k:s\,c_v^2$. Ich werde für a_0 den Wert des thermischen Ausdehnungsindex der langsamen Temperaturänderung bei Metallen nehmen und statt der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen c_v diejenige bei konstantem Druck c_p, wie zuvor.

Ich gebe im folgenden die Werte von $a_0^2\,k:s\,c_p^2$ multipliziert mit 10^{10}.

Digitized by Google

	$a_0^2 k 10^{10} : s c_p^2$
Silber	122·9
Kadmium	79·25
Gold	66·85
Blei	63·43
Quecksilber	40·70
Zink	31·54
Kupfer	29·41
Magnesium	25·63
Aluminium	16·47
Zinn	33·96
Neusilber	3·881
Platin	3·661
Antimon	3·444
Wismut	2·907
Eisen	2·584
Kobalt	2·361
Nickel	2·315

In Pulvern aus Silber und Nickel werden durch diese Wellen Silberteilchen viel mehr verschoben als Nickelteilchen und in die nächsten Schichten gedrängt, deren Zusammenhang sie vermehren. Dadurch wird deren elektrischer Widerstand vermindert. Diese in zwei entgegengesetzten Arten auftretenden Wellen, wie die beiden Elektrizitäten, wirken wie elektrische Wellen. Die Wirkung ist nach der vorigen Tabelle in Pulvern aus Nickel und Silber, wie sie in Marconis Empfänger verwandt sind, grösser als in solchen aus anderen Metallen.

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. März 1898.

1. Herr Richard Hertwig theilt in längerem Vortrage die Resultate seiner Beobachtungen: „Ueber Befruchtung und Kerntheilung bei Actinosphaerium Eichhorni“ mit. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

2. Herr Eugen v. Lommel legt zwei Arbeiten des Herrn Privatdozenten Dr. Arthur Korn vor:

a) „Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie“;

b) „Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer incompressiblen Flüssigkeit“.

3. Herr Hugo Seeliger überreicht eine Abhandlung: „Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen“.

4. Herr Ferdinand Lindemann macht eine Mittheilung: „Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt“.

Digitized by Google

5. Herr Walter Dyck giebt einen dritten Bericht zur Potentialtheorie: „Ueber die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Systems von Funktionen mehrerer Variabeln in einem gegebenen Bereich und über die Berechnung der Werthe einer gegebenen Funktion in diesen Punkten".

Digitized by Google

Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 5. März*)

Die am allgemeinsten verbreitete Ansicht über den Erdmagnetismus ist die, dass die gewaltigen jedenfalls in der Erde vorhandenen Eisenmassen zum Teil wenigstens permanente Magnete sind, und dass eine Richtung in ihrer Axenlagerung, die magnetische Axe der Erde, bevorzugt ist; man kann dabei, wie Lamont[1]) es gethan hat, von der Ampère'schen Theorie des Magnetismus Gebrauch machen und an Stelle der permanenten Magnete elektrische Ströme im Erdinnern annehmen, deren Wirkungen denen der Magnete äquivalent sind. Man könnte sich ja wohl mit dieser Erklärung beruhigen, wenn man sich über den Mechanismus eines Magneten, resp. eines elektrischen Stromes, keine weiteren dynamischen Vorstellungen machte; sowie man aber mit derartigen Ideen an die Erscheinung des Erdmagnetismus herantritt, wird man zu der Frage gedrängt:

Welche mechanischen Einflüsse können die einseitige Bevorzugung einer Axenrichtung veranlassen, und wie kommt es, dass die Pole dieser bevorzugten Richtung den Polen der Erdaxe so verhältnismässig nahe liegen? Können wir nicht die

[1]) In bezug auf die reichhaltige Literatur über den Erdmagnetismus und die möglichen Ursachen seiner Entstehung verweise ich auf das ausgezeichnete Werk von S. Günther, Handbuch der Geophysik, Stuttgart 1897.

Digitized by Google

Erdrotation mit der Erscheinung des Erdmagnetismus in einen kausalen Zusammenhang bringen? Mit Hilfe der hydrodynamischen Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen kann man nun auf diese Fragen so ausserordentlich einfache Antworten geben, dass die Theorie des Erdmagnetismus aus der genannten mechanischen Theorie wohl einigen Nutzen ziehen dürfte.

Wir wollen uns eine Kautschukkugel in einer inkompressibeln Flüssigkeit denken, auf deren Oberfläche wir beliebige Drucke ausüben können. Hat die Kautschukkugel von Hause aus eine beliebige Drehungsgeschwindigkeit ϱ' um eine Axe, die wir zur z Axe nehmen, so wird sie diese Drehungsgeschwindigkeit, falls man keinerlei Reibung annimmt, zu jeder Zeit beibehalten, so lange der Druck auf der Flüssigkeitsoberfläche konstant ist. Denken wir uns nun diesen Druck verändert, so wird sich die Kautschukkugel zusammenziehen oder ausdehnen; der Radius R der Kugel wird einen mit der Zeit veränderlichen Wert haben, und es wird nun nicht:

$$\varrho' = \text{const.},$$

sondern

$$R^2 \varrho' = \text{const.}$$

sein. Es ist nicht schwierig, diese Formel aus den allgemeinen mechanischen Prinzipien herzuleiten; es genügt aber hier wohl die Einsicht, dass, wenn die Kugel sich ausdehnt, sie zur Drehung mit derselben Geschwindigkeit Arbeit leisten müsste, und umgekehrt; es muss also thatsächlich bei einer Ausdehnung der Kugel eine Verminderung der Drehungsgeschwindigkeit, bei einer Kontraktion der Kugel eine Vergrösserung der Drehungsgeschwindigkeit eintreten.

Ist nun der auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkende Druck periodisch mit der kleinen Schwingungsdauer T, so pulsiert die Kautschukkugel, d. h. ihr Radius hat zur Zeit t den Wert:

$$R = R_0 + a \cos \frac{t}{T} 2\pi,$$

Digitized by Google

wo R_0 den Mittelwert des Radius, den Wert desselben zu einer Zeit vorstellt, in der

$$\cos \frac{t}{T} 2\pi = 0$$

ist, und a die Amplitude der Pulsation bedeutet.

Wiederum wird die Formel

$$R^2 \varrho' = \text{const.} = R_0^2 \varrho_0'$$

stattfinden, wenn R_0 und ϱ_0' die Werte von R und ϱ' zu irgend einer Anfangszeit t_0 vorstellen; es ist somit:

$$\varrho' = \varrho_0' \frac{R_0^2}{\left(R_0 + a \cos \frac{t}{T} 2\pi\right)^2}$$

oder:

$$\varrho' = \varrho_0' \left(1 - \frac{2a}{R_0} \cos \frac{t}{T} 2\pi\right),$$

wenn wir die Amplitude a als sehr klein im Vergleich mit dem Radius R_0 annehmen. Dem entspricht eine lineare Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel, von der Grösse:

$$V = R \varrho_0' - 2a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$= R_0 \varrho_0' - a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi.$$

Diese Formel zeigt, dass durch die Pulsation der Kautschukkugel die Konstanz der Drehungsgeschwindigkeit so abgeändert wird, dass zu der konstanten Drehungsgeschwindigkeit ϱ_0' noch eine vibratorische Drehungsgeschwindigkeit hinzutritt, welche die Periode der Pulsationsschwingungen besitzt und von einer solchen Grössenordnung ist, dass die derselben entsprechenden linearen Geschwindigkeiten an der Oberfläche der Kugel durch das Produkt

$$a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi$$

gegeben sind.

Digitized by Google

Legen wir die Annahme der hydrodynamischen Gravitationstheorie zu grunde, dass das gesamte Sonnensystem unter der Einwirkung eines äusseren periodischen Druckes stehe und somit unsere Erde wie eine Kautschukkugel in einer inkompressiblen Flüssigkeit sehr rasche Pulsationsschwingungen ausführe, so können wir durch die eben durchgeführte Untersuchung sofort zu einem wichtigen Resultat über die Erdrotation gelangen:

Infolge der raschen Pulsationsschwingung kann die Erde keine völlig konstante Rotationsgeschwindigkeit haben, wir haben vielmehr neben einer solchen konstanten Rotationsgeschwindigkeit noch eine schwingende, deren Periode mit der Periode der Pulsationsschwingungen übereinstimmt. Die Grössenordnung dieser schwingenden Rotationsgeschwindigkeit ist von solcher Art, dass die infolge derselben an der Erdoberfläche vorhandene lineare Schwingungsgeschwindigkeit den Wert hat:

$$a\,\varrho_0',$$

wo a die Amplitude der Erdpulsation, ϱ_0' die mittlere Drehungsgeschwindigkeit der Erde vorstellt.[1])

Mit dieser Rotationsschwingung erhalten wir nun nach der hydrodynamischen Theorie der elektrischen Erscheinungen ein elektromagnetisches Feld, in welchem die Rotationsaxe der Erde eine ausgezeichnete Richtung vorstellt. Es ist ja die Grundannahme in jener Theorie, dass die Geschwindigkeiten eines jeden Mediums, in welchem sich elektrische Erscheinungen abspielen, von der Form sind:

---

[1]) Nach den ziemlich rohen Schätzungen, welche man bisher noch in bezug auf die für die Erdpulsation in betracht kommenden Grössen anstellen kann, ist etwa a von der Ordnung der Wellenlängen des Lichtes, während die Schwingungsdauer T von der Ordnung: 10^{-25} sec anzunehmen ist. ϱ_0' ist bekanntlich von der Ordnung: 10^{-5} sec^{-1}, so dass also die der schwingenden Rotation der Erde entsprechende lineare Schwingungsgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche von der Ordnung 10^{-10} cm sec^{-1} wird.

Digitized by Google

$$u = u_0 + X \cos \frac{t}{T} 2\pi + L \sin \frac{t}{T} 2\pi ,$$

$$v = v_0 + Y \cos \frac{t}{T} 2\pi + M \sin \frac{t}{T} 2\pi ,$$

$$w = w_0 + Z \cos \frac{t}{T} 2\pi + N \sin \frac{t}{T} 2\pi ,$$

wo $X\,Y\,Z$ und $L\,M\,N$ im Dielektrikum genau dieselben Bedeutungen haben, wie die elektrischen, resp. magnetischen Verschiebungen in der Theorie Maxwells.

Wir brauchen nun nur vorauszusetzen, dass die Periode der die Gravitation veranlassenden Pulsationsschwingungen mit der Periode der das Wesen der elektrischen Erscheinungen ausmachenden Schwingungen übereinstimme, und dass ihre Phase dieselbe sei, wie die Phase der von magnetischen Teilchen oder elektrischen Strömen ausgehenden Schwingungen, dann sagt die oben bewiesene Thatsache einer schwingenden Rotationsgeschwindigkeit der Erde, in die Sprache der Elektrizitätstheorie übersetzt, folgendes aus:

Wäre die Erde ein Dielektrikum, so würden die elektrischen Komponenten $X\,Y\,Z$ eine Resultante besitzen, die überall innerhalb der Erde die Richtung der Breitenkreise besitzt; ist aber, wie es in Wirklichkeit der Fall ist, die Erde ein Leiter der Elektrizität, so werden in der Richtung der Breitenkreise elektrische Ströme vor sich gehen, deren Intensitäten jener Resultanten der elektrischen Komponenten und der Leitungsfähigkeit der Erde proportional sind. Alle diese Ströme sind Magneten äquivalent, welche die Erdaxe zur magnetischen Axe haben.

Wir gelangen so zu dem folgenden Resultat:

Die Erdpulsation zusammen mit der Erdrotation liefert in den leitenden Teilen der Erde elektrische Strömungen, welche Magneten mit lauter unter sich parallelen und gleichgerichteten, zugleich der Erdaxe parallelen Axen äquivalent sind, wenn die Schwingungen der Pulsation mit den magnetischen Schwing-

Digitized by Google

ungen in der hydrodynamischen Theorie gleiche Perioden und gleiche Phasen haben.

Die Abweichung der magnetischen Axe von der Rotationsaxe der Erde kann man sich durch eine ungleichmässige Lagerung der leitenden Teile innerhalb der Erde erklären, wie man sich auch die täglichen und säkularen Veränderungen des Erdmagnetismus durch die Einwirkung der übrigen Himmelskörper auf die Lagerung der leitenden Teile und die Richtung der elektrischen Ströme innerhalb der Erde hervorgebracht denken kann.

Zum Schluss möchte ich die eben angedeutete Auffassung des Erdmagnetismus zu einer ganz allgemeinen Auffassung über den permanenten Magnetismus erweitern. Ich kann mir denselben nur dadurch entstanden denken, dass leitende Teilchen, welche in einer konstanten, sehr raschen Rotation begriffen wären, wenn die universelle Pulsation unseres Sonnensystems nicht existierte, jetzt unter der Einwirkung derselben gezwungen sind, Rotationsschwingungen auszuführen. Diese Teilchen werden ihren Magnetismus so lange behalten, bis sie durch Reibung ihre ursprüngliche konstante (nicht schwingende) Rotationsgeschwindigkeit verloren haben; temporär magnetische Teilchen haben dagegen von Hause aus eine derartige konstante (nicht schwingende) Drehungsgeschwindigkeit nicht, ihre Rotationsschwingungen hören damit auch sofort auf, sobald ihre unmittelbare Veranlassung (inducierende elektrische Ströme etc.) ausser Wirkung tritt.

Digitized by Google

Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 5. März.*)

Wenn man die elektrischen Vorgänge in einem Dielektrikum als sehr rasche Schwingungen einer inkompressiblen Flüssigkeit auffasst, so hat man sich vor allem das Problem vorzulegen:

Unter welchen Bedingungen können Geschwindigkeiten von der Form:

$$1)\qquad \begin{cases} u = u_0 + u_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T}2\pi, \\ v = v_0 + v_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + v_2 \sin\frac{t}{T}2\pi, \\ w = w_0 + w_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + w_2 \sin\frac{t}{T}2\pi \end{cases}$$

Lösungen der allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$2)\qquad \begin{cases} \mu\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \mu\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

vorstellen, wenn man über die Grössen:

$$u_0\, v_0\, w_0 \qquad u_1\, v_1\, w_1 \qquad u_2\, v_2\, w_2$$

Digitized by Google

die Voraussetzung macht, dass

$$3)\qquad \left\{\begin{matrix} u_0, & v_0, & w_0 \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,}$$

$$4)\qquad \left\{\begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial t}, & \frac{\partial v_0}{\partial t}, & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}, & \frac{\partial v_1}{\partial t}, & \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}, & \frac{\partial v_2}{\partial t}, & \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Grösse } \frac{\text{Geschwindigkeitseinheit}}{\text{Zeiteinheit}}$$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen und T die ausserordentlich kleine Schwingungsdauer der das Wesen der elektrischen Erscheinungen ausmachenden Schwingungen vorstellt.

Der einfachste unter allen derartigen Bewegungszuständen ist jedenfalls der wirbellose Zustand, bei welchem

$$u_0\ v_0\ w_0 \qquad u_1\ v_1\ w_1 \qquad u_2\ v_2\ w_2$$

den folgenden Bedingungen genügen:

$$5)\qquad \left\{\begin{matrix} u_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ v_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & v_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ w_0 = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & w_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, & w_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{matrix}\right.$$

Ich habe neben diesem einfachsten Flüssigkeitszustand noch einen anderen beschrieben, welchen ich, wegen seiner Wichtigkeit für die Theorie der Dielektrika, als den dielektrischen Zustand einer inkompressiblen Flüssigkeit bezeichnet habe.

Dieser Zustand ist dadurch definiert, dass die Grössen:

$$u_0\ v_0\ w_0 \qquad u_1\ v_1\ w_1 \qquad u_2\ v_2\ w_2$$

den folgenden Bedingungen genügen sollen:

Digitized by Google

$$6)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} + c\mathfrak{u}_1 + 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} u_2 + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} v_2 + \dfrac{\partial u_0}{\partial z} w_2\right), \\ v_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} + c\mathfrak{v}_1 + 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x} u_2 + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} v_2 + \dfrac{\partial v_0}{\partial z} w_2\right), \\ w_1 = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} + c\mathfrak{w}_1 + 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x} u_2 + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} v_2 + \dfrac{\partial w_0}{\partial z} w_2\right), \end{cases}$$

$$7)\quad \begin{cases} u_2 = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} + c\mathfrak{u}_2 - 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x} u_1 + \dfrac{\partial u_0}{\partial y} v_1 + \dfrac{\partial u_0}{\partial z} w_1\right), \\ v_2 = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} + c\mathfrak{v}_2 - 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x} u_1 + \dfrac{\partial v_0}{\partial y} v_1 + \dfrac{\partial v_0}{\partial z} w_1\right), \\ w_2 = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial z} + c\mathfrak{w}_2 - 2\dfrac{T}{2\pi}\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x} u_1 + \dfrac{\partial w_0}{\partial y} v_1 + \dfrac{\partial w_0}{\partial z} w_1\right), \end{cases}$$

wo c eine Konstante ist,

$$\mathfrak{u}_1 \quad \mathfrak{v}_1 \quad \mathfrak{w}_1 \qquad \mathfrak{u}_2 \quad \mathfrak{v}_2 \quad \mathfrak{w}_2$$

die Bedeutungen haben:

$$8)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \\ \mathfrak{v}_1 = \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \\ \mathfrak{w}_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u \cos\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \end{cases}$$

$$9)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_2 = \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \\ \mathfrak{v}_2 = \dfrac{\partial}{\partial z}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \\ \mathfrak{w}_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\} - \dfrac{\partial}{\partial y}\left\{\dfrac{2}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u \sin\dfrac{t}{T}2\pi\, dt\right\}, \end{cases}$$

Digitized by Google

und wo schliesslich von $u_0\, v_0\, w_0$ nur vorausgesetzt wird, dass sie reine sichtbare Geschwindigkeiten vorstellen, d. h. dass:

$$10)\quad \left\{ \begin{array}{ccc} u\,, & v\,, & w \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}, & \frac{\partial v_0}{\partial t}, & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, & \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{array} \right| \begin{array}{c} \text{nicht gegen ihre Dimensions-} \\ \text{einheiten von der Ordnung} \\ \frac{\text{Zeiteinheit}}{T} \end{array}$$

gross sein sollen.

Wir setzen noch:

$$11)\qquad c = -\frac{T}{2\pi A}$$

und verstehen unter $\frac{1}{A}$ eine Geschwindigkeit von der Grössenordnung der Lichtgeschwindigkeit.

Führen wir die Grössen $X\,Y\,Z$ und $L\,M\,N$ durch die Gleichungen ein:

$$12)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} u \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \\ Y &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} v \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \\ Z &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} w \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \end{aligned} \right.$$

$$13)\quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} u \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \\ M &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} v \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \\ N &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} w \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\,, \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

so können wir die Definitionsgleichungen des dielektrischen Zustandes 6)—9) folgendermassen schreiben:

$$14)\begin{cases} X = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L + \frac{\partial u_0}{\partial y}M + \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ Y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}L + \frac{\partial v_0}{\partial y}M + \frac{\partial v_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ Z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}L + \frac{\partial w_0}{\partial y}M + \frac{\partial w_0}{\partial z}N\right)\right\}, \end{cases}$$

$$15)\begin{cases} L = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial x}X + \frac{\partial u_0}{\partial y}Y + \frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\}, \\ M = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial x}X + \frac{\partial v_0}{\partial y}Y + \frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\}, \\ N = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}X + \frac{\partial w_0}{\partial y}Y + \frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}. \end{cases}$$

Ich habe früher[1]) gezeigt, dass dieser Bewegungszustand der Flüssigkeit den hydrodynamischen Gleichungen genügt, falls die Bedingungen erfüllt sind:

---

[1]) A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik II. Teil, II. Abschnitt, p. 211—227, Berlin 1898. Ich hatte in dem Beweise daselbst:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad \mathfrak{v}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x},$$

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad \mathfrak{w}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

gesetzt, doch bleibt derselbe auch bei unserer Definition 8) 9) in Gültigkeit. Ich beschränke mich an dieser Stelle mit dem Hinweis auf jene Untersuchungen, da ich weiter unten den Beweis noch einmal in der für die jetzigen Zwecke passenden Form geben werde.

Digitized by Google

$$16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} = -A\left(\overline{\dfrac{dL}{dt}} - \dfrac{\partial u_0}{\partial x} L - \dfrac{\partial u_0}{\partial y} M - \dfrac{\partial u_0}{\partial z} N\right), \\ \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = -A\left(\overline{\dfrac{dM}{dt}} - \dfrac{\partial v_0}{\partial x} L - \dfrac{\partial v_0}{\partial y} M - \dfrac{\partial v_0}{\partial z} N\right), \\ \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} = -A\left(\overline{\dfrac{dN}{dt}} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} L - \dfrac{\partial w_0}{\partial y} M - \dfrac{\partial w_0}{\partial z} N\right), \end{cases}$$

$$17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} = A\left(\overline{\dfrac{dX}{dt}} - \dfrac{\partial u_0}{\partial x} X - \dfrac{\partial u_0}{\partial y} Y - \dfrac{\partial u_0}{\partial z} Z\right), \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = A\left(\overline{\dfrac{dY}{dt}} - \dfrac{\partial v_0}{\partial x} X - \dfrac{\partial v_0}{\partial y} Y - \dfrac{\partial v_0}{\partial z} Z\right), \\ \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = A\left(\overline{\dfrac{dZ}{dt}} - \dfrac{\partial w_0}{\partial x} X - \dfrac{\partial w_0}{\partial y} Y - \dfrac{\partial w_0}{\partial z} Z\right), \end{cases}$$

wobei die Operation $\overline{\dfrac{d}{dt}}$ die Bedeutung hat:

$$18)\qquad \frac{d(\ )}{dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + \frac{\partial(\ )}{\partial x} u_0 + \frac{\partial(\ )}{\partial y} v_0 + \frac{\partial(\ )}{\partial z} w_0 .$$

Wir wollen nun zeigen, dass der dielektrische Zustand ein zu jeder Zeit notwendiger Flüssigkeitszustand ist, wenn derselbe zu irgend einer Anfangszeit t_0 besteht und eine gewisse Bedingung an der Grenze gefordert wird.

Wir wollen dazu jetzt unsere frühere Definition des dielektrischen Zustandes in folgende Form fassen:

Es sollen die Geschwindigkeiten

$$[u] \quad [v] \quad [w]$$

des dielektrischen Zustandes durch die Gleichungen gegeben sein:

$$19)\quad \begin{cases} [u] = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} u_0\, dt + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} X\, dt \cos\dfrac{t}{T} 2\pi + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} L\, dt \sin\dfrac{t}{T} 2\pi , \\ [v] = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} v_0\, dt + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} Y\, dt \cos\dfrac{t}{T} 2\pi + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} M\, dt \sin\dfrac{t}{T} 2\pi , \\ [w] = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_t^{t+T} w_0\, dt + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} Z\, dt \cos\dfrac{t}{T} 2\pi + \dfrac{1}{T}\int_t^{t+T} N\, dt \sin\dfrac{t}{T} 2\pi , \end{cases}$$

Digitized by Google

wo:

$$20)\quad \left\{\begin{array}{lll} u_0, & v_0, & w_0 \\ X, & Y, & Z \\ L, & M, & N \end{array}\right| \quad \text{nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,}$$

$$21)\quad \left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial u_0}{\partial t}, & \frac{\partial v_0}{\partial t}, & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial t}, & \frac{\partial Y}{\partial t}, & \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial L}{\partial t}, & \frac{\partial M}{\partial t}, & \frac{\partial N}{\partial t} \end{array}\right| \quad \text{nicht gegen die Beschleunigungseinheit}$$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen und $u_0\, v_0\, w_0$, $X\, Y\, Z$, $L\, M\, N$ den Bedingungen genügen:

$$22)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{T}\Big|\, u_0 \Big|_t^{t+T} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ \frac{1}{T}\Big|\, v_0 \Big|_t^{t+T} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ \frac{1}{T}\Big|\, w_0 \Big|_t^{t+T} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}, \end{array}\right.$$

$$23)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} X dt = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L + \frac{\partial u_0}{\partial y}M + \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Y dt = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}L + \frac{\partial v_0}{\partial y}M + \frac{\partial v_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Z dt = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}L + \frac{\partial w_0}{\partial y}M + \frac{\partial w_0}{\partial z}N\right)\right\}, \end{array}\right.$$

Digitized by Google

$$24)\begin{cases} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} L\,dt = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial x}X + \frac{\partial u_0}{\partial y}Y + \frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} M\,dt = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial x}X + \frac{\partial v_0}{\partial y}Y + \frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} N\,dt = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}X + \frac{\partial w_0}{\partial y}Y + \frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}. \end{cases}$$

Bilden wir zunächst mit der Funktion $[u]$, ohne dieselbe als eine Geschwindigkeitskomponente aufzufassen, den Differentialquotienten:

$$\frac{d[u]}{dt} = \frac{\partial [u]}{\partial t} + \frac{\partial [u]}{\partial x}u + \frac{\partial [u]}{\partial y}v + \frac{\partial [u]}{\partial z}w,$$

so erhalten wir:

$$\frac{d[u]}{dt}$$

$$= \frac{1}{T}\Big|u_0\Big|_t^{t+T} + \frac{1}{T}\Big|X\Big|_t^{t+T}\cos\frac{t}{T}2\pi + \frac{1}{T}\Big|L\Big|_t^{t+T}\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$+\left\{-\frac{2\pi}{T}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L + \frac{\partial u_0}{\partial y}M + \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}\sin\frac{t}{T}2\pi$$

$$+\left\{\frac{2\pi}{T}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}X + \frac{\partial u_0}{\partial y}Y + \frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right)\right\}\cos\frac{t}{T}2\pi,$$

analog $\frac{d[v]}{dt}$ und $\frac{d[w]}{dt}$.

Bestehen nun für $X\,Y\,Z$, $L\,M\,N$ die Bedingungen:

$$25)\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -A\left\{\frac{1}{T}\Big|L\Big|_t^{t+T} - \frac{\partial u_0}{\partial x}L - \frac{\partial u_0}{\partial y}M - \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right\}, \\ \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -A\left\{\frac{1}{T}\Big|M\Big|_t^{t+T} - \frac{\partial v_0}{\partial x}L - \frac{\partial v_0}{\partial y}M - \frac{\partial v_0}{\partial z}N\right\}, \\ \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -A\left\{\frac{1}{T}\Big|N\Big|^{t+T} - \frac{\partial w_0}{\partial x}L - \frac{\partial w_0}{\partial y}M - \frac{\partial w_0}{\partial z}N\right\}, \end{cases}$$

Digitized by Google

$$26)\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}=A\left\{\dfrac{1}{T}\left|X\right|_t^{t+T}-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial u_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\}, \\ \dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=A\left\{\dfrac{1}{T}\left|Y\right|_t^{t+T}-\dfrac{\partial v_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial v_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\}, \\ \dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=A\left\{\dfrac{1}{T}\left|Z\right|_t^{t+T}-\dfrac{\partial w_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial w_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}, \end{cases}$$

so wird:

$$\text{analog } 27)\begin{cases} \dfrac{d[u]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right), \\ \dfrac{d[v]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right), \\ \dfrac{d[w]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right). \end{cases}$$

Sind andererseits $u\,v\,w$ irgend welche Geschwindigkeiten einer inkompressiblen Flüssigkeit, so ist:

$$28)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \dfrac{dw}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

Wir subtrahieren die entsprechenden Gleichungen 27) und 28), multiplicieren resp. mit $u-[u]$, $v-[v]$, $w-[w]$, addieren und integrieren über den ganzen Flüssigkeitsraum A, so folgt:

$$\int_A\left[(u-[u])\frac{d}{dt}(u-[u])+(v-[v])\frac{d}{dt}(v-[v])+(w-[w])\frac{d}{dt}(w-[w])\right]d\tau$$

$$=-\int_A\left[(u-[u])\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)\right.$$

$$+(v-[v])\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)$$

$$\left.+(w-[w])\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)\right]d\tau,$$

Digitized by Google

oder wenn wir rechts von der Green'schen Umformung Gebrauch machen:

$$29)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_A \Big[(u-[u])^2+(v-[v])^2+(w-[w])^2\Big]\,d\tau$$

$$=+\int\limits_\Omega\Big(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\Big)(u-[u])_n\,do,$$

wo das Integral rechts über alle Elemente do der Oberfläche zu erstrecken ist und, wenn man unter $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ $\cos(nz)$ die Richtungskosinusse der inneren Normalen versteht, $(u-[u])_n$ die Bedeutung hat:

$$30)\qquad (u-[u])_n$$
$$=(u-[u])\cos(nx)+(v-[v])\cos(ny)+(w-[w])\cos(nz).$$

Ist an der ganzen Flüssigkeitsoberfläche:

$$31)\qquad u_n=[u]_n\,,$$

so folgt aus 29), dass das Integral:

$$\int\Big[(u-[u])^2+(v-[v])^2+(w-[w])^2\Big]\,dt$$

stets gleich null sein muss, wenn es zu irgend einer Anfangszeit t_0 verschwindet; besteht also der dielektrische Zustand zu einer Anfangszeit t_0 und erfüllt zu jeder Zeit die normale Geschwindigkeitskomponente an der Oberfläche die Bedingung des dielektrischen Zustandes:

$$u_n=[u]_n\,,$$

so muss der dielektrische Zustand der Flüssigkeit zu jeder Zeit t erhalten bleiben.

Bedenken wir noch, dass die für unseren Beweis benützte Definition des dielektrischen Zustandes mit der früheren völlig übereinstimmt, so können wir noch einmal unsere Resultate in folgender Weise formulieren:

Digitized by Google

I. Haben die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -A\left\{\frac{\overline{dL}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} L - \frac{\partial u_0}{\partial y} M - \frac{\partial u_0}{\partial z} N\right\},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -A\left\{\frac{\overline{dM}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} L - \frac{\partial v_0}{\partial y} M - \frac{\partial v_0}{\partial z} N\right\},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -A\left\{\frac{\overline{dN}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} L - \frac{\partial w_0}{\partial y} M - \frac{\partial w_0}{\partial z} N\right\};$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = A\left\{\frac{\overline{dX}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} X - \frac{\partial u_0}{\partial y} Y - \frac{\partial u_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = A\left\{\frac{\overline{dY}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} X - \frac{\partial v_0}{\partial y} Y - \frac{\partial v_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = A\left\{\frac{\overline{dZ}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} X - \frac{\partial w_0}{\partial y} Y - \frac{\partial w^0}{\partial z} Z\right\}$$

Lösungen, welche den Bedingungen genügen:

$$X = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} L + \frac{\partial u_0}{\partial y} M + \frac{\partial u_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$Y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} L + \frac{\partial v_0}{\partial y} M + \frac{\partial v_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$Z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} L + \frac{\partial w_0}{\partial y} M + \frac{\partial w_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$L = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial x} X + \frac{\partial u_0}{\partial y} Y + \frac{\partial u_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$M = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} X + \frac{\partial v_0}{\partial y} Y + \frac{\partial v_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$N = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} X + \frac{\partial w_0}{\partial y} Y + \frac{\partial w_0}{\partial z} Z\right\},$$

so stellen die Geschwindigkeiten:

Digitized by Google

$$[u] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_0\, dt + X \cos\frac{t}{T}\, 2\pi + L \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\,,$$

$$[v] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v_0\, dt + Y \cos\frac{t}{T}\, 2\pi + M \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\,,$$

$$[w] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w_0\, dt + Z \cos\frac{t}{T}\, 2\pi + N \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\,,$$

einen möglichen Bewegungszustand einer inkompressiblen Flüssigkeit dar, welchen wir als den dielektrischen Zustand der Flüssigkeit bezeichnen.

II. Befindet sich eine Flüssigkeit zu irgend einer Anfangszeit im dielektrischen Zustande, so muss dieser Zustand stets erhalten bleiben, wenn nur von der normalen Geschwindigkeitskomponente u_n der Flüssigkeit an der Oberfläche stets die Erfüllung der Bedingung des dielektrischen Zustandes:

$$u_n = [u]_n$$

gefordert wird.

Digitized by Google

Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen.

Von **Hugo Seeliger.**

(Eingelaufen 5. März.)

Für viele Fragen der Stellarastronomie ist das Verhalten der in den Bonner Durchmusterungen enthaltenen Grössenschätzungen gegenüber einer festen Helligkeitsscala von erheblichem Interesse. Für die helleren Sterne bis etwa zur 6. Grösse liegt eine grosse Anzahl von Untersuchungen[1]) vor, durch die ihr photometrisches Verhalten ziemlich sicher bestimmt ist und wenn erst die Potsdamer Beobachtungsreihe, welche alle Sterne des nördlichen Himmels bis zur $7\frac{1}{2}$ Grösse enthalten wird, vollständig publicirt sein wird, wird man diesen Gegenstand nach allen Richtungen hin übersehen können. Für die Sterne von der 6. bis 9. Grösse dagegen fehlen bisher nähere Angaben, obwohl alle Speculationen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne sich vorerst hauptsächlich auf das photometrische Verhalten der Sterne 6.—9. Grösse stützen müssen, weil hier in den Bonner Durchmusterungen ein nahezu vollständiges Material vorliegt und die Anzahl dieser Sterne genügend gross ist, um allgemeinere Gesetze in der scheinbaren Vertheilung deutlich zum Ausdruck bringen zu können. Auf die hier entschieden vorhandene Lücke in unserer Kenntniss

---

[1]) Vgl. Müllers Photometrie der Gestirne. S. 455 ff.

Digitized by Google

bin ich öfters mit grossem Bedauern gestossen und da nunmehr seit einigen Jahren ein umfangreiches Beobachtungsmaterial vorliegt, das nach der gewünschten Richtung hin noch nicht verwerthet worden ist, hielt ich es für nützlich aus diesem Materiale jene Schlüsse zu ziehen, welche die erwähnte Lücke wenigstens einigermassen ausfüllen können. Auch bedurfte ich dieser Resultate zu Untersuchungen, über die ich an anderer Stelle berichten werde. Das genannte Material bietet die „Photometric Revision of the Durchmusterung",[1]) welche die photometrische Beobachtung vieler Tausend Durchmusterungssterne enthält und mit dem Meridianphotometer der Harvard Sternwarte während der Jahre 1882—88 gewonnen worden ist. In dieser Publication, die im Folgenden stets mit *H. R.* bezeichnet werden soll, ist für jeden Stern die Grösse nach der Bonner Schätzung neben dem Resultat der gewonnenen photometrischen Bestimmung angeführt, was die Festlegung der Durchmusterungsgrössen gegen die photometrische Helligkeitsscala sehr wesentlich vereinfacht, denn diese besteht im Wesentlichen auf der Bildung einer allerdings sehr grossen Zahl von Differenzen und ihrer passenden Vereinigung zu Mittelzahlen. Bei diesen Operationen wurde ich wesentlich durch Herrn cand. astr. C. Schwend unterstützt, der ungefähr die Hälfte der Vergleichungen ausführte.

Ehe ich auf die Mittheilung der gewonnenen Resultate eingehe, möchte ich zuerst darauf hinweisen, was bisher über das Verhalten der Durchmusterungsgrössen bekannt war.

In der Hauptsache war man in Bezug auf das photometrische Verhalten der Sterne 6.—9. Grösse der Durchmusterungen fast allein auf die Resultate zweier in Pulkowa mit einem Zöllner'schen Photometer ausgeführten Arbeiten angewiesen, welche sich die Aufgabe stellten den Logarithmus $\log \gamma$ des Helligkeitsverhältnisses zweier um eine Grössenklasse aus-

[1]) Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Vol. XXIV, Cambridge. 1890.

Digitized by Google

einanderliegenden Sterne der nördlichen Bonner Durchmusterung (*D. M.*) festzustellen, welcher in der jetzt allgemein angenommenen photometrischen Scala 0.4 ist. Die beiden Arbeiten rühren von Herrn Rosén[1]) und dem kürzlich verstorbenen Lindemann[2]) her. Herr Rosén hat 110 Sterne untersucht und gefunden für Sterne von der Grösse

5^m—6^m,	$\log \gamma = 0.388$
6 —7	0.388
7 —8	0.363
8 —9	0.379

Lindemann hat in seine Ableitung 92 Sterne von der Grösse 6.1^m—7.0^m, 101 zwischen 7.1^m—8.0^m und 97 Sterne zwischen 8.1^m—9.5^m einbezogen und das Resultat erhalten für:

6^m—7^m,	$\log \gamma = 0.394$
7 —8	0.392
8 —9	0.437

Diese beiden Zahlenreihen, auf den ersten Blick gut übereinstimmend, zeigen doch bedeutende Unterschiede, wenn man weiter entfernte Helligkeitsgrade, z. B. Sterne 9. und 6. Grösse mit einander vergleichen will. Bezeichnet h_m die Helligkeit eines Sternes von der Grösse m, so geben z. B. die Zahlen Herrn Roséns: $\log h_{6.0} - \log h_{9.0} = 1.130$, während nach Lindemann dafür 1.223 herauskommt, was einem Unterschiede von fast $\frac{1}{4}$ Grössenklasse gleichkommt. An sich sind beide Beobachtungsreihen mit grosser Sorgfalt und nach eingehendem Studium des angewandten Instrumentes ausgeführt. Bei der vorliegenden Aufgabe kommt es aber auf möglichst grosse Ge-

[1]) Rosén, Studien und Messungen mit einem Zöllner'schen Photometer. Bulletin de l'acad. d. St. Pétersbourg 1870. Referat von Engelmann in der Vierteljahrsschrift der A. G. Jahrgang V, S. 29 ff.

[2]) Lindemann, Photometrische Bestimmung der Grössenklassen der Bonner Durchmusterung. Supplément II aux Observations de Poulkova. 1889. Referat von Herrn G. Müller, V. J. S. Jahrg. 25, S. 25 ff.

Digitized by Google

nauigkeit der Einzelmessungen in erster Linie nicht an. Es unterliegt keinem Zweifel und ist leicht erklärlich, dass die einzelnen Grössenschätzungen der nördlichen Durchmusterung bedeutenden zufälligen Fehlern unterworfen waren. Um diese zu eliminiren, um also Aussagen machen zu können, die sich auf eine mittlere in Bonn eingehaltene Helligkeitsscala beziehen, wird die Anzahl von 110 Sternen, wie bei Rosén, und werden wohl auch die 290 Sterne Lindemanns nicht ausreichen. Dazu kommt aber noch ein viel einflussreicherer Umstand. Die Bonner Durchmusterung enthält, wie ebenfalls leicht erklärlich, constante Schätzungsfehler, welche zonenweise auftreten. Diese können erst durch eine weit grössere Anzahl von Vergleichspunkten unschädlich gemacht werden und zwar wird man eine sehr grosse Anzahl über den ganzen Himmel vertheilter Sterne betrachten müssen, wenn die constanten Schätzungsfehler sich nur langsam mit dem Ort am Himmel ändern und wenn diese Abhängigkeit einen nennenswerthen Betrag erreicht. Beides findet, wie gezeigt werden wird, bei der *D. M.* statt. Aus diesem Grunde muss man der *H. R.* eine erhöhte Wichtigkeit zuerkennen, denn sie enthält eine überaus grosse Anzahl photometrischer Bestimmungen von Durchmusterungssternen, die über den ganzen nördlichen Himmel verstreut sind, wenn auch mit einer wohl beträchtlich geringeren Genauigkeit, als im Einzelnen zu erreichen möglich ist.

Wie schon erwähnt, ist die in der *D. M.* angewandte Helligkeitsscala variabel mit dem Orte am Himmel und zwar bei den schwächeren Sternen in einem ziemlich erheblichen Betrage. Vor allem tritt eine Abhängigkeit von der Lage zur Milchstrasse oder, was formell auf dasselbe hinausläuft, von der Sternfülle in der betrachteten Himmelsregion, deutlich hervor. Da aber die Lage zur Milchstrasse bei allen stellarastronomischen Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielt, so muss diesem Punkte auch bei der Aufsuchung der Beziehung der Bonner Sterngrössen zu einer festen photometrischen Scala ganz besondere Aufmerksamkeit zugewendet werden. Eine Vergleichung der Grössen der Durchmusterung mit photometrischen Messungen

Digitized by Google

kann eben nur dann ein unzweideutiges Resultat ergeben, wenn man zugleich angeben kann, wie die Räume, in denen die verglichenen Sterne sich befinden, gegen die Milchstrasse liegen.

Die erste Hindeutung darauf, dass die Bonner Sternschätzungen in sternreichen Gegenden merklich anders ausgefallen sind, als in sternarmen, hat Schönfeld in der Einleitung zur südlichen Durchmusterung — *S. D.* — Seite [36] gemacht. Ihm fiel danach gleich beim Beginne seiner Arbeit auf, dass die Differenzen der Grössenangaben der *S. D.* weniger derjenigen der Bessel'schen Zonen „um so mehr positiv sind, je sternreicher die verglichenen Räume sind". Dieses Vorkommniss hat später Herr Scheiner[1]) näher untersucht und bestätigt gefunden. Er hat auch Vergleichungen mit Argelander und Schjellerup angestellt und die Differenzen der Grössenangaben *S. D.* — Bessel bez. Argelander und Schjellerup in die Form gebracht:

$$h_0 + a \cdot \frac{D - D_0}{D_0}$$

wo D die Sternfülle in der betrachteten Gegend, D_0 eine gewisse nicht näher angegebene mittlere Sternfülle bedeutet. Es ergab sich

	S. D. — Bessel		*S. D.* — Argelander	
Grösse	h_0	a	h_0	a
7^m	-0.13^m	$+0.323^m$	$+0.19^m$	$+0.276^m$
$7\frac{1}{2}$	-0.10	$+0.247$	$+0.21$	$+0.357$
8	-0.03	$+0.285$	$+0.12$	$+0.307$
$8\frac{1}{2}$	-0.13	$+0.224$	$+0.05$	$+0.161$
9	-0.20	$+0.139$	-0.02	$+0.185$

[1]) Vergleichung der Grössenangaben der südlichen Durchmusterung mit denen anderer Cataloge. Astr. Nachr. Nr. 2766, 1887.

Digitized by Google

wobei die Grössenangabe in der ersten Verticalreihe diejenige des verglichenen Kataloges ist. Die natürlich viel schwächer begründete Vergleichung mit Schjellerup ergab:

$8\frac{1}{2}^{m}$	$h_0 = -0.31^{m}$	$a = +0.065^{m}$
$8\frac{3}{4}$	-0.21	$+0.178$
9	-0.21	$+0.073$

Sämmtliche a haben das positive Vorzeichen und die aus den Vergleichungen mit Bessel und Argelander hervorgegangenen stimmen auch ihrem Betrag nach recht gut überein. Man wird deshalb aus diesen Vergleichungen wohl mit einiger Sicherheit den Schluss ziehen dürfen, dass die aufgefundenen Differenzen in der Hauptsache in systematischen Schätzungsfehlern der *S. D.* ihren Grund haben und man wird sich auch, wie es Herr Scheiner thut, mit plausiblen Erklärungsversuchen über die Thatsache hinwegsetzen können, dass die Vergleichung der *S. D.* mit Lalande von dem erwähnten Einfluss der Sternfülle nichts zeigt.

Die Coefficienten a sind positiv und nehmen, wenn die Vergleichung mit Schjellerup ausser der Betrachtung bleibt, mit zunehmender Sterngrösse ab. Die zweite Eigenschaft, auf die es bei manchen Anwendungen besonders ankommt, ist indessen nicht als verbürgt anzusehen. Die Vergleichung mit *H. R.* wird auch die erste, aber keineswegs die zweite Eigenschaft ergeben.

Dass Einflüsse von der Art, wie die eben besprochenen, bei Sterngrössenschätzungen in einem grösseren Gesichtsfelde zu erwarten sind, kann man leicht einsehen, wenn man berücksichtigt, dass sich das schätzende Auge in sternreichen Gegenden in einem anderen Reizungszustand befindet als in sternarmen und wenn man ferner annimmt, dass die adoptirte Schätzungsscala hiervon abhängig ist. Die letztere Annahme scheint nothwendig zu sein, wenn man die von Herrn Scheiner gefundenen Zahlen in ihrer Abhängigkeit von der Sterngrösse

Digitized by

durch eine Formel darstellen wollte, die auf der Grundlage des Fechner'schen psychophysischen Gesetzes aufgebaut ist. Dadurch werden aber so weitgehende Willkürlichkeiten in die Betrachtung eingeführt, dass eine auf diesem Wege aufgestellte Formel nicht viel mehr Werth als eine Interpolationsformel beanspruchen kann, weshalb ich auf dahingehende Versuche nicht näher eingehen möchte.

Die Vergleichungen des Herrn Scheiner beziehen sich auf Cataloge, deren Sterngrössen ebenfalls durch Schätzungen erhalten sind, deren Helligkeitsscala auch nicht näher bekannt ist. Es ist ferner eine naheliegende Vermuthung, dass die Sternschätzungen der *S.D.* durch die angewendete Feldbeleuchtung nicht ganz unbeeinflusst geblieben sind. Diese Feldbeleuchtung wurde am Anfange jeder Zone sorgfältig den äusseren Umständen angepasst, zu denen natürlich auch die Sternfülle in der eingestellten Himmelsgegend gehört. Und wenn auch der Beobachter Schönfeld mit bewundernswerther Annäherung das Bestreben, seine Arbeit der nördlichen *D.M.* möglichst homogen zu gestalten, erreicht hat, so könnte man doch von vornherein geneigt sein zu vermuthen, dass sich in den Sterngrössen der *D.M.* der Einfluss der Milchstrasse in einer ganz andern Weise zeigen könnte. In jedem Falle ist aber a priori nichts näheres über diesen Punkt zu sagen, und man muss ihn als einer Untersuchung dringend bedürftig bezeichnen.

Bei den Vergleichungen der nördlichen *D.M.* mit der *H.R.*, worauf nunmehr eingegangen werden soll, ist deshalb auch auf den Einfluss der Sternfülle gehörig Rücksicht genommen worden und es hat sich in der That herausgestellt, dass bei den schwächeren Sternen dadurch ein ganz wesentlicher Einfluss aufgedeckt worden ist.

Bei Gelegenheit der Mittheilung der Abzählungen der in der Bonner Durchmusterung enthaltenen Sterne[1]) habe ich den Himmel in 9 Zonen eingetheilt, die parallel zu der Milch-

---

[1]) Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1884 und 1886.

Digitized by Google

strasse, deren Mitte als längs eines grossen Kreises verlaufend angenommen wurde, liegen. Zone I reicht von $+ 90^0$ bis $+ 70^0$ nördlicher galactischer Breite, Zone II von $+ 70^0$ bis $+ 50^0$ u. s. f., Zone V von $+ 10^0$ bis $- 10^0$ die Milchstrasse umschliessend, Zone IX endlich von $- 70^0$ bis $- 90^0$. Ich habe a. a. O. die Grenzcurven dieser Zonen durch Diagramme dargestellt, durch welche die Zone, in welcher eine gegebene Himmelsgegend liegt, sofort abgelesen werden kann und überall dort, wo es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, werden diese Curven nützlich befunden werden. Ich habe im vorliegenden Falle diese Curven ebenfalls benutzt und ihre Verwendung gestaltete sich überaus einfach, weil die Resultate der *H. R.* nach einzelnen Declinationsgraden geordnet sind. Es waren also in den Tabellen der einzelnen Declinationsgrade die Grenzen der Zonen I bis VIII — IX kommt in *D. M.* nicht vor — kenntlich zu machen. Die *H. R.* enthält die Declinationsgrade $+ 0^0$, $+ 1^0$, $+ 4^0$, $+ 5^0$, $+ 9^0$, $+ 10^0$ u. s. f. Bei der beschränkten Genauigkeit reichte es aus für zwei anstossende Declinationsgrade, also für 0^0 und 1^0, für 4^0 und 5^0 etc., dieselben Grenzcurven anzunehmen. Um eine etwaige Controle zu ermöglichen, führe ich in der folgenden Tabelle die angenommenen Grenzen der Zonen an. Die Zahlen sind so zu verstehen: Für $+ 0^0$ und $+ 1^0$ reicht z. B. Zone VIII von $0^h\,0^m$ bis $2^h\,48^m$ und von $22^h\,54^m$ bis 0^h, Zone III von $9^h\,5^m$ bis $10^h\,54^m$ und von $14^h\,48^m$ bis $16^h\,33^m$.

Digitized by Google

	+0°	+5°
	h m	h m
	0 0	0 0
VIII	2 48	2 24
VII	4 30	4 15
VI	6 2	5 50
V	7 35	7 24
IV	9 5	8 50
III	10 54	10 30
II	14 48	15 6
III	16 33	16 45
IV	18 5	18 15
V	19 33	19 42
VI	21 12	21 24
VII	22 54	23 12
VIII	0h	0h

	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°	+35°	+40°
	h m						
	0 0	h m	h m	h m	h m	h m	h m
VIII	1 45	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
VII	4 0	3 42	3 20	2 54	2 0	4 24	3 54
VI	5 38	5 30	5 15	5 0	4 42	6 18	6 5
V	7 12	7 0	6 54	6 42	6 30	8 3	7 55
IV	8 42	8 32	8 24	8 15	8 10	9 42	9 42
III	10 13	10 5	9 54	9 48	9 45	11 20	11 30
II	12 4	11 36	11 25	11 18	11 18	14 18	14 10
I	13 25	13 50	14 6	14 15	14 18	15 48	15 54
II	15 18	15 30	15 42	15 48	15 54	17 32	17 40
III	16 54	17 0	17 10	17 20	17 25	19 15	19 24
IV	18 24	18 30	18 42	18 50	19 3	21 12	21 40
V	19 54	20 3	20 18	20 32	20 50	0h	0h
VI	21 32	21 50	22 15	22 45	23 26		
VII	0h	0h	0h	0h	0h		

	+50°	+55°	+60°	+65°		+70°		+75°	+80°	+85°	>86°
	h m										
	0 0	h m	h m	h m		h m		h m	h m	h m	
VI	2 15	0 0	0 0	0 0		0 0		0 0	0 0	0 0	
V	5 33	5 15	4 48	4 10	V	3 0	IV	7 42	8 0	8 48	IV
IV	7 48	7 46	7 42	7 42	IV	7 40	III	17 54	17 40	16 40	
III	9 50	10 6	10 30	11 15	III	18 0	IV	0h	0h	0h	
II	15 45	15 30	15 10	14 21	IV	22 36	V				
III	17 50	17 54	17 55	18 0	V	0h					
IV	20 0	20 20	20 50	21 24							
V	22 10	0h	0h	0h							
VI	0h										

Es wurden nun für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen die Differenzen der Grössenangaben *D. M.* — *H. R.* gebildet und zusammenaddirt. Hierbei wurden die Differenzen ohne jede Correctur dem angeführten Werke entnommen und nur jene ausgeschlossen, deren absoluter Betrag > 0.7 war. Das ist freilich eine ziemlich willkürliche Maassnahme. Sie entstand aus dem Bestreben, nicht gar zu viele Ausschliessungen machen zu müssen und in der That bildet die Zahl der thatsächlich erfolgten einen ganz geringfügigen Procentsatz. Unzweifelhaft befinden sich unter den mitgenommenen Differenzen viele, die

Digitized by Google

durch Fehler irgend welcher Art entweder in der *D.M.* oder in der *H.R.* entstanden sind. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass sich alle diese Ungenauigkeiten, die zum Theil kaum festzustellen wären, im Mittel aufheben. Man wird dies bei der überaus grossen Anzahl von Vergleichungen, die benutzt werden konnten, mit einiger Sicherheit annehmen können, aber nur dort, wo sehr verschiedene Regionen des Himmels bei den einzelnen Mittelwerthen mitstimmen. Denn bei den Differenzen fällt sofort auf, dass sie sehr oft innerhalb engerer Bezirke von annähernd gleichem Betrage sind, dass also eine Art systematischer Beeinflussung mitgespielt hat, sei es bei den Schätzungen der *D.M.*, sei es bei den photometrischen Messungen. Diejenigen Mittelwerthe also, welche nur aus Vergleichungen, die sich auf kleinere Bezirke erstrecken, entstanden sind, wird man nicht als sicher betrachten dürfen. Dies findet bei den Zonen VIII und I statt, und thatsächlich weichen die ihnen zugehörigen Mittelzahlen theilweise stark von den Werthen ab, die man durch eine nicht ganz unzuverlässige Extrapolation aus den den andern Zonen entsprechenden Mittelwerthen gewinnt.

Die erhaltenen Summen der Differenzen für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen wurden in Tabellen zusammengestellt. Diese sollen aber nicht mitgetheilt werden, vielmehr enthalten die folgenden Tabellen gleich die Mittelwerthe, vor denen die Anzahl der Differenzen steht. Am Fusse jeder Tabelle steht indessen die Summe für jede Zone und die dazugehörige Anzahl der Sterne. Diese Summen sind also direct gebildet und genauer, als sie aus den auf 2 Stellen abgekürzten Mittelwerthen hervorgehen würden. Um mittlere Differenzen für die ganzen und halben Grössenklassen der *D.M.* zu erhalten, sind folgende Grössenklassen der *D.M.* zu Gruppen vereinigt worden:

Gruppe 1 enthält die *D.M.* Grössen 6.3 bis 6.7 incl. Die Gruppen 2, 3, 4 und 5 bezw. die Grössen 6.8 bis 7.2 incl., 7.3 bis 7.7 incl., 7.8 bis 8.2 incl., 8.3 bis 8.7 incl., endlich

Digitized by Google

die Gruppen 6 und 6a die Grössen 8.8, 8.9, 9.0 bezw. 9.1 und 9.2.

Die letzten beiden Gruppen wurden zunächst aus dem Grunde auseinander gehalten, weil vermuthet werden konnte, dass sich die *D.M.* Grössen 9.1—9.2 der Schätzungsscala, welche bei den helleren Sternen angewendet worden ist, nicht einfügen. Es ergab sich indessen zum Schlusse, dass diese Vermuthung sich wenigstens nicht mit Sicherheit bestätigt und so konnten dann die beiden Gruppen 6 und 6a in eine einzige unbedenklich vereinigt werden. Die für die einzelnen Gruppen erhaltenen Mittelzahlen werden nun sehr nahe für die *D.M.* Grössen 6.5, 7.0 etc. bis 9.0 gelten. Abgesehen davon, dass die Grössen der einzelnen Gruppen sich symmetrisch um die ganzen und halben Grössenklassen lagern, kommt hierbei noch in Betracht, dass die Decimalen 0 und 5 sowohl in der *D.M.* als auch in dem Verzeichnisse der *H.R.* sehr bedeutend überwiegen. Zu den nun folgenden Tabellen wäre noch zu bemerken, dass wegen der geringen Anzahl von Sternen, welche die Gruppe 6a bilden, hier mehrere Declinationsgrade zusammengefasst worden sind.

Digitized by Google

Grösse 6.3,

	VIII		VII		VI		V	
0—5°	2	+0.03	—	—	8	+0.10	8	+0.30
9—15	1	—0.42	16	+0.11	26	+0.09	20	—0.09
19—25			24	—0.16	32	—0.10	24	+0.03
29—35			2	—0.06	35	—0.12	26	+0.01
39—45					31	—0.06	38	+0.04
49—55					12	0.00	35	—0.14
59—65							41	0.00
69—75							11	0.00
>75°								
Summe	3	—0.36	42	—2.17	144	—5.82	293	—0.56

Grösse: 6.8,

0°	6	+0.11	2	+0.60	5	+0.25	6	+0.05
1	—	—	1	+0.36	—	—	2	+0.26
4	—	—	2	+0.40	2	+0.10	6	+0.18
5	—	—	1	+0.29	3	+0.37	9	+0.11
9	3	+0.34	5	+0.27	4	+0.06	4	+0.30
10	2	+0.21	6	+0.04	8	+0.11	7	+0.10
14			7	—0.07	7	+0.02	11	—0.06
15			9	—0.03	8	—0.05	10	—0.08
19			12	—0.15	12	—0.26	12	+0.03
20			9	—0.21	7	—0.22	5	+0.27
24			5	—0.32	4	+0.34	4	+0.08
25			5	—0.18	5	—0.25	6	—0.14
29			1	—0.26	7	0.00	14	+0.04
30			5	—0.20	6	—0.15	18	+0.02
34					20	—0.23	10	+0.10
35					17	—0.22	4	+0.07
39					22	—0.08	13	+0.05
40					18	—0.15	12	—0.08
44					11	+0.13	10	+0.06
45					17	—0.06	8	—0.01
49					7	—0.31	12	—0.10
50					12	—0.03	7	—0.16
54							16	—0.26
55							12	+0.06
59							23	—0.18
60							13	—0.11
64							12	—0.27
65							15	—0.24
69							6	—0.14
70							1	—0.54
74								
75								
76								
79								
>80°								
Summe	11	+2.07	70	—4.04	202	—16.98	288	—12.66

Digitized by Google

6.4, 6.5, 6.6, 6.7.

IV		III		II		I	
4	+0.23	4	+0.15	8	+0.20	—	—
13	0.00	8	+0.12	10	+0.27	2	+0.34
13	+0.04	16	−0.15	6	+0.12	11	+0.04
21	+0.07	8	+0.21	6	+0.01	9	+0.23
27	−0.12	12	−0.12	11	−0.06	6	−0.19
27	−0.04	14	+0.04	18	−0.04	—	—
17	−0.06	19	−0.06	11	−0.15	—	—
18	−0.11	23	−0.10				
31	+0.04	14	−0.04				
171	−3.26	118	−3.84	70	+1.96	28	+2.10

6.9, 7.0, 7.1, 7.2.

4	+0.03	2	+0.42	3	+0.17	—	—
2	−0.13	1	+0.16	—	—	—	—
6	+0.37	1	+0.35	1	−0.22	—	—
3	−0.01	1	+0.34	—	—	—	—
7	+0.12	6	+0.08	4	+0.29	—	—
4	+0.24	2	+0.22	1	+0.08	—	—
3	−0.26	4	−0.05	4	−0.02	1	+0.26
8	−0.06	6	+0.03	3	−0.09	3	+0.39
4	+0.05	6	−0.16	3	+0.23	6	+0.05
1	+0.20	3	+0.40	4	+0.26	3	+0.13
5	+0.11	2	+0.08	4	−0.34	5	−0.20
3	−0.03	2	+0.27	5	+0.13	5	−0.25
6	+0.15	2	−0.36	4	−0.34	7	−0.20
8	+0.13	3	+0.18	5	−0.12	3	−0.26
3	−0.17	6	0.00	3	+0.26	2	−0.42
11	−0.13	4	+0.04	3	−0.03	7	−0.22
16	−0.26	4	−0.18	2	+0.28	4	−0.36
13	−0.08	11	−0.11	4	−0.29	8	−0.26
8	+0.09	3	+0.08	5	−0.20	1	−0.32
7	−0.39	4	+0.22	10	−0.22		
3	−0.04	5	−0.18	3	−0.19		
8	−0.14	4	−0.02	7	−0.08		
5	+0.13	3	+0.47	7	+0.03		
11	−0.11	—	—	5	−0.07		
7	+0.04	7	−0.10	2	−0.29		
12	+0.01	5	−0.05	2	+0.07		
5	−0.03	5	−0.07	3	−0.31		
5	−0.22	6	−0.36	2	−0.40		
10	−0.20	8	−0.20				
6	−0.13	6	−0.07				
6	+0.03	3	−0.14				
14	−0.11	10	−0.23				
4	−0.20	2	−0.20				
3	+0.13	2	−0.21				
35	−0.03	19	−0.15				
256	−10.78	158	−9.51	99	−6.24	55	−8.74

Digitized by Google

Grösse 7.3,

	VIII		VII		VI		V	
0°	5	+ 0.21	6	+ 0.08	4	+ 0.16	10	+ 0.10
1	1	+ 0.21	1	— 0.49	1	— 0.14	1	+ 0.01
4	1	— 0.31	3	+ 0.08	4	+ 0.08	6	— 0.09
5	4	+ 0.32	5	— 0.15	3	+ 0.21	6	+ 0.22
9	1	— 0.17	14	+ 0.02	5	— 0.02	5	+ 0.17
10	3	— 0.09	8	+ 0.02	5	+ 0.05	6	+ 0.16
14			8	— 0.11	3	+ 0.39	14	— 0.01
15			5	+ 0.07	11	— 0.13	8	+ 0.02
19			9	— 0.07	7	— 0.10	14	— 0.04
20			11	— 0.05	7	— 0.23	8	+ 0.04
24			4	— 0.06	9	+ 0.14	9	+ 0.08
25			10	— 0.17	8	— 0.05	10	+ 0.01
29			5	+ 0.21	18	— 0.12	11	+ 0.08
30					12	— 0.09	15	+ 0.08
34					16	— 0.22	10	+ 0.05
35					12	— 0.18	13	+ 0.18
39					17	— 0.14	20	— 0.02
40					20	— 0.23	20	+ 0.09
44					14	— 0.07	13	— 0.17
45					9	— 0.28	12	— 0.25
49					9	— 0.21	13	+ 0.02
50					7	— 0.14	13	— 0.11
54							27	— 0.22
55							21	— 0.04
59							19	— 0.04
60							15	— 0.17
64							13	— 0.17
65							6	0.00
69							5	— 0.26
70							1	— 0.09
74								
75								
76								
79								
80								
>80								
Summe	15	+ 1.81	89	— 2.57	201	— 22.22	344	— 9.26

Digitized by Google

7.4, 7.5, 7.6, 7.7.

IV		III		II		I	
6	+ 0.05	10	+ 0.16	7	− 0.01		
5	+ 0.22	3	+ 0.09	1	+ 0.51		
2	+ 0.25	3	+ 0.28	6	+ 0.25		
3	+ 0.10	2	+ 0.37	6	+ 0.10		
4	+ 0.25	2	+ 0.31	2	+ 0.51	2	+ 0.38
3	+ 0.12	6	+ 0.30	6	+ 0.08	3	+ 0.36
6	− 0.12	2	+ 0.06	1	− 0.01	4	+ 0.12
8	− 0.10	4	− 0.12	3	− 0.12	3	+ 0.53
7	− 0.08	4	− 0.10	5	+ 0.19	4	+ 0.28
9	+ 0.03	4	+ 0.05	6	− 0.14	3	− 0.21
11	+ 0.20	3	− 0.31	5	+ 0.04	4	− 0.27
8	− 0.07	4	− 0.18	8	− 0.14	9	− 0.37
11	+ 0.27	9	+ 0.01	2	− 0.02	4	− 0.22
6	+ 0.08	2	− 0.11	5	− 0.18	4	− 0.24
6	+ 0.02	8	− 0.07	5	− 0.06	3	− 0.09
8	− 0.16	8	− 0.13	2	− 0.55	3	− 0.21
14	− 0.26	4	− 0.30	10	− 0.24	2	+ 0.27
15	− 0.20	9	− 0.20	7	− 0.26	6	− 0.17
10	− 0.12	4	− 0.22	10	− 0.07	2	− 0.52
7	− 0.19	10	− 0.25	4	− 0.47	1	− 0.62
9	− 0.15	8	− 0.22	5	− 0.21		
7	− 0.24	10	− 0.16	11	− 0.26		
9	− 0.45	7	− 0.02	5	− 0.16		
6	− 0.11	4	− 0.02	5	− 0.08		
14	− 0.13	3	− 0.04	4	− 0.15		
4	− 0.12	6	− 0.32	9	− 0.29		
7	+ 0.12	2	− 0.08	4	− 0.13		
13	+ 0.02	7	− 0.04	3	+ 0.10		
6	− 0.23	12	− 0.24				
12	− 0.22	3	+ 0.09				
6	+ 0.01	5	− 0.17				
22	− 0.12	10	− 0.21				
3	− 0.19	4	− 0.27				
10	− 0.01	2	− 0.16				
10	+ 0.17	7	− 0.16				
35	+ 0.02	21	+ 0.11				
322	− 15.30	212	− 16.06	147	− 14.89	57	− 4.89

Digitized by Google

Grösse: 7.8.

	VIII		VII		VI		V	
0°	7	−0.17	10	+0.24	8	+0.02	10	+0.18
1	5	+0.20	3	+0.03	3	+0.02	6	+0.29
4	1	+0.30	6	+0.07	10	+0.26	8	+0.20
5	6	+0.18	10	+0.06	5	+0.39	7	+0.19
9	1	−0.17	6	−0.02	7	+0.01	6	−0.03
10	1	−0.17	15	−0.13	10	+0.07	6	+0.04
14			8	−0.03	8	−0.08	10	+0.20
15			13	0.00	9	0.00	10	+0.01
19			4	−0.25	7	−0.23	5	−0.02
20			4	−0.18	12	−0.24	8	+0.11
24			8	−0.04	7	−0.02	8	+0.18
25			7	−0.30	11	−0.08	16	+0.03
29			6	+0.01	17	−0.12	14	+0.01
30			11	+0.01	16	−0.08	18	+0.06
34					25	−0.19	10	−0.06
35					18	−0.21	11	+0.12
39					16	−0.14	29	−0.13
40					16	−0.22	13	−0.17
44					9	−0.05	18	−0.12
45					11	−0.18	19	−0.03
49					15	−0.29	15	−0.10
50					7	−0.26	10	−0.20
54							27	−0.23
55							26	−0.01
59							28	−0.12
60							15	−0.06
64							9	−0.21
65							14	−0.25
69							9	−0.27
70							4	−0.03
74								
75								
76								
79								
80								
> 80								
Summe	21	+1.40	111	−2.54	247	−26.84	389	−17.67

Digitized by Google

7.9, 8.0, 8.1, 8.2.

IV		III		II		I	
9	+ 0.22	8	+ 0.29	8	+ 0.17		
5	+ 0.09	1	− 0.54	6	− 0.11		
6	+ 0.31	4	+ 0.10	6	− 0.13		
7	+ 0.25	4	+ 0.15	6	− 0.09		
13	− 0.03	4	+ 0.05	3	+ 0.35	2	+ 0.21
11	+ 0.06	7	+ 0.19	4	+ 0.26	3	+ 0.50
12	− 0.04	7	− 0.17	3	− 0.24	5	+ 0.21
10	− 0.18	7	− 0.04	5	− 0.33	1	+ 0.21
7	− 0.19	7	+ 0.04	5	− 0.17	9	+ 0.08
9	− 0.18	3	− 0.10	3	− 0.28	4	− 0.14
10	+ 0.05	4	− 0.37	3	− 0.06	3	− 0.06
6	− 0.18	2	+ 0.29	5	− 0.04	3	− 0.41
9	+ 0.16	10	+ 0.29	6	− 0.14	2	− 0.39
13	− 0.03	4	+ 0.08	8	− 0.32	3	− 0.58
10	− 0.09	8	+ 0.02	3	− 0.39	3	− 0.05
7	− 0.29	9	− 0.16	1	0.00	3	− 0.40
13	− 0.30	6	− 0.25	5	− 0.13	2	− 0.22
8	− 0.15	5	− 0.17	13	− 0.02	3	− 0.54
5	− 0.19	8	− 0.28	6	− 0.17	2	− 0.32
10	− 0.35	6	− 0.28	8	− 0.21	3	− 0.29
7	− 0.05	9	− 0.21	7	− 0.11		
11	− 0.30	2	+ 0.13	6	− 0.18		
11	− 0.11	1	+ 0.04	4	− 0.37		
14	− 0.16	5	− 0.03	6	− 0.15		
12	− 0.20	9	+ 0.07	3	− 0.09		
7	− 0.17	7	− 0.20	5	− 0.16		
10	− 0.04	4	− 0.21	3	− 0.13		
9	− 0.18	7	− 0.31	2	− 0.08		
12	− 0.20	8	+ 0.02				
10	− 0.07	7	− 0.09				
9	− 0.03	4	− 0.22				
28	− 0.12	15	− 0.15				
10	+ 0.09	4	− 0.20				
10	− 0.08	2	− 0.38				
17	− 0.07	9	− 0.05				
54	+ 0.05	20	− 0.08				
410	− 27.34	227	− 15.18	143	− 16.87	51	− 5.47

Digitized by Google

Grösse: 8.3,

	VIII		VII		VI		V	
0°	17	− 0.18	20	− 0.06	28	+ 0.07	25	+ 0.15
1	10	− 0.26	6	− 0.11	18	+ 0.15	8	+ 0.06
4	8	− 0.23	18	− 0.23	24	+ 0.01	20	0.00
5	10	+ 0.30	17	− 0.22	18	− 0.05	22	+ 0.09
9	1	− 0.07	10	− 0.19	19	− 0.05	16	+ 0.10
10	7	− 0.38	14	+ 0.03	18	+ 0.01	23	+ 0.02
14			14	− 0.17	18	− 0.05	16	+ 0.07
15			9	− 0.32	6	− 0.02	15	+ 0.03
19			6	− 0.31	9	− 0.19	17	− 0.03
20			17	− 0.21	12	− 0.19	21	− 0.12
24			8	− 0.26	14	− 0.13	17	− 0.08
25			10	− 0.22	16	− 0.10	15	− 0.08
29			3	− 0.09	27	− 0.17	13	− 0.02
30			7	+ 0.08	14	− 0.25	17	0
34					20	− 0.36	22	− 0.08
35					18	− 0.30	25	− 0.01
39					23	− 0.26	21	− 0.22
40					19	− 0.32	26	− 0.22
44					19	− 0.03	9	− 0.08
45					21	− 0.09	25	− 0.10
49					15	− 0.20	21	− 0.10
50					12	− 0.29	22	− 0.26
54							10	− 0.19
55							19	− 0.13
59							22	− 0.19
60							17	− 0.14
64							15	− 0.19
65							11	− 0.25
69							11	− 0.18
70							5	− 0.10
74								
75								
76								
79								
80								
>80								
Summe	53	− 9.86	159	− 25.99	388	− 46.95	526	− 37.81

Digitized by Google

8.4, 8.5, 8.6, 8.7.

IV		III		II		I	
20	— 0.11	6	+ 0.03	18	— 0.09		
10	— 0.05	4	+ 0.04	11	— 0.06		
24	— 0.04	10	— 0.13	15	+ 0.12		
9	— 0.09	7	+ 0.21	16	— 0.02		
13	— 0.08	6	+ 0.11	8	+ 0.03	6	— 0.09
19	+ 0.05	13	+ 0.01	16	— 0.05	6	— 0.04
10	— 0.13	4	— 0.01	5	— 0.04	5	— 0.19
11	— 0.02	7	— 0.05	6	+ 0.01	4	— 0.18
12	— 0.25	11	— 0.12	8	— 0.26	2	— 0.40
9	— 0.08	8	— 0.14	6	— 0.21	10	— 0.24
10	— 0.19	6	— 0.22	5	— 0.24	1	— 0.61
14	— 0.29	11	— 0.23	4	— 0.32	7	— 0.32
13	+ 0.08	7	— 0.25	7	— 0.25	2	— 0.31
13	— 0.01	10	— 0.32	5	— 0.38	3	— 0.26
16	— 0.24	6	— 0.27	5	— 0.11	3	— 0.08
18	— 0.20	8	— 0.26	8	— 0.30	10	— 0.09
14	— 0.32	4	— 0.41	2	— 0.37	7	— 0.51
20	— 0.29	5	— 0.47	4	— 0.26	1	— 0.57
9	— 0.26	7	— 0.17	5	— 0.45	3	— 0.29
16	— 0.22	5	— 0.22	6	— 0.34	3	— 0.39
20	— 0.10	5	— 0.30	5	— 0.18		
11	— 0.21	4	— 0.37	6	— 0.19		
15	— 0.21	8	+ 0.03	3	— 0.23		
6	— 0.19	6	— 0.14	6	— 0.19		
17	— 0.07	11	— 0.36	8	— 0.19		
16	— 0.31	3	— 0.23	3	— 0.59		
11	— 0.09	11	— 0.18	3	— 0.08		
7	— 0.21	8	— 0.05	2	— 0.45		
11	0.00	18	— 0.17				
8	— 0.10	4	— 0.10				
4	— 0.03	5	— 0.08				
60	— 0.06	36	— 0.09				
13	+ 0.06	10	+ 0.03				
10	— 0.06	4	— 0.02				
7	0.00	2	— 0.28				
11	+ 0.09	9	— 0.13				
507	— 58.80	289	— 39.62	196	— 28.14	73	— 17.11

Digitized by Google

Grösse 8.8.

	VIII		VII		VI		V	
+0°	27	— 0.30	25	— 0.28	42	+ 0.01	48	+ 0.05
1	9	— 0.16	17	— 0.12	20	— 0.06	16	+ 0.07
4	18	— 0.26	20	— 0.31	23	— 0.16	30	+ 0.02
5	11	— 0.33	17	— 0.25	25	— 0.23	23	— 0.01
9	4	— 0.32	16	— 0.14	26	— 0.15	19	+ 0.03
10	14	— 0.29	20	— 0.20	21	— 0.16	35	+ 0.03
14			12	— 0.31	24	— 0.13	20	— 0.02
15			17	— 0.18	13	— 0.11	17	0.00
19			21	— 0.35	17	— 0.26	22	0.00
20			13	— 0.32	11	— 0.32	25	— 0.16
24			18	— 0.24	19	— 0.33	26	— 0.19
25			9	— 0.30	8	— 0.27	25	— 0.10
29			8	— 0.26	19	— 0.31	23	— 0.09
30			11	— 0.26	32	— 0.23	29	— 0.14
34					41	— 0.29	30	— 0.04
35					26	— 0.34	24	— 0.19
39					27	— 0.38	28	— 0.14
40					29	— 0.38	32	— 0.32
44					18	— 0.26	27	— 0.23
45					23	— 0.22	22	— 0.28
49					28	— 0.32	30	— 0.27
50					16	— 0.26	21	— 0.26
54							34	— 0.26
55							31	— 0.15
59							26	— 0.19
60							21	— 0.24
64							14	— 0.18
65							13	— 0.30
69							11	— 0.12
70							9	— 0.06
74								
75								
76								
79								
80								
>80								
Summe	83	— 23.38	224	— 56.08	508	— 116.38	731	— 89.58

Digitized by Google

8.9, 9.0.

IV		III		II		I	
26	— 0.21	24	— 0.28	25	— 0.32		
19	— 0.31	11	— 0.26	12	— 0.41		
34	— 0.08	18	— 0.15	19	— 0.28		
14	— 0.07	10	— 0.19	9	— 0.32		
23	— 0.08	4	— 0.07	12	— 0.21	8	— 0.31
23	— 0.05	7	— 0.09	14	— 0.28	7	— 0.46
13	— 0.18	16	— 0.18	11	— 0.07	3	— 0.42
20	— 0.06	13	— 0.18	7	— 0.22	5	— 0.20
14	— 0.26	10	— 0.35	4	— 0.38	4	— 0.34
12	— 0.24	8	— 0.20	4	— 0.35	5	— 0.18
17	— 0.28	11	— 0.25	3	— 0.49	6	— 0.32
16	— 0.37	7	— 0.37	12	— 0.36	6	— 0.46
15	— 0.09	9	— 0.37	6	— 0.39	9	— 0.53
15	— 0.16	17	— 0.13	6	— 0.42	3	— 0.43
19	— 0.18	5	— 0.46	7	— 0.44	1	— 0.22
15	— 0.34	8	— 0.39	6	— 0.20	8	— 0.31
21	— 0.38	6	— 0.32	9	— 0.31	3	— 0.40
25	— 0.41	9	— 0.32	5	— 0.34	5	— 0.56
16	— 0.32	13	— 0.42	6	— 0.59	4	— 0.25
6	— 0.37	10	— 0.45	11	— 0.50	3	— 0.52
25	— 0.20	9	— 0.37	18	— 0.33		
18	— 0.25	6	— 0.40	12	— 0.33		
14	— 0.27	9	— 0.21	5	— 0.19		
20	— 0.27	5	— 0.08	10	— 0.15		
16	— 0.31	11	— 0.16	5	— 0.37		
9	— 0.21	13	— 0.20	4	— 0.50		
15	— 0.12	6	— 0.21	9	— 0.29		
18	— 0.08	11	— 0.20	7	— 0.21		
22	— 0.12	20	— 0.05				
10	— 0.12	11	— 0.09				
15	— 0.08	10	— 0.16				
72	— 0.14	51	— 0.14				
21	— 0.07	9	— 0.02				
16	— 0.09	10	— 0.15				
7	+ 0.10	4	— 0.30				
17	— 0.03	5	— 0.15				
673	— 122.63	406	— 86.38	258	— 81.56	80	— 30.24

Digitized by Google

Grösse 9.1,

	VIII		VII		VI		V	
0— 1°	1	— 0.27	3	— 0.13	6	+ 0.05	11	+ 0.02
4— 5	2	— 0.33	9	— 0.21	2	— 0.11	13	— 0.06
9—10	4	— 0.36	9	— 0.11	9	+ 0.03	7	+ 0.16
14—15			12	— 0.30	11	— 0.21	7	— 0.07
19—20			—	—	4	— 0.06	8	— 0.16
24—25			6	— 0.14	2	— 0.16	6	— 0.27
29—30			3	— 0.18	4	— 0.24	11	— 0.22
34—35					8	— 0.35	14	— 0.15
39—40					9	— 0.36	6	— 0.07
44—45					16	— 0.25	21	— 0.24
49—50					9	— 0.19	6	— 0.21
54—55							4	— 0.36
59—60							12	— 0.10
64—65							1	— 0.40
69—70							7	— 0.11
74—75							—	—
76, 79—80							10	+ 0.06
>80							1	+ 0.07
Summe	7	— 2.36	42	— 8.29	80	— 15.10	145	— 17.14

Digitized by Google

9.2.

IV		III		II		I	
9	− 0.24	7	− 0.47	3	− 0.33		
6	− 0.12	3	+ 0.16	3	− 0.19		
4	+ 0.12	3	− 0.09	3	− 0.30	2	− 0.05
3	− 0.18	11	− 0.22	10	− 0.23	2	+ 0.04
14	− 0.21	8	− 0.40	6	− 0.42	3	− 0.38
10	− 0.29	4	− 0.27	5	− 0.51	3	− 0.46
5	− 0.27	1	− 0.66	—	—	5	− 0.43
11	− 0.12	11	− 0.24	5	− 0.37	3	− 0.38
4	− 0.06	5	− 0.29	5	− 0.41	5	− 0.56
18	− 0.19	2	− 0.45	5	− 0.35	4	− 0.47
3	− 0.18	7	− 0.35	7	− 0.35		
3	− 0.36	2	− 0.09	4	− 0.32		
6	− 0.18	6	− 0.08	4	− 0.56		
2	− 0.10	—	—	5	− 0.16		
6	− 0.23	13	− 0.19				
25	− 0.08	16	− 0.02				
7	+ 0.11						
1	− 0.23						
137	− 21.03	99	− 21.20	65	− 22.19	27	− 10.52

Digitized by Google

Die vorstehenden Tabellen vereinigen 10660 Vergleichungen. Ein blosser Anblick der Zahlen bestätigt die schon oben gemachte Bemerkung, dass die einzelnen Himmelsgegenden (hier Declinationsgrade) ausgeprägte systematische Abweichungen zeigen.

Um über diese sehr deutliche und systematische Abhängigkeit der Bonner Grössenscala von der Declination eine bessere Uebersicht zu gewinnen, mögen die mit Rücksicht auf die Sternzahlen gebildeten Mittel der in horizontaler Reihe stehenden Abweichungen *D.M.* — *H.R.* mitgetheilt werden. Ich habe gleich 2 Declinationsgrade vereinigt und das resultirende Mittel dem einfachen Mittel der Declination zugeordnet.

δ	$6.3-6.7^m$	δ	$6.8-7.2^m$	$7.3-7.7^m$	$7.8-8.2^m$	$8.3-8.7^m$	$8.8-9.2^m$
3°0	+0.187	1°	+0.167	+0.105	+0.124	−0.016	−0.156
12.5	+0.065	5	+0.203	+0.125	+0.161	−0.038	−0.158
22.5	−0.038	10	+0.161	+0.120	+0.043	−0.019	−0.118
32.5	+0.019	15	−0.033	−0.011	−0.033	−0.065	−0.149
42.5	−0.055	20	−0.042	−0.036	−0.112	−0.169	−0.242
52.5	−0.056	25	−0.078	−0.054	−0.051	−0.183	−0.276
62.5	−0.041	30	−0.040	+0.004	−0.026	−0.121	−0.228
72.5	−0.079	35	−0.117	−0.083	−0.134	−0.188	−0.244
75.5	+0.013	40	−0.119	−0.140	−0.173	−0.291	−0.329
		45	−0.042	−0.194	−0.170	−0.157	−0.301
		50	−0.134	−0.157	−0.188	−0.193	−0.281
		55	−0.046	−0.131	−0.130	−0.151	−0.224
		60	−0.093	−0.145	−0.113	−0.210	−0.242
		65	−0.232	−0.032	−0.188	−0.170	−0.189
		70	−0.167	−0.204	−0.098	−0.117	−0.113
		75	−0.123	−0.127	−0.122	−0.070	−0.117
		78	−0.110	−0.108	−0.056	+0.011	−0.043
		>80°	−0.070	+0.053	−0.006	−0.026	−0.063

Die einzelnen Werthe schwanken zwar nicht unbeträchtlich in unregelmässiger Weise hin und her, aber ein durchaus systematisch von der Declination abhängiger Gang ist unverkennbar. Dieser letztere ist keineswegs durch den verschiedenen Antheil, mit welchem die einzelnen Zonen an den Mitteln theilnehmen, zu erklären, sondern thatsächlich zeigt die in Bonn angewandte Helligkeitsscala beträchtliche Schwankungen, welche von zwei Argumenten, der Rectascension und Declination, oder, wie hier die Anordnung geschah, der Declination und der Zone, abhängig ist. Man wird deshalb auch die Resultate der

Digitized by Google

obigen Tabellen nicht durch einfacher verlaufende Zahlenreihen so darstellen können, dass ihre Anwendung in allen Fällen zu empfehlen wäre, vielmehr wird man am besten immer auf die ursprünglichen Tabellen zurückgehen.

Der Einfluss der Sternfülle bezw. die Lage der betreffenden Sterne zur Milchstrasse tritt besonders bei den schwächeren Sternen überaus deutlich hervor. Besonders auffallend wird diese Erscheinung, wenn man die Mittel der Differenzen für jede Zone und Grössengruppe bildet. Es findet sich:

	6.3—6.7^m			6.8—7.2^m			7.3—7.7^m		
Zone	Δ	A	F	Δ	A	F	Δ	A	F
VIII	—0.120	3	—0.023	+0.188	11	—0.065	+0.121	15	—0.077
VII	—0.051	42	21	—0.058	70	63	—0.029	89	75
VI	—0.040	144	14	—0.084	202	56	—0.110	201	65
V	—0.003	203	09	—0.044	288	51	—0.027	344	56
IV	—0.019	171	16	—0.042	256	58	—0.076	322	68
III	—0.033	118	22	—0.060	158	64	—0.079	212	76
II	+0.028	70	24	—0.063	99	66	—0.113	147	79
I	+0.075	28	24	—0.161	55	66	—0.085	57	79
Mittel	—0.015	779		—0.059	1139		—0.060	1387	

	7.8—8.2^m			8.3—8.7^m		
Zone	Δ	A	F	Δ	A	F
VIII	+ 0.067	21	— 0.087	— 0.186	53	— 0.156
VII	— 0.023	111	83	— 0.164	159	148
VI	— 0.109	247	62	— 0.121	388	109
V	— 0.047	389	47	— 0.072	526	079
IV	— 0.067	410	68	— 0.116	507	121
III	— 0.067	227	84	— 0.137	289	151
II	— 0.118	143	89	— 0.144	196	161
I	— 0.107	51	91	— 0.234	73	164
Mittel	— 0.069	1599		— 0.121	2191	

	8.8—9.0^m		9.1—9.2^m		8.8—9.2^m		
Zone	Δ	A	Δ	A	Δ	A	F
VIII	— 0.281	83	— 0.337	7	— 0.286	90	— 0.270
VII	— 0.250	224	— 0.200	42	— 0.242	266	256
VI	— 0.229	508	— 0.189	80	— 0.223	588	183
V	— 0.123	731	— 0.118	145	— 0.122	876	125
IV	— 0.182	673	— 0.154	137	— 0.177	810	204
III	— 0.213	406	— 0.214	99	— 0.213	505	261
II	— 0.316	258	— 0.341	65	— 0.321	323	280
I	— 0.378	80	— 0.390	27	— 0.381	107	285
Mittel	— 0.205	2963	— 0.196	602	— 0.203	3565	

Die Rubrik Δ enthält die Mittelwerthe der Differenzen der Grössenangaben *D.M.* — *H.R.*, die danebenstehenden A be-

Digitized by Google

deuten die Anzahl der benützten Sterne. F soll später erklärt werden. Man sieht, dass im Allgemeinen nur jene Δ von einem ziemlich regelmässigen Verlaufe abweichen, bei denen A relativ klein ist. Die Differenzen für Zone VIII in den ersten 4 und für Zone I für die 3 ersten Gruppen sind thatsächlich ganz unsicher und würden am besten als unbestimmbar fortzulassen sein. Man wird, was sich aus anderen Gründen empfehlen wird, indessen diese Unsicherheit auch zum Ausdrucke bringen, wenn man A als die Gewichte der zugehörigen Δ ansieht.

Die zuletzt angeführten Tabellen geben die aus den angestellten Vergleichungen direct hervorgehenden Mittelzahlen. Um aber eine bessere Uebersicht über die Abhängigkeit der Bonner Sternschätzungen von der Lage zur Milchstrasse zu erlangen, wird es sich empfehlen, mit einer entsprechenden Genauigkeit die Δ durch eine Interpolationsformel darzustellen. Es gelingt dies in der That in recht befriedigender Weise durch eine Formel mit verhältnissmässig wenig Constanten. Die einzelnen Zonen kann man durch ihre mittlere Sternfülle — Anzahl aller in der *D. M.* enthaltenen Sterne auf dem Areale eines Quadratgrades, was natürlich eine zunächst willkürliche Annahme bildet — characterisiren. Setzt man für die Milchstrassenzone V die Sternfülle $D = 1$, so kann man annehmen, wenn noch $\delta = D - 0.7$ gesetzt wird:

Zone	D	δ
VIII	0.41	— 0.29
VII	0.47	— 0.23
VI	0.77	+ 0.07
V	1.00	+ 0.30
IV	0.68	— 0.02
III	0.45	— 0.25
II	0.37	— 0.33
I	0.35	— 0.35

Es sei m der Ueberschuss der Sterngrösse jeder der Gruppen über 6.5, also der Reihe nach 0, 0.5, 1,0, . . 2.5, h_m die Helligkeit eines Sternes von der Grösse m, wobei $h_{6.5} = 1$ angenommen

Digitized by Google

wird. Nimmt man die Helligkeitsscala, welche der *H.R.* zu Grunde liegt, so ist $\log h_{m-1} - \log h_m = 0.4$ und $1 : h_m$ hat für die 6 Gruppen der Reihe nach die Werthe:

$$1,\ 1.58,\ 2.51,\ 3.98,\ 6.31,\ 10.00$$

Dann hat eine Ueberschlagsrechnung ergeben, dass die besser bestimmten Differenzen der obigen Tabelle sich durch eine Formel von der Form:

$$c_m + \alpha \cdot \delta + \beta\,(\delta \cdot m) + \gamma \cdot \frac{\delta}{h_m}$$

befriedigend darstellen lassen. c_m ist eine der betreffenden Gruppe eigenthümliche Zahl. Den vorliegenden 48 Differenzen wurden die Gewichte A gegeben, der Einfachheit wegen wurde indessen für $\sqrt{A}$ die nächstgelegene ganze Zahl angesetzt. Die 48 Bedingungsgleichungen enthalten 9 Unbekannte, nämlich $c_{6.5}$, $c_{7.0}$ . . $c_{9.0}$, α, β, γ. Die Aufstellung der Normalgleichungen nach der Methode der kl. Quadr. und ihre Auflösung ist verhältnissmässig einfach, da sich immer nur ein Theil derselben zusammenfindet. Wegen des interpolatorischen Charakters der ganzen, im Uebrigen nach allen Richtungen controllirten Rechnung hätte es kein Interesse mehr als das Endresultat anzuführen. Es ergab sich:

$$D.M. - H.R. = c_m - 0.014\,\delta - 0.043\,(\delta m) + 0.0368\left(\frac{\delta}{h_m}\right)$$

worin

$$\begin{aligned} c_{6.5} &= -\ 0.016 \\ c_{7.0} &= -\ 0.058 \\ c_{7.5} &= -\ 0.067 \\ c_{8.0} &= -\ 0.067 \\ c_{8.5} &= -\ 0.118 \\ c_{9.0} &= -\ 0.199 \end{aligned}$$

also für

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{lr} m = 6.5 & D.M. - H.R. = -\overset{m}{0.016} + \overset{m}{0.023} \cdot \delta \\ 7.0 & -0.058 + 0.024 \cdot \delta \\ 7.5 & -0.067 + 0.035 \cdot \delta \\ 8.0 & -0.067 + 0.068 \cdot \delta \\ 8.5 & -0.118 + 0.131 \cdot \delta \\ 9.0 & -0.199 + 0.246 \cdot \delta \end{array}\right\} (F)$$

Das Resultat dieser Formel ist unter F' in der obigen Tabelle angegeben. Der Anschluss der Zahlen F' an die Δ ist, abgesehen von den bereits namhaft gemachten unsicheren Δ, ein ziemlich zufriedenstellender und die Formel (F) wird in vielen Fällen die frühere Tabelle ersetzen können. Die starke Zunahme der Coefficienten von δ mit m ist ganz zweifellos, wie auch schon der Anblick der ursprünglichen Tabellen ergiebt.

Die Vergleichung zwischen der südlichen Durchmusterung (*S. D.*) und der *H. R.* konnte in Anbetracht der weit geringeren Zahl von Vergleichspunkten nur in weniger ausgedehntem Masse durchgeführt werden. Es wurden hier die Sterngrössen der *S. D.* in die 4 Gruppen zusammengefasst: 1. Gruppe 6.6^m—7.5^m incl., 2. Gruppe 7.6^m–$8,5^m$ incl., 3. Gruppe 8.6^m–9.0^m incl., 3a. Gruppe 9.1^m—9.2^m. Die Gruppe 3a wurde zunächst aus denselben Gründen, wie 6a bei der *D. M.* gebildet. Die Zahl der verfügbaren Differenzen ist bei ihr viel zu gering, sodass sich nur constatiren lässt, dass eine auffallende Abweichung in ihrem Verhalten gegen die Gruppe 3 nicht besteht, weshalb nichts anderes übrig bleibt, als beide Gruppen zu vereinigen. Im Ganzen enthalten die folgenden Tabellen 2789 Sterne, also etwa $^1/_4$ der Anzahl, welche bei der *D. M.* angewendet werden konnte. Diese Tabellen sind ganz ähnlich entstanden und angeordnet, wie die analogen für *D. M.* Es wäre der Vollständigkeit wegen nur zu erwähnen, dass in Gegenden, wo stärkere negative Differenzen auftreten, noch solche vom Betrage 0.71 und 0.72 zugelassen und also nicht ausgeschlossen worden sind. Die Grenzen für die Zonen, welche manchmal kleine Verschiebungen erlitten, wenn sie dadurch in eine Lücke im Verzeichnisse der *H. R.* fielen, wurden den folgenden Zahlen gemäss angenommen:

Digitized by Google

	−4°	−5°
	0h 0m	0h 0m
VIII	2 58	2 58
VII	4 43	4 43
VI	6 14	6 10
V	7 40	7 40
IV	9 20	9 20
III	11 12	11 12
II	14 31	14 26
III	16 20	16 22
IV	17 52	17 50
V	19 21	19 21
VI	20 55	20 50
VII	22 35	22 30
VIII	0h	0h

	−9°	−10°
	0h 0m	0h 0m
IX	1 28	1 28
VIII	3 23	3 18
VII	4 55	4 55
VI	6 22	6 22
V	7 54	7 54
IV	9 33	9 36
III	11 45	11 45
II	13 50	13 49
III	16 1	16 1
IV	17 40	17 40
V	19 11	19 11
VI	20 42	20 42
VII	22 12	22 12
VIII	0h	0h

	−14°	−15°	−19°	−20°
	0h 0m	0h 0m	0h 0m	0h 0m
IX	1 50	1 50	2 6	2 6
VIII	3 30	3 30	3 42	3 42
VII	5 0	5 0	5 13	5 13
VI	6 30	6 30	6 41	6 42
V	8 4	8 7	8 16	8 16
IV	9 48	9 54	10 15	10 15
III	15 36	15 36	15 20	15 20
IV	17 30	17 26	17 20	17 13
V	19 6	19 0	18 53	18 50
VI	20 30	20 30	20 24	20 24
VII	22 5	22 5	21 54	21 54
VIII	23 33	23 33	23 20	23 20
IX	0h	0h	0h	0h

Ich lasse nun die Tabellen für die Mittelwerthe der Differenzen *S.D.* — *H.R.* für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen folgen.

Digitized by Google

Grössen 6.6

	IX		VIII		VII		VI	
— 4°	—	—	13	— 0.04	14	— 0.07	14	+ 0.19
— 5	2	+ 0.24	6	— 0.02	9	+ 0.10	6	+ 0.02
— 9	—	—	10	— 0.08	15	— 0.05	9	— 0.10
— 10	3	— 0.31	15	+ 0.06	10	— 0.18	10	+ 0.17
— 14	8	— 0.09	9	— 0.39	15	— 0.04	12	+ 0.25
— 15	7	— 0.12	9	— 0.10	11	— 0.08	14	+ 0.17
— 19	10	+ 0.05	12	— 0.05	18	— 0.14	10	+ 0.05
— 20	3	— 0.29	12	— 0.18	9	— 0.03	6	+ 0.17
Summe	33	— 2.23	86	— 7.54	101	— 6.70	81	+ 10.39

Grössen 7.6

— 4°	—	—	13	— 0.04	27	— 0.25	13	— 0.06
— 5	—	—	17	— 0.14	16	— 0.15	20	— 0.10
— 9	6	— 0.06	9	— 0.09	12	— 0.05	13	+ 0.13
— 10	7	— 0.37	12	— 0.16	7	+ 0.09	22	+ 0.01
— 14	10	— 0.23	18	— 0.25	16	— 0.04	11	+ 0.22
— 15	5	— 0.35	11	— 0.26	16	— 0.14	10	+ 0.04
— 19	10	— 0.31	9	— 0.11	15	— 0.05	21	+ 0.09
— 20	11	— 0.27	8	— 0.22	3	— 0.03	19	+ 0.10
Summe	49	— 13.11	97	— 15.73	112	— 12.74	129	+ 5.66

Grössen 8.6

— 4°	—	—	20	— 0.28	15	— 0.32	20	— 0.18
— 5	—	—	23	— 0.24	20	— 0.27	22	— 0.12
— 9	3	— 0.26	12	— 0.37	18	— 0.24	15	— 0.13
— 10	6	— 0.40	8	— 0.46	9	— 0.30	26	— 0.08
— 14	9	— 0.43	13	— 0.40	9	— 0.28	19	— 0.20
— 15	9	— 0.41	12	— 0.41	10	— 0.19	24	— 0.03
— 19	5	— 0.40	14	— 0.36	8	— 0.39	19	— 0.06
— 20	5	— 0.44	11	— 0.30	19	— 0.18	26	— 0.05
Summe	37	— 14.92	113	— 37.58	108	— 28.17	171	— 17.41

Grössen 9.1

— 4°	—	—	1	— 0.05	3	— 0.40	8	— 0.31
— 5	—	—	3	— 0.23	3	— 0.43	3	— 0.23
— 9	—	—	2	— 0.29	5	— 0.12	4	— 0.11
— 10	—	—	2	— 0.19	1	— 0.46	3	— 0.14
— 14	—	—	3	— 0.39	2	— 0.34	4	+ 0.03
— 15	—	—	1	— 0.06	4	— 0.38	15	— 0.04
— 19	—	—	4	— 0.21	3	— 0.01	6	— 0.24
— 20	3	— 0.28	1	— 0.53	3	— 0.18	8	— 0.14
Summe	3	— 0.84	17	— 4.29	24	— 6.33	51	— 7.08

Digitized by Google

bis 7.5 incl.

V		IV		III		II	
16	− 0.03	14	− 0.06	6	− 0.13	15	+ 0.13
9	+ 0.12	13	− 0.32	12	− 0.04	6	− 0.14
11	− 0.02	7	− 0.15	8	− 0.03	14	+ 0.07
8	+ 0.17	15	+ 0.10	14	− 0.06	4	+ 0.02
13	0.00	16	+ 0.04	18	− 0.05		
23	+ 0.02	14	+ 0.01	14	+ 0.13		
18	+ 0.10	12	− 0.11	17	+ 0.08		
13	+ 0.12	16	− 0.03	13	− 0.05		
111	+ 5.76	107	− 5.61	102	− 0.80	39	+ 0.82

bis 8.5 incl.

16	− 0.04	15	− 0.32	7	− 0.12	23	− 0.19
18	− 0.05	9	− 0.06	17	− 0.12	14	− 0.02
19	− 0.15	16	− 0.27	13	+ 0.02	4	+ 0.23
13	− 0.18	22	− 0.31	14	− 0.04	5	− 0.02
18	− 0.01	14	+ 0.07	29	− 0.12		
19	− 0.09	20	− 0.02	21	− 0.19		
25	− 0.03	17	− 0.18?	12	− 0.14		
19	+ 0.01	24	− 0.10	20	− 0.12		
147	− 9.18	137	− 20.50	133	− 14.65	46	− 3.93

bis 9.0 incl.

25	− 0.06	16	− 0.21	16	− 0.23	13	− 0.28
10	− 0.16	17	− 0.18	19	− 0.19	20	− 0.26
31	− 0.15	15	− 0.41	22	− 0.19	10	− 0.21
29	− 0.08	14	− 0.35	21	− 0.30	9	− 0.22
33	− 0.13	22	− 0.20	14	− 0.17		
31	− 0.12	25	− 0.27	24	− 0.21		
42	+ 0.01	19	− 0.23	28	− 0.09		
24	− 0.02	28	− 0.21	29	− 0.18		
225	− 18.24	156	− 38.65	173	− 33.01	52	− 12.92

und 9.2

3	− 0.20	2	− 0.08	9	− 0.38	4	− 0.36
5	− 0.11	5	− 0.09	9	− 0.31	2	− 0.28
4	− 0.22	1	− 0.16	4	− 0.40	3	− 0.23
3	− 0.34	1	− 0.26	5	− 0.23	1	− 0.31
7	− 0.11	2	− 0.06	7	− 0.25		
7	− 0.19	5	− 0.38	10	− 0.37		
14	0.00	6	− 0.23	6	− 0.13		
8	+ 0.01	5	− 0.22	11	− 0.39		
51	− 5.01	27	− 5.51	61	− 19.60	10	− 2.99

Digitized by Google

Nimmt man die Mittel für die einzelnen Zonen und Grössengruppen, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

Zone	$6.6^m - 7.5^m$ Δ	A	$7.6^m - 8.5^m$ Δ	A
IX	— 0.068	33	— 0.268	49
VIII	— 0.088	86	— 0.162	97
VII	— 0.066	101	— 0.114	112
VI	+ 0.128	81	+ 0.044	129
V	+ 0.052	111	— 0.062	147
IV	— 0.052	107	— 0.150	137
III	— 0.008	102	— 0.110	133
II	+ 0.021	39	— 0.085	46
Mittel	— 0.009	660	— 0.099	850

	$8.6^m - 9.0^m$ Δ	A	9.1^m, 9.2^m Δ	A	$8.6^m - 9.2^m$ Δ	A
IX	— 0.403	37	— 0.280	3	— 0.394	40
VIII	— 0.333	113	— 0.252	17	— 0.322	130
VII	— 0.261	108	— 0.264	24	— 0.261	132
VI	— 0.102	171	— 0.139	51	— 0.110	222
V	— 0.081	225	— 0.098	51	— 0.084	276
IV	— 0.248	156	— 0.204	27	— 0.241	183
III	— 0.191	173	— 0.325	61	— 0.225	234
II	— 0.248	52	— 0.299	10	— 0.257	62
		1035		244	— 0.197	1279

Der Einfluss der Milchstrasse tritt in den vorstehenden Zahlen überaus deutlich hervor, aber die einzelnen Mittelwerthe verlaufen nicht mehr so regelmässig, wie bei der *D.M.* Dies ist zum Theil jedenfalls eine Folge der kleineren Anzahl der benützten Differenzen, zum Theil aber auch vielleicht eine Folge davon, dass durch die stärker wirkende Extinction und die dadurch bedingte Veränderung im Aussehen der Sternbilder die *S.D.* grösseren systematischen Schätzungsfehlern leichter ausgesetzt war. Es ist auch nicht die Vermuthung abzuweisen, dass die Feldbeleuchtung, so sorgfältig ihre Regulirung auch geschehen und so gering auch ihre Intensität gewesen sein mag, dabei mitgewirkt hat. Auffallend ist auch das asymmetrische Verhalten der symmetrisch gegen die Milchstrasse gelegenen Zonen, namentlich der Zonen IV und VI. Zone VI zeigt überall beträchtlich grössere Werthe — algebraisch genommen — als IV und bei den ersten beiden Gruppen liegt das Maximum nicht in Zone V, sondern in VI. Hier hat also irgend ein

Digitized by Google

zweiter Einfluss stark mitgewirkt und es ist von vorherein klar, dass es nicht möglich ist, die gefundenen Differenzen durch so einfache Formeln, wie bei der *D.M.*, in gleich befriedigender Weise darzustellen. Um indessen das Verhalten der *S.D.* deutlicher, wenn auch nur in ganz allgemeinen Zügen, übersehen zu können und eine Abschätzung des Einflusses der Lage zur Milchstrasse vornehmen zu können, habe ich die Zonen II und VIII, III und VII, IV und VI nach Massgabe der Gewichte Δ zu Mitteln vereinigt und diese Mittelwerthe, mit auf ganze Zahlen abgekürzten Wurzeln aus den Δ, für jede Gruppe einzeln durch die Formel

$$S.D. - H.R. = h_0 + a \cdot \delta$$

nach der Methode der kl. Quadr. dargestellt und es ergab sich so

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } 7.0^m & S.D. - H.R. = & 0.000 + 0.214\,\delta \\ \text{„ } 8.0 & = & -0.092 + 0.196\,\delta \\ \text{„ } 9.0 & = & -0.192 + 0.374\,\delta \end{array}\right\} \text{(F)}$$

Hierbei wurde δ für die Zonen IX, $\frac{1}{2}$ (II + VIII), $\frac{1}{2}$ (III + VII), $\frac{1}{2}$ (IV + VI), V, entsprechend der Anzahl der Sterne, die in der *S.D.* überhaupt vorkommen, der Reihe nach angenommen: — 0.24, — 0.23, — 0.17, + 0.05, + 0.30, Dies ist an und für sich wieder eine einigermassen willkürliche Annahme, die sich aber in der Hauptsache, wie eine Vergleichung der Werthe *F* und Δ in der folgenden Zusammenstellung zeigt, bewährt hat.

Zone	$6.6^m - 7.5^m$		$7.6^m - 8.5^m$		$8.6^m - 9.2^m$	
	Δ	*F*	Δ	*F*	Δ	*F*
IX	— 0.068	— 0.052	— 0.268	— 0.139	— 0.394	— 0.282
II u. VIII	— 0.054	— 0.050	— 0.137	— 0.137	— 0.301	— 0.278
III u. VII	— 0.037	— 0.036	— 0.112	— 0.126	— 0.238	— 0.256
IV u. VI	+ 0.025	+ 0.011	— 0.056	— 0.082	— 0.170	— 0.174
V	+ 0.052	+ 0.064	— 0.063	— 0.033	— 0.084	— 0.080

Insoweit die letzten Formeln (F) für die *S.D.* und die analogen für die *D.M.* als Ausdruck für die Differenzen der Grössenangaben der beiden Durchmusterungen — Harvard Revision

Digitized by Google

angesehen werden dürfen, würden also für die Grössenangaben der *D.M.* und *S.D.* die Relationen folgen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Grösse } 7.0^{m} & S.D. - D.M. = & + \overset{m}{0.058} + \overset{m}{0.180}\,\delta \\ \quad\text{,} \quad 8.0 & & = - 0.025 + 0.128\,\delta \\ \quad\text{,} \quad 9.0 & & = + 0.007 + 0.128\,\delta \end{array}\right\}$$

Auf die Sternschätzungen der *S.D.* ist demnach der Einfluss der Sternhäufigkeit ein grösserer gewesen, wie bei der *D.M.* In roher Annäherung wird man in vielen Fällen setzen dürfen: $S.D. - D.M. = + 0.14^{m}\,\delta$.

Digitized by Google

Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt.

Von **F. Lindemann.**

(*Eingelaufen 20. April.*)

Die Lösung des Problems der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt geschieht bekanntlich mittelst elliptischer Functionen; die Einführung derselben erfordert zwei Schritte: zuerst die Integration der Euler'schen Differential-Gleichungen, die keinerlei Schwierigkeiten bietet, dann die Berechnung der neun Cosinus der Neigungen der im Körper festen Coordinaten-Axen gegen die im Raume fest gedachten Axen. Letztere Berechnung erscheint trotz der von Hermite und anderen angebrachten Vereinfachungen noch immer sehr umständlich. Indem ich umgekehrt den Körper fest, den ganzen Raum aber bewegt denke, führe ich im Folgenden das Problem auf eine von W. Voigt behandelte Aufgabe der Hydrodynamik zurück, für welche die Lösung von Venske in sehr eleganter Form auf Quadraturen reducirt ist. Unter den Integralzeichen erscheinen dabei elliptische Functionen, und man braucht daher die verlangten Integrationen nur nach bekannten Regeln auszuführen, um die fertigen Formeln zu erhalten. Ich habe die Rechnungen so weit durchgeführt, dass die Resultate in der von Hermite gegebenen Gestalt erscheinen, mich deshalb auch ausschliesslich der Jacobi'schen Bezeichnungsweise für die elliptischen Functionen bedient.

Zum Schlusse zeige ich, dass durch eine analoge Ueber-

Digitized by Google

legung auch ein gewisses anderes Rotationsproblem, das ebenfalls von W. Voigt besprochen ist, auf eine durch Clebsch, H. Weber und F. Kötter erledigte Aufgabe der Hydrodynamik zurückgeführt werden kann.

§ 1. Die Euler'schen Differentialgleichungen.

Die Haupt-Trägheits-Axen eines um seinen Schwerpunkt frei beweglichen Körpers mögen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen. Sie seien mit A, B, C bezeichnet (wo $A < B < C$), so dass die Gleichung des Trägheits-Ellipsoids in der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

gegeben ist. Sind p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Körpers um die drei (im Körper festen) Haupt-Trägheitsaxen und ist w die Winkelgeschwindigkeit um die momentane Drehungs-Axe, so ist

$$p = w \cos \alpha, \quad q = w \cos \beta, \quad r = w \cos \gamma, \tag{2}$$

$$w^2 = p^2 + q^2 + r^2, \tag{3}$$

wenn α, β, γ die Richtungswinkel der momentanen Drehungsaxe bezeichnen. Der Pol der Drehung, d. i. der Schnittpunkt dieser Drehungsaxe mit dem Centralellipsoide hat die Coordinaten

$$x_0 = \frac{p}{h}, \quad y_0 = \frac{q}{h}, \quad z_0 = \frac{r}{h}, \tag{4}$$

wenn

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2 \tag{5}$$

ist. Für p, q, r bestehen bekanntlich, da wir das Wirken äusserer Kräfte ausschliessen, die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)pq. \end{aligned} \tag{6}$$

Digitized by Google

Mit Hülfe der Gleichung (3), (5) und der weiteren Relation

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2, \tag{7}$$

wo h und k Integrationsconstante bedeuten, wird die Integration der Gleichungen (6) leicht auf elliptische Integrale reducirt. Man kann auch so vorgehen, dass man die Gleichungen (6) direct mit den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \operatorname{am} u}{du} &= \cos \operatorname{am} u \cdot \Delta \operatorname{am} u, \\ \frac{d \operatorname{cosin} \operatorname{am} u}{du} &= -\Delta \operatorname{am} u \cdot \sin \operatorname{am} u, \\ \frac{d \Delta \operatorname{am} u}{du} &= -\varkappa^2 \sin \operatorname{am} u \cdot \operatorname{cosin} \operatorname{am} u \end{aligned} \tag{8}$$

vergleicht, und dann das Argument u und den Modul $\varkappa^2$ entsprechend bestimmt. Auf diese Weise ergibt sich:[1])

$$\begin{gathered} p = a \operatorname{cosin} \operatorname{am} u, \quad q = b \sin \operatorname{am} u, \quad r = c \Delta \operatorname{am} u, \\ u = \lambda t + \mu, \end{gathered} \tag{9}$$

wo nun die Constanten a, b, c, λ durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} b^2 = a^2 \frac{A(A-C)}{B(B-C)}, \quad \lambda^2 = c^2 \frac{(A-C)(B-C)}{AB}, \\ \varkappa^2 = \frac{a^2}{c^2} \frac{A(A-B)}{C(B-C)} \end{gathered} \tag{10}$$

berechnet werden, während μ von den Anfangswerthen p_0, q_0, r_0 der Grössen p, q, r abhängt, so dass

$$p_0 = a \operatorname{cosin} \operatorname{am} \mu, \quad q_0 = b \sin \operatorname{am} \mu, \quad r_0 = c \Delta \operatorname{am} \mu. \tag{11}$$

---

[1]) Vgl. z. B. Kirchhoff's Vorlesungen über Mechanik, 7. Vorlesung.

Digitized by Google

§ 2. Relative Bewegung des Raumes gegen das feste Central-Ellipsoid.

Eine unendlich kleine Drehung um eine Axe mit den Richtungs-Winkeln α, β, γ, bei der ein Punkt x, y, z in den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergeführt wird, kann bekanntlich durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$
\begin{aligned}
dx &= d\varphi\,[\quad * \quad - y \cdot \cos\gamma + z \cdot \cos\beta],\\
dy &= d\varphi\,[\quad x\cos\gamma + \quad * \quad - z \cdot \cos\alpha],\\
dz &= d\varphi\,[-x\cos\beta + y\cos\alpha + \quad * \quad],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

wo $d\varphi$ den unendlich kleinen Drehungswinkel bezeichnet. Die Rotation ist dadurch von selbst in ihre drei Componenten um die drei Coordinaten-Axen zerlegt.

Um die Rotation des Trägheits-Ellipsoids um die instantane Drehungs-Axe darzustellen, müssten wir ein im Körper festes Coordinatensystem einführen und auf dieses die Gleichungen (12) anwenden, wobei dann $\frac{d\varphi}{dt} = w$ zu setzen wäre, da die Winkelgeschwindigkeit mit w bezeichnet wurde. Statt dessen kann man aber sich vorstellen, dass der Körper fest in seiner Lage verharre, dagegen der ganze Raum sich relativ zu ihm in entgegengesetztem Sinne um die Axe drehe, in welchem Falle dann nur

$$
\frac{d\varphi}{dt} = -w \tag{13}
$$

zu setzen ist, wenn w die frühere Bedeutung behalten soll. Mit Rücksicht auf (2) gehen dadurch die Gleichungen (12) über in die Form

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= ry - qz,\\
\frac{dy}{dt} &= pz - rx,\\
\frac{dz}{dt} &= qx - py.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Digitized by Google

Die Elimination von zweien der Grössen x, y, z führt auf eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für die dritte dieser Grössen, deren Coëfficienten in Folge von (6) rationale Functionen von p, q, r sind. Diese Coëfficienten sind somit doppelt-periodische Functionen von u, und die Integrale der Differentialgleichung müssen sich nach Picard als doppelt periodische Functionen zweiter Art (im Sinne Hermite's) ergeben.

Gerade mit einem Systeme von Differentialgleichungen von der Form (14) hat sich Picard eingehend beschäftigt unter der Voraussetzung, dass p, q, r doppelt periodische Functionen erster Art seien, und ist hier zu folgenden Resultaten gekommen:[1]) Es gibt ein Fundamentalsystem von Integralen

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, dass zwischen zwei Reihen zusammengehöriger Integrale Identitäten der Form

$$x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n = c_{mn} \tag{15}$$

bestehen, wo m auch gleich n sein kann und c_{mn} Constante bedeuten.

In unserem Falle lässt sich nun ein System x_1, y_1, z_1 von Lösungen angeben, das durch doppelt periodische Functionen erster Art von u dargestellt wird; und dadurch treten wesentliche Vereinfachungen ein. In der That können wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha p = \alpha a \operatorname{cosin} \operatorname{am} u = \alpha a \cdot \operatorname{cn} u, \\ y_1 &= \beta q = \beta b \quad \sin \operatorname{am} u = \beta b \cdot \operatorname{sn} u, \\ z_1 &= \gamma r = \gamma c \quad \Delta \operatorname{am} u = \gamma c \cdot \operatorname{dn} u. \end{aligned} \tag{16}$$

Führen wir nemlich diese Werthe in (14) ein, so folgt:

---

[1]) Picard, Sur les équations différentielles linéaires à coëfficients doublement périodiques, Crelle's Journal Bd. 90, 1881.

Digitized by Google

$$\alpha \frac{dp}{dt} = (\beta - \gamma) q r, \quad \beta \frac{dq}{dt} = (\gamma - \alpha) r p, \quad \gamma \frac{dr}{dt} = (\alpha - \beta) p q,$$

so dass sich die Constanten α, β, γ durch die Gleichungen

$$(17) \qquad \alpha = A \cdot l, \quad \beta = B \cdot l, \quad \gamma = C \cdot l$$

bestimmen, wenn l zunächst unbestimmt bleibt.

Es ist dies dieselbe Rechnung, welche auch sonst bei Behandlung des vorliegenden Problems benutzt wird,[1]) denn die Gleichungen (14) sind wesentlich identisch mit denjenigen Differentialgleichungen, durch die man die neun Coëfficienten in den linearen Gleichungen

$$(18) \qquad \begin{aligned} \xi &= c_{11} x + c_{12} y + c_{13} z \\ \eta &= c_{21} x + c_{22} y + c_{23} z \\ \zeta &= c_{31} x + c_{32} y + c_{33} z \end{aligned}$$

bestimmt, welche das im Körper feste Coordinatensystem ξ, η, ζ mit dem im Raume festen x, y, z verbinden.

Die Gleichung (15) können wir hier für $m = n = 1$ auf die Form

$$(19) \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

gebracht denken, wenn wir die Constante l mit Rücksicht auf (7) durch die Bedingung

$$(20) \qquad k^2 \cdot l^2 = 1$$

festlegen.

Durch die Gleichungen (16), in denen die Constanten α, β, γ, l nunmehr durch (17) und (20) vollständig gegeben sind, wird die Bewegung eines ausgezeichneten Raumpunktes, nemlich des Schnittpunktes der instantanen Drehungsaxe mit der Kugel (19), dargestellt, d. h. die relative Lage dieses Punktes gegen das Ellipsoid zu jeder Zeit angegeben. Der Punkt bewegt sich bekanntlich auf einer Raumcurve vierter Ordnung.

---

[1]) Vgl. z. B. Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques, p. 24, Paris 1885 (Abdruck aus den Comptes rendus).

Digitized by Google

§ 3. Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen des Problems.

Da jetzt eine Lösung der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung bekannt ist, welche man aus dem Systeme (14) abzuleiten hätte, so wird sich diese Gleichung auf eine solche zweiter Ordnung reduciren lassen, und dadurch würden wir im Wesentlichen auf die von Hermite (a. a. O.) zur Bestimmung der Coëfficienten c_k in (18) befolgte Methode geführt werden. Die Aufstellung dieser Gleichung zweiter Ordnung kann aber auch erspart werden, indem sich auf einem von Venske angegebenen Wege die weitere Behandlung des Problems direct auf Quadraturen zurückführen lässt.

Im Anschlusse an ein Problem der Hydrodynamik, das von W. Voigt bearbeitet war, beschäftigt sich Venske mit dem Systeme von Gleichungen:[1])

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{a^2+c^2} - \frac{y\zeta}{a^2+b^2}\right),\\
\frac{dy}{dt} &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{b^2+a^2} - \frac{z\xi}{b^2+c^2}\right),\\
\frac{dz}{dt} &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{c^2+b^2} - \frac{x\eta}{c^2+a^2}\right),
\end{aligned}
$$

in denen a, b, c Constante bedeuten und ξ, η, ζ elliptische Functionen von t sind, definirt durch die Gleichungen:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)\,(a^2+c^2)}\,\eta\zeta,\\
\frac{d\eta}{dt} &= \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)\,(b^2+a^2)}\,\zeta\xi,\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)\,(c^2+b^2)}\,\xi\eta.
\end{aligned}
$$

---

[1]) Vgl. Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrg. 1891, p. 85.

Digitized by Google

Offenbar braucht man hier die auftretenden constanten Factoren nur in die Definition der Functionen ξ, η, ζ und x, y, z passend eingehen zu lassen, um direct zu unseren Gleichungen (13) und (9) geführt zu werden. In der That lässt sich auch die Venske'sche Methode leicht auf das uns vorliegende Problem in der folgenden Weise übertragen.

Die Picard'schen Relationen (15) lassen sich durch passende Auswahl der particulären Lösungs-Systeme x_2, y_2, z_2 und x_3, y_3, z_3 auf eine solche Form bringen, dass neben der Gleichung (19) noch die folgenden Identitäten erfüllt sind:

$$
\begin{aligned}
&x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1\,,\\
&x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1\,,\\
(23)\qquad &x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0\,,\\
&x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 = 0\,,\\
&x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Aus ihnen folgt in bekannter Weise:

$$(24)\quad x_1 = \varepsilon(y_2 z_3 - y_3 z_2),\ x_2 = \varepsilon(y_3 z_1 - y_1 z_3),\ x_3 = \varepsilon(y_1 z_2 - y_2 z_1),$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ den Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

bedeutet. Ebenso ist

$$
(25)\quad
\begin{aligned}
&y_1 = \varepsilon(z_2 x_3 - z_3 x_2),\ y_2 = \varepsilon(z_3 x_1 - z_1 x_3),\ y_3 = \varepsilon(z_1 x_2 - z_2 x_1),\\
&z_1 = \varepsilon(x_2 y_3 - x_3 y_2),\ z_2 = \varepsilon(x_3 y_1 - x_1 y_3),\ z_3 = \varepsilon(x_1 y_2 - x_2 y_1).
\end{aligned}
$$

Aus (24) und (25) folgen dann die weiteren Relationen

$$
\begin{aligned}
&x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\,,\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0\,,\\
(26)\qquad &y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\,,\ z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 = 0\,,\\
&z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1\,,\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Nun ist identisch

$$d\log(x_2 + i\,x_3) = \frac{x_2\,dx_2 + x_3\,dx_3 + i\,(x_2\,dx_3 - x_3\,dx_2}{x_2^2 + x_3^2}\ ^{1)}$$

Im Zähler der rechten Seite führen wir dx_2 und dx_3 vermöge (14) auf y_2, z_2 und y_3, z_3 zurück; diese Zähler sind dann gleich

$$\Big[r(x_2y_2+x_3y_3) - q(x_2z_2+x_3z_3) + ir(x_2y_3-x_3y_2) - iq(x_2z_3-x_3z_2)\Big]dt$$

oder wegen (25) und (26) gleich

$$(-r\,x_1\,y_1 + q\,x_1\,z_1 + i\,\varepsilon\,r\,z_1 + i\,\varepsilon\,q\,y_1)\,dt$$

und wegen (16) und (17) gleich

$$\Big[p\,q\,r\,A\,l^2\,(C - B) + i\,\varepsilon\,l\,(h^2 - A\,p^2)\Big]\,dt$$

Auf den Nenner unseres Ausdruckes für $d\log(x_2 + i\,x_3)$ wenden wir die erste Relation (26) an und finden mit Benutzung von (20):

$$(27)\qquad \frac{d\log(x_2+ix_3)}{dt} = i\varepsilon k\frac{h^2 - Ap^2}{k^2 - A^2p^2} - A(B-C)\frac{pqr}{k^2 - A^2p^2},$$

ebener für die anderen Coordinaten:

$$(27\,\mathrm{a})\qquad \begin{aligned} \frac{d\log(y_2+iy_3)}{dt} &= i\varepsilon k\frac{h^2 - Bq^2}{k^2 - B^2q^2} - B(C-A)\frac{pqr}{k^2 - B^2q^2}, \\ \frac{d\log(z_2+iz_3)}{dt} &= i\varepsilon k\frac{h^2 - Cr^2}{k^2 - C^2r^2} - C(A-B)\frac{pqr}{k^2 - C^2r^2}, \end{aligned}$$

Hiemit ist im Principe die gestellte Aufgabe vollständig gelöst; es handelt sich nur noch darum, die vorkommenden elliptischen Integrale in die übliche Form zu transformiren.

---

[1]) Auf dieser Identität beruht auch die Durchführung der Quadraturen bei dem Probleme der Bewegung eines starren Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit; vgl. Halphen, Traité des fonctions elliptiques; 2ième partie, p. 157, Paris 1888.

Digitized by Google

§ 4. Ausführung der Quadraturen.

Statt t führen wir wieder $u = \lambda t + \mu$ als Integrationsvariable ein. Zunächst finden wir für das zweite Glied der rechten Seite von (27):

$$(28)\quad A(B-C)\int_0^t \frac{pqr}{k^2-A^2p^2}\,dt = \frac{A^2}{2}\int_{p_0^2}^{p^2} \frac{d(p^2)}{k^2-A^2p^2} = -\tfrac{1}{2}\lg\frac{k^2-A^2p^2}{k^2-A^2p_0^2}.$$

Zur Umformung des ersten Gliedes der rechten Seite von (27) benutzen wir einige Relationen, die sich aus (8) und (9) für $u=0$ und $u=K$ ergeben, nämlich:

$$(29)\quad \begin{aligned} h^2 &= A\,a^2 + C\,c^2 = B\,b^2 + C\,c^2 - \varkappa^2 C\,c^2\,, \\ k^2 &= A^2 a^2 + C^2 c^2 = B^2 b^2 + C^2 c^2 - \varkappa^2 C^2 c^2\,; \end{aligned}$$

ferner definiren wir eine reelle Constante ω durch die Gleichung

$$(30)\qquad \sin^2 \operatorname{am} i\,\omega = -\frac{A(B-C)}{C(A-B)},$$

so dass auch:

$$(31)\qquad \operatorname{cosin}^2 \operatorname{am} i\,\omega = \frac{B(A-C)}{C(A-B)},\quad \Delta^2 \operatorname{am} i\,\omega = \frac{k^2}{c^2C^2};$$

dann wird

$$k\frac{h^2-Ap^2}{k^2-A^2p^2} = \frac{k}{C} - k\frac{a^2A(A-C)\operatorname{sn}^2 u}{c^2C^2(1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 i\,\omega\operatorname{sn}^2 u)}$$

$$= c\cdot\operatorname{dn} i\,\omega - i\,\lambda\frac{\varkappa^2\operatorname{sn} i\,\omega\cdot\operatorname{cn} i\,\omega\cdot\operatorname{dn} i\,\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 i\,\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}.$$

Die nöthige Integration lässt sich hiernach mittelst der Jacobi'schen Formel für Normalintegrale dritter Gattung

$$\int_0^u \frac{\varkappa^2\operatorname{sn} a\cdot\operatorname{cn} a\cdot\operatorname{dn} a\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 u\cdot\operatorname{sn}^2 a}\,du = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$$

ausführen und ergibt:

Digitized by Google

$$\log \frac{x_2 + i\,x_3}{x_2^0 + i\,x_3^0}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{\Theta(u - i\omega)\,\Theta(\mu + i\omega)}{\Theta(u + i\omega)\,\Theta(\mu - i\omega)} + \varepsilon\left(\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} + i\,c \cdot \mathrm{dn}\, i\,\omega\right)(u - \mu) \cdot$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log \frac{k^2 - a^2 p^2}{k^2 - a^2 p_0^2}.$$

Hierin ist $\varepsilon = \pm 1$ und μ ist der Werth von u für $t = 0$, mit dem p_0 durch (11) zusammenhängt; x_2^0 und x_3^0 bezeichnen die Werthe von x_2 und x_3 zur Zeit $t = 0$. Das letzte Glied lässt sich noch weiter vereinfachen, denn es ist:

$$k^2 \quad a^2 p^2 = c^2 C^2 (1 - \varkappa^2 \mathrm{sn}^2 i\,\omega \cdot \mathrm{sn}^2 u)$$

(32) $$= c^2\, C^2\, \frac{\Theta(u + i\,\omega)\,\Theta(u - i\,\omega)}{\Theta(u)^2\,\Theta(i\,\omega)^2}\,\Theta(o)^2.$$

Wählen wir $\varepsilon = +1$ (andernfalls wäre nur i mit $-i$ zu vertauschen), und setzen zur Abkürzung

(33) $$\Omega = \frac{\Theta'(i\,\omega)}{\Theta(\omega)} + i\,c \cdot \mathrm{dn}\, i\,\omega\,,$$

so wird schliesslich:

(34) $$\frac{x_2 + i\,x_3}{x_2^0 + i\,x_3^0} = \frac{\Theta(u - i\,\omega)\,\Theta(\mu)}{\Theta(\mu - i\,\omega)\,\Theta(u)}\, e^{\Omega(u - \mu)}.$$

Um auch y_2 und y_3, z_2 und z_3 zu finden, braucht man die in (27a) verlangten Quadraturen nicht wirklich auszuführen: Es können diese Grössen vielmehr aus den Werthen von x_2 und x_3 vermöge (24) und (25) gefunden werden, ohne dass eine neue Integration nöthig wäre. In der That ist identisch

$$(x_2 + i\,x_3)(y_2 - i\,y_3) = x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - i\,(x_2\,y_3 - x_3\,y_2)$$

aber nach (25) und (26):

(35) $$= -x_1\,y_1 - i\,z_1\,.$$

Digitized by Google

Nun ist nach (16) und (17)

$$x_1 y_1 = a \beta p q = a b A B l^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u ;$$

Das Vorzeichen der durch (30) eingeführten Grösse ω ist noch nicht bestimmt; wir definiren es so, dass

$$\frac{a A}{c C} = - i \varkappa \operatorname{sn} i \omega$$

wird; aus den Gleichungen (10) und (31) folgt dann weiter:

$$\begin{aligned} \frac{a A}{k} &= - i \varkappa \frac{\operatorname{sn} i \omega}{\operatorname{dn} i \omega} = i \frac{\varkappa}{\varkappa'} \operatorname{cn} (i \omega + K) , \\ \frac{b B}{k} &= \varkappa \frac{\operatorname{cn} i \omega}{\operatorname{dn} i \omega} = \varkappa \operatorname{sn} (i \omega + K) , \\ \frac{c C}{k} &= \frac{1}{\operatorname{dn} i \omega} = \frac{1}{\varkappa'} \operatorname{dn} (i \omega + K) . \end{aligned} \tag{36}$$

Die Gleichungen (16) gehen dadurch über in

$$\begin{aligned} x_1 &= i \frac{\varkappa}{\varkappa'} \operatorname{cn} (i \omega + K) \cdot \operatorname{cn} u , \\ y_1 &= \varkappa \operatorname{sn} (i \omega + K) \cdot \operatorname{sn} u , \\ z_1 &= \frac{1}{\varkappa'} \operatorname{dn} (i \omega + K) \cdot \operatorname{dn} u , \end{aligned} \tag{37}$$

Nach dem Additionstheoreme der Function Δ am wird daher

$$\begin{aligned} & - y_1 x_1 - i z_1 \\ &= \frac{-i}{\varkappa'} (1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 (i \omega + K)) \operatorname{dn} (u - i \omega - K) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta(u + i \omega + K) \Theta(u - i \omega - K)}{\Theta(u)^2 \Theta(i \omega + K)^2} \Theta(o)^2 \frac{\Theta_1(u - i \omega - K)}{\Theta(u - i \omega - K)} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta_1 (u + i \omega) \cdot \Theta (u - i \omega) \cdot \Theta (o)^2}{\Theta (u)^2 \Theta_1 (i \omega)^2} . \end{aligned} \tag{38}$$

Diesen Werth führen wir in (35) ein, drücken noch $x_2 + i x_3$ mittelst (34) durch Θ-Functionen aus, vertauschen i mit $-i$ und finden so

Digitized by Google

$$(y_2 + i\,y_3)(x_2^0 - i\,x_3^0)$$

$$(39) \qquad = \frac{-1}{i\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta_1(u - i\,\omega)\,\Theta(\mu + i\,\omega)\,\Theta(o)^2}{\Theta(u)\,\Theta(\mu)\,\Theta_1(i\,\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)},$$

und, wenn die Anfangswerthe von y_2 und y_3 benutzt werden:

$$(40) \qquad \frac{y_2 + i\,y_3}{y_2^0 + i\,y_3^0} = \frac{\Theta_1(u - i\,\omega)\,\Theta(\mu)}{\Theta_1(\mu - i\,\omega)\,\Theta(u)} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

Ebenso findet man aus (23), (24) und (37)

$$(z_2 - iz_3)(y_2 + iy_3) = -y_1 z_1 - ix_1$$

$$(41) \qquad = -\frac{\varkappa}{\varkappa'}(1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2(i\omega + K) \operatorname{sn}^2 u) \operatorname{cn}(u + i\omega + K)$$

$$= -\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \frac{\Theta_1(u - i\omega)\,H_1(u + i\omega)\,\Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\,\Theta_1(i\omega)^2},$$

oder unter Benutzung von (40) und durch Vertauschung von i mit $-i$:

$$(42) \quad (z_2 + iz_3)(y_2^0 - iy_3^0) = -\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \frac{H_1(u - i\omega)\,\Theta(\mu + i\omega)\,\Theta(o)^2}{\Theta(\mu)\,\Theta(u)\,\Theta_1(i\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

In der gleichen Weise hätte man die Relation

$$(z_2 + i\,z_3)(x_2 - i\,x_3) = -z_1 x_1 - i\,y_1$$

$$= \frac{i\varkappa}{\operatorname{dn}^2 i\omega} \operatorname{sn}(i\omega - u) \cdot (1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 i\omega \operatorname{sn}^2 u)$$

$$= -i\frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'} \frac{H(u - i\omega)\,\Theta(u + i\omega)\,\Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\,\Theta_1(i\omega)^2}$$

benutzen können, aus der sich dann mittelst (34) das Resultat

$$(42\text{a}) \quad (z_2 + iz_3)(x_2^0 - ix_3^0) = -i\frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'} \frac{H(u - i\omega)\,\Theta(\mu + i\omega)\,\Theta(o)^2}{\Theta(\mu)\,\Theta(u)\,\Theta_1(i\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)}$$

ergibt. Hieraus oder aus (42) findet sich endlich

$$(43) \qquad \frac{z_2 + i\,z_3}{z_2^0 + i\,z_3^0} = \frac{H(u - i\omega)\,\Theta(\mu)}{H(\mu - i\omega)\,\Theta(u)} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

Digitized by Google

Durch die Formeln (34), (37), (40), (43) ist das Problem der Drehung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt vollständig gelöst; denn für die drei Punkte mit den Coordinaten

$$x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3 \tag{44}$$

sind diese Coordinaten als Functionen der Zeit t explicite dargestellt; und dadurch ist die relative Bewegung des Raumes gegen den starren Körper vollständig bestimmt.

§ 5. Lage eines festen Axenkreuzes gegen ein bewegliches.

Immerhin wird es nützlich sein, noch einige weitere Ausführungen folgen zu lassen, um den Zusammenhang mit der üblichen Darstellung zu vervollständigen, gleichzeitig auch die Formeln durch nähere Bestimmung der Constanten $x_2^0, x_3^0, y_2^0, y_3^0, z_2^0, z_3^0$ zu vereinfachen.

Die drei Punkte (44) sind die Durchstossungs-Punkte von drei zu einander rechtwinkligen Axen mit einer um den Anfangspunkt gelegten Kugel vom Radius Eins. Ihre Coordinaten sind daher direct gleich den Cosinus der Neigungen dieser Axen gegen das im Körper feste Axen-System der Hauptträgheitsaxen. Bezeichnen wir also durch ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes gegen die neuen Axen, welche den Anfangspunkt mit den drei Punkten (44) verbinden, durch x, y, z die Coordinaten desselben Punktes gegen das im Körper feste Axenkreuz, so bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 x + y_1 y + z_1 z, & x &= x_1 \xi + x_2 \eta + x_3 \zeta, \\ \eta &= x_2 x + y_2 y + z_2 z, & y &= y_1 \xi + y_2 \eta + y_3 \zeta, \\ \zeta &= x_3 x + y_3 y + z_3 z, & z &= z_1 \xi + z_2 \eta + z_3 \zeta; \end{aligned} \tag{45}$$

hierdurch sind die in den Gleichungen (18) auftretenden neun Coëfficienten vollständig bestimmt; und zwar

Digitized by Google

sind die Grössen x_1, y_1, z_1 durch (37) gegeben, während $x_2 + i x_3$, $y_2 + i y_3$, $z_2 + i z_3$ sich aus den Gleichungen (34), (40), (43) berechnen.

Besonders einfach werden die Ausdrücke für die absoluten Beträge dieser complexen Zahlen. Es ist

$$(46)\quad \begin{aligned} x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_1^2 &= \frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 i\omega \cdot \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 i\omega} \\ &= \frac{\Theta(u - i\omega) \cdot \Theta(u + i\omega) \cdot \Theta_1(o)^2}{\Theta(u)^2 \cdot \Theta_1(i\omega)^2}, \end{aligned}$$

$$(46\text{a})\quad \begin{aligned} y_2^2 + y_3^2 = 1 - y_1^2 &= 1 - \varkappa^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 (i\omega + K) \\ &= \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta_1(u + i\omega)\, \Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2}, \end{aligned}$$

$$(46\text{b})\quad \begin{aligned} z_2^2 + z_3^2 = 1 - z_1^2 &= \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\omega}{\operatorname{dn}^2 i\omega}\, \varkappa^2 \\ &= \frac{H(u - i\omega)\, H(u + i\omega)\, H_1(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen mit den von Hermite a. a. O. in § XIV gegebenen im Wesentlichen überein.

Indem wir die rechten und linken Seiten der Gleichungen (34) und (46) mit einander multipliciren, ferner in (39) und (42a) die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch $H_1(o)$, $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$ in bekannter Weise ausdrücken, erhalten wir die folgenden drei zu einander symmetrischen Gleichungen:

$$(47)\quad \begin{aligned} (x_2 + i x_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= \frac{\Theta(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, \Theta_1(o)^2}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \\ (y_2 + i y_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= i\, \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, \Theta(o)\, \Theta_1(o)}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \\ (z_2 + i z_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= -i\, \frac{H(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, H_1(o)\, \Theta_1(o)}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \end{aligned}$$

Folglich können wir

Digitized by Google

$$x_2 + i\,x_3 = M\,\frac{\Theta\,(u - i\,\omega)\;\Theta_1\,(o)}{\Theta\,(u)\;\Theta_1\,(i\,\omega)}\,e^{\Omega u}$$

$$x_2^0 - i\,x_3^0 = M_1^0\,\frac{\Theta\,(\mu + i\,\omega)\;\Theta_1\,(o)}{\Theta\,(\mu)\;\Theta_1\,(i\,\omega)}\,e^{-\Omega\mu}$$

setzen, wenn M_1^0 aus M dadurch entsteht, dass u durch μ und i durch $-i$ ersetzt wird. Wegen der ersten Gleichung (47) muss aber $M \cdot M_1^0 = 1$ sein; also ist M eine Constante, und zwar eine solche, deren absoluter Betrag den Werth Eins hat, so dass

$$M = e^{i\nu},$$

wo ν eine willkürlich bleibende reelle Constante bedeutet. So ergeben sich schliesslich die drei einfachen Gleichungen:

$$x_2 + i x_3 = \frac{\Theta(u - i\omega)\Theta_1(o)}{\Theta(u)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu},$$

$$(48)\quad y_2 + i\,y_3 = i\,\frac{\Theta_1(u - i\omega)\Theta(o)}{\Theta(u)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu} = (x_2 + i x_3)\cdot i\cdot \mathrm{dn}(u - i\omega)$$

$$z_2 + i z_3 = -i\,\frac{H(u - i\omega)\,H_1(o)}{\Theta(u)\,\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu} = -(x_2 + i x_3)\cdot i\cdot \varkappa\cdot \mathrm{sn}(u - i\omega)$$

welche mit den entsprechenden Gleichungen bei Hermite und Jacobi übereinstimmen, wie man leicht erkennt, wenn man $i\omega$ durch $i\,\omega + i\,K'$ ersetzt. Die Constante ν bleibt nothwendig willkürlich, da das Coordinatensystem um die ξ-Axe gedreht werden kann, ohne dass sich etwas wesentliches ändert; eine solche Drehung nämlich wird gerade durch Multiplication von $\eta + i\,\zeta$ mit einer Constante $e^{i\nu}$ analytisch dargestellt.

§ 6. Die Herpolhodie.

In den Gleichungen (48) kommen die Functionen Θ, Θ_1 und H in symmetrischer Weise vor; es fehlt die Function H_1. Auf den aus ihr in entsprechender Weise gebildeten Ausdruck wird man durch Betrachtung der Componenten der Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen ξ, η, ζ geführt. Nennen wir diese Componenten bez. v_1, v_2, v_3, so ist bekanntlich nach (45)

Digitized by Google

$$
(49) \qquad \begin{aligned} v_1 &= x_1 p + y_1 q + z_1 r, \\ v_2 &= x_2 p + y_2 q + z_2 r, \\ v_3 &= x_3 p + y_3 q + z_3 r; \end{aligned}
$$

und mit diesen Gleichungen kann man in derselben Weise weiter operiren, wie es Hermite a. a. O. thut. Aus (16), (17) und (20) folgt insbesondere

$$
(50) \qquad v_1^2 = l(A p^2 + B q^2 + C r^2) = \frac{h^2}{k}.
$$

Die ξ-Axe ist also dadurch ausgezeichnet, dass die Componente der Drehungsgeschwindigkeit um sie constant bleibt.

Zur Berechnung von $v_2 + i v_3$ kann man auch den folgenden neuen Weg einschlagen. Zwischen den Coordinaten ξ, η, ζ und den Winkelgeschwindigkeiten v_1, v_2, v_3 müssen dieselben Relationen erfüllt sein, wie zwischen den Coordinaten x, y, z und den Geschwindigkeiten p, q, r. Analog zu den Gleichungen (14) bestehen daher auch die Beziehungen

$$
(51) \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= v_3 \eta - v_2 \zeta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= v_1 \zeta - v_3 \xi, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= v_2 \xi - v_1 \eta, \end{aligned}
$$

und aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$
\frac{d\eta}{dt} + i\frac{d\zeta}{dt} = -\xi(v_2 + i v_3) - i v_1 (\eta + i\zeta).
$$

Die Winkelgeschwindigkeiten sind unabhängig von der Lage des betrachteten Punktes im Raume; wir können also insbesondere $\xi = 1$, $\eta = \zeta = 0$ wählen und erhalten dadurch

$$
\begin{aligned} v_2 + i v_3 &= -\left(\frac{d(\eta + i\zeta)}{dt}\right)_{\xi=1, \eta=0, \zeta=0} \\ &= -\left[x_1 \frac{d(x_2 + i x_3)}{dt} + y_1 \frac{d(y_2 + i y_3)}{dt} + z_1 \frac{d(z_2 + i z_3)}{dt}\right], \end{aligned}
$$

oder nach (48)

Digitized by Google

$$v_2 + i v_3 = -\frac{d(x_2 + i x_3)}{dt}[x_1 + i y_1 \operatorname{dn}(u - i\omega) - i\varkappa z_1 \operatorname{sn}(u - i\omega)]$$
$$- i(x_2 + i x_3)\left[y_1 \frac{d\operatorname{dn}(u - i\omega)}{dt} - \varkappa z_1 \frac{d\operatorname{sn}(u - i\omega)}{dt}\right].$$

Die Werthe von x_1, y_1, z_1 entnehmen wir aus (16) und bestimmen die auftretenden Constanten nach (20) und (36). Dann ergibt sich durch Anwendung des Additionstheorems

$$x_1 + i y_1 \operatorname{dn}(u - i\omega) - i\varkappa z_1 \operatorname{sn}(u - i\omega) = 0$$
$$y_1 \frac{d\operatorname{dn}(u - i\omega)}{dt} - \varkappa z_1 \frac{d\operatorname{sn}(u - i\omega)}{dt} = -\lambda\varkappa \cdot \operatorname{cn}(u - i\omega),$$

wo λ wieder durch die zweite Gleichung (10) definirt ist. Es wird also schliesslich

$$v_2 + i v_3 = i\lambda\varkappa \cdot (x_2 + i x_3) \cdot \operatorname{cn}(u - i\omega)$$
$$(52) \qquad = i\lambda \frac{H_1(u - i\omega) \cdot H_1(o) \cdot \Theta(o)^2}{\Theta(u) \cdot \Theta_1(i\omega)^2\, \Theta_1(o)^2} e^{\Omega u + i v},$$

wodurch auch die vierte, in (48) fehlende Function $H_1(u - i\omega)$ ihre Verwendung gefunden hat.

Die Lösungen des durch (51) gegebenen Systems von Differentialgleichungen sind uns übrigens durch die vorstehenden Untersuchungen von selbst bekannt; zusammengehörige particuläre Lösungen sind

für ξ:	x_1,	y_1,	z_1,
„ η:	x_2,	y_2,	z_2,
„ ζ;	x_3,	y_3,	z_3.

Die Differentialgleichungen (51) sind denjenigen an die Seite zu stellen, welche Hermite a. a. O. im § XXI aufstellt.

Die ξ-Axe, um welche der Körper nach (50) eine constante Winkelgeschwindigkeit besitzt, ist bekanntlich durch das Loth vom Anfangspunkte auf die invariable Ebene gegeben. Letztere fällt mit der Tangentenebene des Centralellipsoides im Punkte x_0, y_0, z_0 zusammen, hat also die Gleichung

$$A x_0 x + B y_0 y + C z_0 z - 1 = 0.$$

Digitized by Google

Ihre Entfernung vom Anfangspunkte ist nach (4) und (7) gleich

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 x_0^2 + B^2 y_0^2 + C^2 z_0^2}} = \frac{h}{k},$$

und die Cosinus der Neigungen ihrer Normale gegen die Axen sind

$$\frac{h}{k} A x_0 = x_1, \quad \frac{h}{k} B y_0 = y_1, \quad \frac{h}{k} C z_0 = z_1,$$

woraus die Identität der ξ-Axe mit dieser Normalen hervorgeht. Das Ellipsoid rollt also auf dieser festen Ebene und der Berührungspunkt beschreibt in ihr eine Curve, die sogenannte Herpolhodie, deren Parameter-Darstellung für die Coordinaten η_0, ζ_0 in dieser zur ξ-Axe senkrechten Ebene unmittelbar durch (49) vermittelt wird; man findet

$$\eta_0 = x_2 x_0 + y_2 y_0 + z_2 z_0 = h(x_2 p + y_2 q + z_2 r)$$
$$\zeta_0 = x_3 x_0 + y_3 y_0 + z_3 z_0 = h(x_3 p + y_3 q + z_3 r),$$

also ist

$$\eta_0 + i\zeta_0 = h(v_2 + i v_3)$$

mittelst (52) zu berechnen. Auch hier sind wir zu den Hermite'schen Formeln gelangt, an welche die weitere Discussion der Curve angeschlossen werden kann.

Die Gestalt dieser Curve ist bekanntlich von Hess[1]) genauer untersucht.

§ 7. Drehung des starren Körpers unter Wirkung gewisser äusserer Kräfte.

Die Reciprocität, welche zwischen der Theorie der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit einerseits und dem Probleme der Drehung eines solchen Körpers um

---

[1]) Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene, Inaugural-Dissertation, München 1880; vgl. auch Halphen: Traité des fonctions elliptiques, 2ième partie, p. 53 ff.

Digitized by Google

einen festen Punkt andererseits besteht, kommt auch bei Wirkung äusserer Kräfte in letzterem Probleme zur Geltung, wie das folgende Beispiel zeigt.

In der Ξ-H-Ebene, welche im Raume fest liegt, sei eine Masse m_1 auf einen Kreis vom Radius r_0, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt, gleichmässig vertheilt; und die Masse m_1 wirke nach dem Newton'schen Attractionsgesetze auf die Masse des betrachteten starren Körpers. Mit p, q, r seien wieder die Drehungsgeschwindigkeiten des letztern um die in ihm festen Haupt-Trägheitsaxen bezeichnet, mit γ_1, γ_2, γ_3 die Cosinus der Neigungen der Z-Axe gegen die Haupt-Trägheitsaxen; ferner werde

$$f' = \tfrac{3}{2}\frac{m_1 f}{r_0^3}$$

gesetzt, wo f die Constante aus dem Attractions-Gesetze bezeichnet. Die Bestimmung der Drehung des starren Körpers um seinen im Anfangspunkte gelegenen Schwerpunkt hängt dann von den folgenden beiden Systemen von je drei Differentialgleichungen ab:[1])

$$(53)\qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,[qr + f'\gamma_2\gamma_3],\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,[rp + f'\gamma_3\gamma_1],\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,[pq + f'\gamma_1\gamma_2] \end{aligned}$$

und

$$(54)\qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q,\quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r,\quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

wobei das letztere System mit dem Systeme (14) identisch ist.

Drei erste Integrale, die aus dem Satze von der lebendigen Kraft und den Flächensätzen hervorgehen, sind von Voigt a. a. O. angegeben, das allgemeine Problem ist aber nicht weiter behandelt. Deshalb möge hier auf die allgemeine Lösung desselben kurz eingegangen werden.

---

[1]) Vgl. W. Voigt, Elementare Mechanik, Leipzig 1889, p. 243 f.

Digitized by Google

Die Differentialgleichungen (53) sind ein besonderer Fall eines Systemes solcher Gleichungen, das von Clebsch bei Gelegenheit einer hydrodynamischen Aufgabe behandelt und auf Quadraturen zurückgeführt ist.[1]) Es handelt sich um die Bewegung eines starren Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit, falls der Körper hinsichtlich seiner Gestalt und Massenvertheilung drei zu einander rechtwinklige Symmetrie-Ebenen besitzt.

Fällt das dadurch definirte Hauptaxensystem mit dem im Körper festen Coordinaten-Kreuze zusammen, so fürt das Problem auf die Differentialgleichungen[2])

$$
\begin{aligned}
A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + \frac{k^2(B_1-C_1)}{B_1C_1}\gamma_2\gamma_3\,,\\
B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + \frac{k^2(C_1-A_1)}{C_1A_1}\gamma_3\gamma_1\,,\\
C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + \frac{k^2(A_1-B_1)}{A_1B_1}\gamma_1\gamma_2\,,
\end{aligned}
\tag{55}
$$

wozu noch die Gleichungen (54) kommen. Hierin bedeuten A, B, C, A_1, B_1, C_1 wesentlich positive Constante, die von der Gestalt der Oberfläche des Körpers und von der Massenvertheilung im Körper abhängen. Die Constante k ist willkürlich und hängt von den Anfangsgeschwindigkeiten ab. Die von Clebsch gegebene Integrationsmethode bezieht sich auf den Fall, wo zwischen den Constanten die Relation

$$
AA_1(B_1-C_1)+BB_1(C_1-A_1)+CC_1(A_1-B_1)=0 \tag{56}
$$

erfüllt ist. Dieselbe Annahme macht Weber a. a. O., um die

---

[1]) Vgl. Clebsch, Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Annalen Bd. 3, p. 261, 1871.

[2]) Vgl. H. Weber: Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Annalen Bd. 14, p. 173 ff., 1879. Im Texte sind Weber's Grössen p, q, r durch $-p$, $-q$, $-r$ und die X-Axe durch die Z-Axe, also α_1, α_2, α_3 bez. durch γ_1, γ_2, γ_3 ersetzt.

Digitized by Google

Integration mittelst der Theta-Functionen von zwei Variabeln vollständig durchzuführen.

Die Gleichungen (53) gehen offenbar aus den Gleichungen (55) hervor, wenn man in letzteren

$$(57) \qquad \frac{1}{C_1} = C, \frac{1}{B_1} = B, \frac{1}{A_1} = A, k^2 = -f'$$

setzt, wodurch die Bedingung (56) von selbst erfüllt ist.

Da die Constante f' des Newton'schen Anziehungs-Gesetzes wesentlich positiv ist, so beziehen sich die aus den Weber'schen Formeln durch die Substitution (57) abgeleiteten Resultate zunächst auf das entsprechende Problem für eine abstossende Kraft. Soll f' positiv werden, so muss die Constante k imaginär gewählt werden. Es hat dies zur Folge, dass in den Formeln (26) a. a. O., wenn $A < B < C$, mithin nach (57) $A_1 > B_1 > C_1$ gewählt wird, ω^2 eine negative Grösse darstellt; das negative Zeichen auf beiden Seiten fällt fort, und die Argumente der Theta-Functionen werden rein imaginär.

Die Weber'sche Untersuchung des erwähnten hydrodynamischen Problems ist unter einer besonderen Voraussetzung über den Anfangs-Zustand durchgeführt. Von F. Kötter[1]) ist gezeigt, wie man für den allgemeinsten Fall die entsprechenden Entwicklungen durchzuführen hat. In gleicher Weise wird das von Voigt behandelte Rotations-Problem bei beliebiger Voraussetzung über den Anfangs-Zustand erledigt werden können.

---

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 22. Jan. 1891 und Crelle's Journal Bd. 109.

Digitized by Google

Beiträge zur Potentialtheorie.[1])

Von **Walther Dyck.**

(*Eingelaufen 1. Mai.*)

III.

Ueber die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Systems von Functionen mehrerer Veränderlicher in einem gegebenen Bereiche und über die Berechnung der Werthe einer gegebenen Function in diesen Punkten.

Einleitung.

Im ersten Teil der „Beiträge zur Potentialtheorie“[2]) habe ich eine Reihe von Darstellungen der Kronecker'schen Charakteristik eines Systems von $n+1$ reellen Functionen von n reellen Veränderlichen durch bestimmte Integrale gegeben, in welcher die von Kronecker in seiner Abhandlung „Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln“[3]) entwickelte Integralformel als specieller Fall, die ebendort gegebene Summenformel als Grenzfall enthalten ist.

Man gelangt zu diesen Darstellungen auf Grund des von Gauss in der „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum“ im 6. Artikel[4]) gegebenen Integrals, welches auch

---

[1]) Vorgetragen in der Sitzung vom 5. März 1898.

[2]) Beiträge zur Potentialtheorie I. Diese Sitzungsberichte Bd. 25. Heft II. (1895).

[3]) Monatsberichte der Berliner Akademie vom März 1869.

[4]) Werke Bd. V, Seite 9.

Digitized by Google

Kronecker zu seinen Formulirungen geführt hat. Es lässt sich nämlich die Charakteristik eines Functionensystems definiren als diejenige Zahl, welche angiebt, wie oft eine gewisse geschlossene, im $n+1$-dimensionalen Raume gelegene Mannigfaltigkeit von n Dimensionen den Coordinatenanfangspunkt umgiebt. Benützt man dann weiter den Satz, dass jeder durch diesen Nullpunkt geführte $n-k$-dimensionale ebene Schnitt aus der Mannigfaltigkeit von n Dimensionen eine solche von $n-k-1$ Dimensionen ausschneidet, welche ebenso oft wie die n-dimensionale den Nullpunkt umgiebt,[1]) so erhält man die Charakteristik in der Gestalt eines $n-k-1$-fachen über jenen Schnitt ausgedehnten Integrals, welches speciell für $k=o$ in das Kronecker'sche Integral, für $k=n-1$ in die Kronecker'sche Summenformel übergeht.

Das erwähnte Gauss'sche Integral ergiebt sich durch eine Specialisirung aus der bekannten von Gauss im Artikel 10 seiner „Allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte"[2]) gegebenen Darstellung des Ausdruckes $\Delta\Pi$ für die Potentialfunction Π einer dreidimensionalen Masse mit Hülfe eines zweifachen über die Begrenzung und eines dreifachen über das Innere der Masse ausgedehnten Integrales. Dieser Umstand führte Kronecker „auf die durch den Erfolg vollkommen bestätigte Vermuthung, dass die Potentialtheorie Anhaltungspunkte bieten dürfte, um zu einer allgemeinen Darstellung beliebiger Functionen der durch ein Gleichungssystem definirten Punkte und damit auch zu einer Verallgemeinerung des sogenannten Cauchy'schen Integrals zu gelangen".[3]) Die Verallgemeinerung hat Kronecker in Formel A des VIII. Abschnittes seiner Abhandlung vom Jahre 1869 gegeben. Sie ermöglicht, die algebraische Summe aller Werthe zu berechnen, welche eine gegebene Function $\mathfrak{F}$ von n reellen Variabeln im Innern eines von einer $n-1$-dimen-

[1]) Beiträge zur Potentialtheorie I, Seite 263 und 269.

[2]) Werke Bd. V, Seite 209.

[3]) Kronecker a. a. O., Abschnitt VI.

Digitized by Google

sionalen Mannigfaltigkeit begrenzten n-dimensionalen Gebietes annimmt an den Nullstellen eines Systems von n Functionen dieser Variabeln; und zwar wird die Berechnung gegeben mit Hülfe eines n-fachen über das Innere und eines $n-1$-fachen über den Rand des Gebietes hin erstreckten Integrals. Dabei sind aber die Werthe der Function $\mathfrak{F}$ an jenen Nullstellen noch versehen je mit dem Vorzeichen der Functionaldeterminante der n Functionen des Systems an eben diesen Stellen.

Nun kann man sich einmal von dem Vorzeichen der Functionaldeterminante frei machen, wenn man die Function $\mathfrak{F}$ mit einem Factor versieht, welcher an den Nullstellen des Functionensystems den Wert $+1$ oder -1 annimmt je nachdem das Vorzeichen der Functionaldeterminante positiv oder negativ ist — wie ich dies in zwei kurzen Noten „Sur la determination du nombre des racines communes à un système d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction en ces points"[1]) dargelegt habe. Man kann damit die Fragen über die Bestimmung der Functionswerthe eines Functionensystems im Sinne des Cauchyschen Theorems vollständig erledigen. Speciell führt die Anwendung jener Formeln für den Fall eines constanten $\mathfrak{F}$ jetzt direct auf die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen des Functionssystems und zwar in einer

---

[1]) Comptes rendus vol. 119 S. 1254 u. vol. 120 S. 34, Paris, Dezember 1894 u. Januar 1895. Durch ein Versehen der Druckerei hat die zweite dieser Noten nur die Ueberschrift „Sur les racines communes à plusieurs équations" erhalten und diesem Umstande mag es zuzuschreiben sein, dass in mehreren Referaten über diese beiden Noten (vergl. Revue semestrielle (Amsterdam) Bd. III, Theil 2, S. 58 1895, und Fortschritte der Mathematik, Bd. 25, S. 145) nur berichtet ist über die in jenen Noten gegebene Bestimmung der Anzahl der Nullstellen innerhalb eines gegebenen Bereiches. Der wesentliche Inhalt der beiden Noten bezieht sich aber auf die Entwicklung der Methode für die Bestimmung der Summe der Werthe einer gegebenen Function an diesen Nullstellen und geht gerade dadurch über die sogleich zu erwähnenden Picard'schen Untersuchungen, welche sich nur auf die Anzahlbestimmung beziehen, hinaus.

Digitized by Google

Darstellung, die zuerst Picard gegeben hat auf Grund einer Ableitung, in welcher derselbe die Kronecker'sche Charakteristikenformel zu Grunde legt und durch einen Grenzübergang umgestaltet.[1])

Die von mir in jenen Noten vom Jahre 1894/95 gegebene Methode ist im II. Abschnitte des Vorliegenden ausgeführt. Sie gestattet noch weiter die Abänderung der Grenzen des n-dimensionalen Gebietes, über welches die Integration zu erstrecken ist, insoferne sie die Bildung von Formeln ermöglicht, welche die Aufgabe der Functionswerthbestimmung innerhalb eines gegebenen Bereiches löst durch Ausführung von Integrationen, welche über einen den ersten willkürlich umfassenden Bereich sich erstrecken (§ 5 des gegenwärtigen Aufsatzes).

Aber noch eine zweite Bemerkung lässt sich einfügen: Analog wie man für die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Functionensystems eine (in den Beiträgen I hergeleitete) Reihe von Formeln verwenden kann, von einem n-fachen, $n-1$-fachen, ... $n-k$-fachen Integral bis zu einer Summenformel, so lassen sich auch Formeln aufstellen, welche die Summe der Werthe jener Function $\mathfrak{F}$ an den Nullstellen unseres Functionensystems, statt durch eine Summe aus einem n-fachen und einem $n-1$-fachen Integrale, geben mit Hülfe eines $n-1$-fachen und eines $n-2$-fachen, ... eines $n-k$-fachen und eines $n-k-1$-fachen, ... eines 2-fachen und eines 1-fachen Integrales und endlich eines einfachen In-

[1]) Vergl. die beiden Noten Picard's vom 7. und 12. Nov. 1891 (Comptes rendus Bd. 113), sowie die Abhandlung „Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées" im Journal de Liouville, Série 4, Bd. 8, S. 5, endlich vergl. man noch Capitel IV, Abschnitt VII in Bd. I und Capitel VII in Bd. II von Picard's Cours d'Analyse. — Die von Kronecker in einer Note vom Dezember 1891 (Comptes rendus Bd. 113, S. 1006) gegebene Bestimmung dieser Anzahl ist insoferne unbefriedigend, als sie eine Integration durch das Innere des gegebenen Bereiches längs der durch Nullsetzen der Functionaldeterminante sich ergebenden Mannigfaltigkeit erfordert.

Digitized by Google

tegrals und einer Summe. Man hat dabei nur, statt, wie Kronecker, von der Betrachtung des Potentials einer n-dimensionalen Masse auszugehen, die Formeln für das Potential einer $n-k$-dimensionalen Masse zu Grunde zu legen, welche über einen ebenen ($n-k$-dimensionalen) Schnitt des ersteren ausgebreitet ist.

Die hierauf bezüglichen Formeln sind im I. Abschnitt der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt. Es erscheint dabei nicht uninteressant, zu bemerken, dass sich dieselben Beziehungen auch ableiten lassen je durch einen Grenzübergang aus den für die nächsthöhere Mannigfaltigkeit geltenden Formeln. Es kommt dabei der Umstand zur Geltung, dass bei einer Zerlegung des ganzen ursprünglichen n-dimensionalen Integrationsbereiches in ∞^n, etwa parallelepipedisch begrenzte, Elementargebiete nur diejenigen Elemente für die Integration in Betracht kommen, welche die Nullstellen des Functionensystems umschliessen, insoferne sich nämlich die Summe der Functionswerthe von $\mathfrak{F}$ zusammensetzt aus den Werthen der über jene Nullstellen genommenen Begrenzungsintegrale. Man kann also die Integration beschränken auf einen beliebig aus der Gesammtheit herausgenommenen Bereich von ∞^{n-k} dieser Elemente, wenn man nur jene wesentlichen Elemente in denselben einschliesst. Auf die hiemit angedeutete Entwickelung, bei welcher die Unabhängigkeit unserer Beziehungen von dem speciellen zu Grunde gelegten Potentialgesetz hervortritt, gehe ich indess an dieser Stelle nicht näher ein.[1])

[1]) Man vergleiche hierüber meinen Aufsatz „Ueber die Verallgemeinerungen des Cauchy'schen Satzes" im 51. Bande der Mathematischen Annalen.

Digitized by Google

I. Abschnitt.

§ 1.

Die Kronecker'sche Transformation der Gauss'schen Formel für die Potentialgleichung.[1])

Die Kronecker'sche Darstellung geht aus von dem über das ganz im Endlichen angenommene, n-dimensionale Gebiet

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) > 0$$

erstreckten n-fachen Integral:

1)
$$\Pi_n(\xi) = \frac{1}{n-2} \cdot \int\limits_{F_0 > 0} \frac{\Delta_0 \cdot \mathfrak{F}}{\left[(F_1-\xi_1)^2 + (F_2-\xi_2)^2 + \ldots + (F_n-\xi_n)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}} dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

in welchem $\mathfrak{F}, F_0, F_1, F_2, \ldots F_n$ im Integrationsbereiche eindeutige reelle Functionen der n reellen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ bezeichnen und Δ_0 die Functionaldeterminante der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ bedeutet.

Das Integral geht durch die Substitution:

2)
$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \\ x_2 &= F_2(z_1, z_2, \ldots z_n), \\ &\ldots \\ x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n) \end{aligned}$$

über in das andere auf den Raum der x_i bezogene:

---

[1]) Wir schicken hier des Zusammenhangs wegen die von Kronecker im VIII. Abschnitt seines Aufsatzes vom März 1869 entwickelten Formeln voraus. Man vergleiche hierzu noch die 16. Vorlesung (über das Potential) der (von Netto herausgegebenen) „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale" von L. Kronecker. Leipzig 1894.

Digitized by Google

$$3)\qquad \Pi_n(\xi) = \frac{1}{n-2}\cdot\int \frac{\varrho}{\left[\sum_1^n (x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

in welchem an Stelle von $\mathfrak{F}$ die Function ϱ

$$\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

getreten ist.

Durch diese Formel 3 ist die Function $\Pi_n(\xi)$ als Potentialfunction einer über das Gebiet der Variabeln x_i ausgebreiteten Masse definirt. In diesem erscheint indess die Dichtigkeitsfunction ϱ im Allgemeinen als eine mehrdeutige Function des Ortes, so dass wir uns eine mehrblättrig über den Raum der x_i ausgebreitete Masse, über welche sich die Integration zu erstrecken hat, zu denken haben. Als Begrenzung dieser Masse ergiebt sich dabei eine durch

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = o$$

gegebene Mannigfaltigkeit, die ihrerseits (nach bekannten Sätzen) umkehrbar eindeutig auf die Mannigfaltigkeit $F_0 = o$ bezogen ist.[1])

Für die Function $\Pi_n(\xi)$ hat man nun die der Gauss'schen Gleichung analog gebildete Darstellung von $\Delta\, \Pi_n(\xi)$:

---

[1]) Es sei hier erwähnt, dass im I. Theil dieser Beiträge die Variabeln z_i als Parameter im Raume der x_i gedeutet sind für die Mannigfaltigkeit M_n:

$$x_0 = F_0(z_1, z_2, \ldots z_n),\quad x_1 = F_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots x_n = F_n(z_1, z_2, \ldots z_n).$$

In der gegenwärtigen Abhandlung ist — in naturgemässer Auszeichnung der Function F_0 — von der durch die Gleichungen 2) vermittelten Abbildung des Raumes der z_i in den Raum der x_i Gebrauch gemacht, die auch Kronecker zu Grunde gelegt hat. Ich gedenke indess auf die erstere Deutung bei nächster Gelegenheit zurückzukommen. Man vergleiche noch die Anmerkungen auf Seite 269 und 271 der Beiträge I.

Digitized by Google

4)
$$\Delta \Pi_n(\xi) = -\int \frac{\varrho \cdot \cos(R_n N_n)}{\left[\sum_1^n (x_i - \xi_i^2)\right]^{\frac{n-1}{2}}} \cdot dO_{n-1} + \int \frac{\sum \varrho_i (x_i - \xi_i)}{\left[\sum_1^n (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot dO_n,$$

in welcher $\cos(R_n N_n)$ den Cosinus des Neigungswinkels der (in den Innenraum des Gebietes gerichteten) Normalen auf $\Phi = o$ gegen den (vom „Aufpunkt" ξ nach dem Punkte x gerichteten) Radius vector R_n bedeutet, ϱ_i die nach der i^{ten} Variabeln genommene Ableitung der Dichtigkeitsfunction ϱ bezeichnet, dO_n bez. dO_{n-1} endlich die Elemente im Raume der x_i, bez. auf der Mannigfaltigkeit $\Phi = o$. Dabei ist die Integration beim ersten Integral zu erstrecken über $\Phi = o$, beim zweiten über das dem Gebiete $F_0 > o$ entsprechende Gebiet im Raume der x_i.

Führt man nunmehr die Variabeln z_i ein, und verlegt — was nur eine Vereinfachung der Schreibweise ergiebt, — den „Aufpunkt" in den Coordinatenanfangspunkt, so geht die Gleichung 4 über in die Kronecker'sche Formel:

5)
$$\Delta \Pi_n(o) = -W_{n-1} + W_n$$

in welcher

6a)
$$W_{n-1} = \int_{F_0 = o} \frac{\mathfrak{F} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum_1^n F_i^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{do_{n-1}}{\left[\sum_1^n F_{0i}^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

Digitized by Google

6b)
$$W_n = \int\limits_{F_0 > o} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum\limits_1^n F_i^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot do_n$$

gesetzt ist. Hierbei ist

$$do_n = dz_1\, dz_2 \dots dz_n$$

das Element der „an sich" betrachteten Mannigfaltigkeit $(z_1, z_2, \dots z_n)$, do_{n-1} dagegen das Element der durch $F_0 = o$ aus dieser ausgeschnittenen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, welches man bekanntlich in einer der Formen

7)
$$do_{n-1} = \frac{\left[\sum\limits_1^n F_{oi}^2\right]^{\frac{1}{2}}}{F_{oj}}\, dz_1, dz_2 \dots dz_{j-1}\, dz_{j+1} \dots dz_n$$

(für beliebiges j) zu Grunde legen kann.

Für einen Bereich $F_0 > 0$, in welchen an keiner Stelle die Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ gleichzeitig verschwinden, hat man nun nach den bekannten Sätzen

8)
$$-W_{n-1} + W_n = 0,$$

während für die unmittelbare Umgebung eines Punktes, für welchen diese Functionen gleichzeitig verschwinden, das n-fache Integral W_n verschwindet, das $n-1$ fache aber den Werth

9)
$$W_{n-1} = \tilde{\omega}_{n-1} \cdot \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

Digitized by Google

annimmt, in welchem $\tilde{\omega}_{n-1}$ die „Oberfläche" der n-dimensionalen Einheitskugel

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots z_n^2 = 1$$

bedeutet.

Für einen ganz allgemeinen Bereich ergiebt sich sonach die Kronecker'sche Formel (A in No. VIII des genannten Aufsatzes):

$$10) \qquad -W_{n-1} + W_n = -\tilde{\omega}_{n-1} \cdot \Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F},$$

in welcher sich die Summation rechts auf alle Punkte bezieht, für welche

$$F_0 > o, \; F_1 = o, \; F_2 = o \ldots F_n = o$$

ist.

§ 2.

Neue Formeln zur Darstellung von $\Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$.

Statt die Formeln für das Potential der n-dimensionalen, im Raume $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gelegenen Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen, beschränken wir uns nunmehr auf die Betrachtung einer durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= o, \\ x_2 &= o, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ x_k &= o \end{aligned}$$

aus dieser Mannigfaltigkeit ausgeschnittenen Mannigfaltigkeit von $n - k$ Dimensionen. Für sie legen wir die Function

$$\varrho\,(o, o, \ldots o, x_{k+1}, \ldots x_n)$$

als neue Dichtigkeitsfunction zu Grunde und definiren für die so bestimmte $n - k$-dimensionale Masse eine neue Potentialfunction $\Pi_{n-k}(\xi)$ durch die Gleichung:

Digitized by Google

11)
$$\Pi_{n-k}(\xi_{k+1},\ldots\xi_n)=\frac{1}{n-k-2}\cdot\int\frac{\varrho}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k-2}{2}}}\cdot dx_{k+1}dx_{k+2}\ldots dx_n\,.$$

Für dieselbe gilt zunächst die der Gleichung 4) analoge Formel:

12)
$$\Delta\,\Pi_{n-k}(\xi)=$$

$$=-\int\frac{\varrho\cdot\cos(R_{n-k}N_{n-k})}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k-1}{2}}}\cdot dO_{n-k-1}+\int\frac{\sum\limits_{k+1}^{n}\varrho_i(x_i-\xi_i)}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k}{2}}}\,dO_{n-k}$$

in welcher $\cos(R_{n-k}N_{n-k})$ den Cosinus des Neigungswinkels der inneren Normalen auf das in der Mannigfaltigkeit $x_1=o$, $x_2=o$, $\ldots x_k=o$ gelegene $n-k-1$-dimensionale Element dO_{n-k-1} von $\Phi=o$ gegen den ebendort vom „Aufpunkte" $\xi_1=o$, $\xi_2=o,\ldots\xi_k=o,\xi_{k+1},\ldots\xi_n$ nach dem Elemente gezogenen Radius vector bedeutet.

Nun transformiren wir diese Formeln, gemäss den Gleichungen:

13)
$$\begin{aligned}
x_1 &= F_1\quad(z_1,z_2,\ldots z_n)=o,\\
&\;\;\vdots\\
x_k &= F_k\quad(z_1,z_2,\ldots z_n)=o;
\end{aligned}$$

14)
$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= F_{k+1}(z_1,z_2,\ldots z_n),\\
&\;\;\vdots\\
x_n &= F_n\quad(z_1,z_2,\ldots z_n)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

in den Raum der z und erhalten dann durch eine einfache, der in den Beiträgen I gegebenen analog verlaufende Rechnung, eine der Gleichung 5) entsprechende Formel

$$15)\qquad \Delta \Pi_{n-k}(o) = -W_{n-k-1} + W_{n-k}\,,$$

in welcher als „Aufpunkt" wieder der Coordinatenanfangspunkt angenommen ist und wobei W_{n-k-1}, bez. W_{n-k} die folgenden Integrale bedeuten:

$$16\text{a})\qquad W_{n-k-1} =$$

$$= \int \frac{\mathfrak{F}\cdot \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+11} & F_{k+12} & \dots & F_{k+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n} F_i^2\right]^{\frac{n-k}{2}}} \cdot \frac{do_{n-k-1}}{\left[\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \dots & F_{kn} \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,,$$

Digitized by Google

16b)
$$W_{n-k} =$$

$$= \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+11} & F_{k+12} & \dots & F_{k+1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum_{k+1}^{n} F_i^2\right]^{\frac{n-k}{2}}} \cdot \frac{do_{n-k}}{\left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \dots & F_{kn} \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist das erste Integral über die durch

$$F_0 = o; \quad F_1 = o, F_2 = o, \dots F_k = o$$

definirte Begrenzungsmannigfaltigkeit, das zweite Integral über den durch

$$F_0 > o; \quad F_1 = o, F_2 = o, \dots F_k = o$$

gegebenen Innenraum derselben zu erstrecken.

Durch die Matrixquadrate im Nenner der beiden Integralausdrücke ist in bekannter Abkürzung die Summe der Quadrate der Unterdeterminanten bezeichnet. Weiter sind do_{n-k-1} bez. do_{n-k} je die Elemente der Mannigfaltigkeiten, über welche sich die Integration erstreckt. Diese Elemente können in den Formen:

Digitized by Google

$$17\,\text{a)}\qquad do_{n-k-1} = \frac{\left[\begin{vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & \dots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \dots & F_{kn} \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}{D_{j_{n-k}\dots j_n}} \cdot dz_{j_1}\, dz_{j_2} \dots dz_{j_{n-k-1}},$$

beziehungsweise

$$17\,\text{b)}\qquad do_{n-k} = \frac{\left[\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \dots & F_{kn} \end{vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}{D_{j_{n-k+1}\dots j_n}} \cdot dz_{j_1}\, dz_{j_2} \dots dz_{j_{n-k}}$$

geschrieben werden, in welchen $D_{j_{n-k}\dots j_n}$ bez. $D_{j_{n-k+1}\dots j_n}$ irgend eine der Unterdeterminanten der Matrix des Zählers, $dz_{j_1}\dots dz_{j_{n-k-1}}$, bez. $dz_{j_1}\dots dz_{j_{n-k}}$ das „correspondirende" Differential bezeichnet.

Für die beiden Integrale W_{n-k-1} und W_{n-k} gelten nun direct die den oben für W_{n-1} und W_n gegebenen analogen Sätze: Für einen Bereich

$$F_0 > o,\ F_1 = o \dots F_k = o,$$

in welchem an keiner Stelle die übrigen Functionen $F_{k+1}\dots F_n$ sämmtlich verschwinden, ist

$$18)\qquad -W_{n-k-1} + W_{n-k} = 0.$$

Beschränkt man andererseits die Integration auf die unmittelbare Umgebung eines in $F_1 = o, \dots F_k = o$ gelegenen Punktes, in welchem auch die Functionen $F_{k+1}, \dots F_n$ je einfach verschwinden, so wird das Integral W_{n-k} zu Null, während das Integral W_{n-k-1} — in Uebereinstimmung mit Formel 26 der „Beiträge I" — den Werth

Digitized by Google

19) $$W_{n-k-1} = \tilde{\omega}_{n-k-1} \cdot \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

annimmt, für welchen $\mathfrak{F}$ wieder den Werth der Dichtigkeitsfunction an der betr. Stelle, $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ die Oberfläche der $n-k$-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Es folgt daher für die über den ganzen Bereich ausgedehnten Integrale die Formel

20) $$-W_{n-k-1} + W_{n-k} = -\tilde{\omega}_{n-k-1} \cdot \Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

in welcher das Summenzeichen genau dieselbe Bedeutung besitzt, wie in Formel 10.

Indem man nun der Zahl k die Werthe von $k=0$ bis $k=n-2$ beilegt, gelangt man zu einer ganzen Reihe von Darstellungen des Ausdruckes

$$\Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F},$$

der mit den Vorzeichen der Functionaldeterminante gebildeten Summe der Werthe, welche eine Function $\mathfrak{F}$ im Innern des Bereiches $F_0 = o$ annimmt an den Stellen $F_1 = o$, $F_2 = o$, $F_n = o$, und zwar mit Hülfe eines $n-1$-fachen und eines $n$fachen, eines $n-2$-fachen und eines $n-1$fachen, schliesslich mit Hülfe eines einfachen und eines zweifachen Integrals.

Für die letzte dieser Formeln ist dabei vom logarithmischen Potential (im Raum der x) auszugehen.

Als Grenzfall dieser Darstellungen kann man endlich die für $k=n-1$ sich ergebenden Formeln betrachten, in welchen sich für den Ausdruck $2\,\Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$ eine Summe und ein einfaches Integral ergiebt; man kann nach leichter Umformung der entstehenden Gleichung die Gestalt geben:

$$-\Sigma \operatorname{sign}((-1)^n F_n \Delta_n) \cdot \mathfrak{F} + \int \operatorname{sign}((-1)^n F_n) \cdot (\mathfrak{F}_1 dz_1 + \mathfrak{F}_2 dz_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n dz_n) =$$
$$= -2\,\Sigma \operatorname{sign}(\Delta_0) \cdot \mathfrak{F},$$

in welcher die Summe links sich auf alle Punkte erstreckt, für welche

Digitized by Google

$$F_0 = o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_{n-1} = o$$

ist, das einfache Integral auf das Gebiet

$$F_0 > o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_{n-1} = o,$$

die Summe rechts aber (wie in allen Formeln) auf die Punkte, für welche

$$F_0 > o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_n = o.$$

Es kann diese nicht uninteressante Beziehung auch direct unter Benützung der elementaren Formel für das einfache bestimmte Integral zwischen gegebenen festen Grenzen (hier in n durch die Gleichungen $F_1 = o, \ldots F_{n-1} = o$ verknüpften Variabeln geschrieben) hergeleitet werden.

§ 3.

Allgemeine Bemerkungen zu den gewonnenen Formeln.

Für die in der Formel 20) gewonnenen Darstellungen unserer Functionswerthsumme gelten nun die schon in den Beiträgen I (Seite 275) für das Integral der Charakteristik — das sich als specieller Fall für $\mathfrak{F} = \text{const}$ aus 20) direct ergiebt — gemachten Bemerkungen.

Die Auflösung der Zählerdeterminanten in W_{n-k-1} und W_{n-k} nach Unterdeterminanten der 1ten bis k^{ten}, bez. 2ten bis k^{ten} Reihe und Ersetzung der Elemente do_{n-k-1} und do_{n-k} durch die nach 17 a) und 17 b) jeweils entsprechenden Ausdrücke zeigt sofort, dass die für die Grenzen der Integration in Betracht kommenden, gleich Null gesetzten Functionen

$$F_0;\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_k$$

in die Ausdrücke unter dem Integralzeichen nur scheinbar eingehen; dass diese letzteren vielmehr ausschliesslich von den Functionen

$$F_{k+1},\ F_{k+2}, \ldots F_n$$

und von der „Dichtigkeitsfunction" $\mathfrak{F}$ abhängen.

Digitized by Google

Dabei hat man es völlig in der Hand, welche k Functionen $F_{i_1}, \ldots F_{i_k}$ man (unter den n Functionen $F_1 \ldots F_n$) für die Grenzen der Integrale verwenden will, so dass für jeden Werth von k noch $\binom{n}{k}$ Darstellungen möglich sind.

Es darf indess nicht ausser Acht gelassen werden, dass für die Auswerthung der hiermit eingeführten mehrfachen Integrale im Vergleich zu Integralen, welche über „ebene" Mannigfaltigkeiten („an sich betrachtete M." nach Kronecker's Ausdrucksweise) laufen, in noch höherem Grade die Bemerkungen gelten, welche Kronecker über die Werthermittelung des $(n-1)$-fachen Integrals der Charakteristik im Abschnitt XI seiner Untersuchungen vom März 1869 niedergelegt hat. Gleichwohl aber erscheint mir die hier gegebene Darstellung der Functionswerthsumme in ihren verschiedenen Formen von Interesse und Werth, weil sie den Charakter derartiger Fragestellungen nach einer ganz bestimmten Richtung kennzeichnet. Verbindet man mit der Gesammtheit der hier gegebenen Möglichkeiten für die Bestimmung jener Functionswerthsummen noch diejenigen Umformungen, welche einerseits die Functionen $F_1, \ldots F_n$, von denen ja nur die im Gebiete $F_0 > o$ gelegenen Nullstellen wesentlich sind, im Sinne der Analysis situs erleiden können, und beachtet andererseits, dass auch die Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ beliebig stetig so abgeändert werden kann, dass nur die Werthe derselben an den Nullstellen der F_i erhalten bleiben, so ist damit eine bestimmte Gruppe von Darstellungsformen für unsere Functionswerthsumme bezeichnet.

Ueber eine Abänderung, welcher, abgesehen von den im Sinne der Analysis situs zulässigen, die Grenze $F_0 = 0$ des Gebietes unterzogen werden kann, soll im folgenden Abschnitte (§ 5) noch besonders gehandelt werden.

Digitized by Google

II. Abschnitt.

§ 4.

Einführung eines analytischen Ausdruckes für sign Δ_0 und Anwendung desselben zur Aufstellung der Formeln zur Berechnung von $\Sigma\mathfrak{F}$.

Um uns von dem Vorzeichen der Functionaldeterminante Δ_0 frei zu machen führen wir nunmehr eine Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ ein, welche an den Nullstellen der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ den Werth $+\mathfrak{F}$ beziehungsweise $-\mathfrak{F}$ annimmt, je nachdem dort die Functionaldeterminanten Δ_0 positiv oder negativ ist.

Dies gelingt auf die einfachste Weise, denn es lässt sich — und zwar noch auf mannigfache Art — eine im Innern unseres Bereiches überall endliche und stetige Function bilden, welche an den Nullstellen der F_i den Werth sign $\Delta_0 \cdot 1$ besitzt. Eine solche Function ist beispielsweise:

$$22) \qquad \frac{\lambda\,\Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2\,\Delta_0^2}},$$

in welcher λ irgend eine Constante bezeichnet, oder auch eine stetige Function der z_i, die an allen Nullstellen positiv ist und ebenso wie Δ_0 [1]) nirgends im Gebiet zugleich mit allen Functionen $F_1, \ldots F_n$ verschwindet; sie besitzt nämlich, weil nach den getroffenen Voraussetzungen die Quadratwurzel im Nenner in unserem Gebiete unverzweigt ist überall das Vorzeichen von Δ_0 und nimmt an den Nullstellen der F_i den verlangten Werth sign $\Delta_0 \cdot 1$ an.

Ersetzt man also in den Entwickelungen des I. Abschnittes und speciell in den Formeln 10) und 20) durchweg die Function $\mathfrak{F}$ durch die neue Dichtigkeitsfunction

---

[1]) Vergl. die in den Beiträgen I S. 262 für die F_i gegebenen Bedingungen.

Digitized by Google

$$23)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot \mathfrak{J}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{J} \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\},$$

so ergeben sich Formeln, welche direct im Cauchy'schen Sinne die Aufgabe lösen:

Gegeben ist in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen ein $n-k$-dimensionales Gebiet

$$F_0 > o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_k = o$$

in welchem sich eine Anzahl von Nullstellen der Functionen

$$F_{k+1} = o\ F_{k+2} = o \ldots F_n = o$$

befinden. Man bestimme mit Hülfe eines $n-k$-fachen durch das Innere und eines $n-k-1$-fachen über den Rand des Gebietes geführten Integrales die Summe der Werthe einer Function $\mathfrak{J}$ in diesen Nullstellen.

Dabei haben wir (durch Aenderung der Gruppirung der Functionen und Wahl von k) es in der Hand, zu bestimmen, welche und wie viele der Functionen $F_1, \ldots F_n$ wir zur Begrenzung der Integration, bez. zur Festlegung der Nullstellen im Integrationsgebiete verwenden wollen.

Setzt man weiter, wie noch anschliessend bemerkt sein mag:

$$24)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \mathfrak{J}^2}} \cdot \mathfrak{J}\ ^{1)}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J} \quad (\text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o)\}$$

so ergeben sich Formeln für die Bestimmung der Summe der absoluten Beträge der Function $\mathfrak{J}$ an den Nullstellen der F_i.

---

[1]) Oder auch

$$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 \mathfrak{J}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 \mathfrak{J}^2}} \cdot \mathfrak{J}.$$

Digitized by Google

§ 5.

Weitere Anwendungen: Bestimmung der Anzahl und Lage der Nullstellen eines Functionensystems in einem gegebenen Gebiete. Abänderung der Integrationsgrenzen.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelte Methode gestattet nun mannigfache weitere Anwendungen.

Vor Allem lassen sich jetzt Formeln für die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen des Functionensystems $F_1, F_2 \ldots F_n$ im Innern von $F_0 = o$ gewinnen: Man braucht zu dem Ende nur in der Formel 23) $\mathfrak{F} = 1$ zu setzen, also in den Integralen des vorigen Abschnittes

$$25)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot 1$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot 1 \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\}$$

als Dichtigkeitsfunction einzuführen. Man gelangt damit zu den zuerst von Picard (auf anderem Wege) abgeleiteten Formeln.[1])

Andererseits lassen sich die Nullstellen selbst mit Hülfe unserer Integralformeln berechnen.

Setzt man nämlich

$$26)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot z_\mu^\nu$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \zeta_\mu^\nu \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\}$$

unter ν die Zahlen $1, 2, \ldots p$ verstanden, wenn p die Anzahl der Nullstellen im Innern unseres Bereiches ist, so ergeben sich der Reihe nach die Potenzsummen der Werthe ζ_μ, welche eine bestimmte Coordinate z_μ an jenen p Stellen annimmt, und

---

[1]) Vergl. die in der Einleitung citirten Abhandlungen.

Digitized by Google

damit eine algebraische Gleichung p^{ten} Grades zur Berechnung dieser Werthe.

Versteht man speciell unter $F_1, F_2, \ldots F_n$ algebraische Functionen der z_i, so bedarf es nach Bestimmung der Anzahl p der Nullstellen des Bereiches überhaupt nur noch der Auswerthung der soeben bezeichneten auf eine bestimmte Coordinate z_μ bezüglichen p Integralpaare, sowie der Auflösung einer Gleichung p^{ten} Grades, um dann nach den bekannten Methoden alle übrigen Schnittspunktscoordinaten ζ_i und damit jede beliebige rationale Function der ζ_i auf rationalem Wege zu berechnen.

Endlich kann man innerhalb des Gültigkeitsbereiches der für die Functionen F_i zu Grunde gelegten Bedingungen die Grenze $F_0 = o$ für die Integration ersetzen durch eine $F_0 = o$ umfassende aber sonst willkürlich vorzuschreibende Grenze $T = o$.

Die Mannigfaltigkeit $F_0 = o$ theilt nämlich das Gebiet $T > o$ in die Theile

$F_0 > o$, $T > o$, in welchem unsere p Nullstellen ζ liegen,

und

$F_0 < o$, $T > o$, in welchem weitere q Nullstellen ζ' sich befinden.

Nun führe man einerseits für die in den Formeln 23), 24) und 25) gegebenen Dichtigkeitsfunctionen die Integrationen über $T = o$ bez. $T > o$ aus, andererseits aber beziehungsweise für die folgenden:

$$27)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2}} \cdot \mathfrak{J}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} F_0 \cdot \mathfrak{J} \quad \text{für } F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_n = o\},$$

$$28)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0 \mathfrak{J}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2 \mathfrak{J}^2}} \cdot \mathfrak{J}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} F_0 \cdot \operatorname{sign} \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J} \quad \text{für } F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_n = o\},$$

Digitized by Google

$$29)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2}} \cdot 1$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} F_0 \cdot 1 \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\}.$$

Dann ergeben sich beziehungsweise aus 23) und 27) die Werthsummen:

$$30)\qquad \left(\sum_{\zeta} (\mathfrak{F}) + \sum_{\zeta} (\mathfrak{F})\right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{\zeta} (\mathfrak{F}) - \sum_{\zeta} (\mathfrak{F})\right),$$

aus 24) und 28) die Summen:

$$31)\qquad \left(\sum_{\zeta} (\operatorname{abs} \mathfrak{F}) + \sum_{\zeta} (\operatorname{abs} \mathfrak{F})\right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{\zeta} (\operatorname{abs} \mathfrak{F}) - \sum_{\zeta} (\operatorname{abs} \mathfrak{F})\right),$$

endlich aus 25) und 29) die Anzahlen

$$32)\qquad (p + q) \quad \text{und} \quad (p - q)$$

für die durch $F_0 = o$ getrennten Nullstellen des Gebietes $T > o$, und daraus unmittelbar die auf das Gebiet $F_0 > o$ bezüglichen Functionswerthsummen.

Es gelingt also für die Berechnung aller in Frage stehenden Grössen auch noch die letzte Function F_0 der gegebenen $n + 1$ Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$ als Grenzbedingung fortzuschaffen und statt dessen in dem Ausdruck **unter** dem Integralzeichen einzuführen. Es ist diese Bemerkung wichtig insbesondere für die Darstellung durch ein n-faches und ein $n-1$-faches Integral, insoferne sie gestattet neben dem n-fachen „an sich" betrachteten Integral auch noch für das $n-1$-fache, über $F_0 = o$ laufende Integral eine Summe „an sich" betrachteter $n-1$-fache Integrale einzuführen, indem man etwa für die Begrenzung eines neuen Integrationsgebietes $T > o$ lauter **ebene** $n-1$-fache Mannigfaltigkeiten $z_i = \text{const.}$ annimmt, welche — wenn nöthig in treppenförmigen Absätzen — das Gebiet $F_0 > o$ innerhalb des Gültigkeitsbereiches unserer Functionsbedingungen umschliessen.

Digitized by Google

Sitzung vom 4. Mai 1898.

Herr C. v. Kupffer hält einen Vortrag: „Ueber die Sternzellen der Leber.“ Derselbe wird an einem anderen Orte zur Veröffentlichung gelangen.

Digitized by Google

Sitzung vom 11. Juni 1898.

1. Herr Johannes Ranke hält den in der Maisitzung zurückgestellten Vortrag: „Ueber den Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten."

2. Herr Emil Salenka spricht: „Ueber die erste Embryonalanlage der Menschenaffen." Die Abhandlung wird an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

3. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung von Herrn Dr. K. Schwarzschild, Assistent der v. Kuffner'schen Sternwarte zu Wien, „Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus" vor.

4. Herr Hugo Seeliger überreicht eine Arbeit: „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne." Dieselbe wird in die Druckschriften aufgenommen.

5. Herr Alfred Pringsheim theilt zwei Abhandlungen mit:

a) „Ueber die Convergenz einer allgemeinen Classe von Kettenbrüchen,"

b) „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π."

Digitized by Google

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten.

Von **Johannes Ranke.**

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

I. Der Stirnfortsatz beim Menschen.

a) Europäer.

Im Jahre 1875 erschien Herrn R. Virchow's Werk: „Ueber einige Merkmale niederer Menschenrassen am Schädel",[1]) durch welches die Kraniologie einen neuen anhaltenden Impuls erhielt.

Unter anderem wurde in jenem Werke der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp., einer eingehenden Betrachtung unterzogen. Diese Bildung ist bei dem Menschen recht selten, erweckt aber dadurch ein höheres Interesse, weil die Mehrzahl der Autoren darin übereinkommt, das Vorkommen des Stirnfortsatzes beim Menschen für eine entschiedene Thierähnlichkeit zu erklären. Herr R. Virchow gibt folgende Darlegung der anatomischen Verhältnisse.[2])

„Es gibt bei einer grossen Anzahl von Säugethieren, und zwar überwiegend von höheren, eine Knocheneinrichtung am Schädel, welche nach der gewöhnlichen anatomischen Erfahrung sich beim Menschen nicht findet und daher dem Anschein nach

[1]) Denkschriften der Berliner Akademie der Wissensch. 4⁰. 1875. Mit 7 Tafeln.

[2]) l. c. S. 9.

Digitized by Google

einen durchgreifenden Unterschied dieser Thiere vom Menschen darstellt. Es ist das die Verbindung der Schuppe des Schläfenbeins mit dem Stirnbein durch einen besonderen Fortsatz, den Stirnfortsatz, Processus frontalis. Zuweilen geschieht diese Verbindung in einer so breiten Fläche, dass man ein Zusammenstossen der beiden Knochen selbst annehmen könnte. Durch diese Verbindung wird der grosse Flügel des Keilbeins von der Berührung mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitel- oder Seitenwandbeines abgeschnitten. Beim Menschen dagegen erreicht der Keilbeinflügel nicht nur das Scheitelbein, sondern beide pflegen sich in einer verhältnissmässig langen Strecke an einander zu legen. Die Schläfenschuppe bleibt daher in einer beträchtlichen Entfernung vom Stirnbein. Unter den Säugethieren sind es besonders die Nager, die Dickhäuter, die Einhufer und die Affen und vor allem die anthropoiden Affen, deren Schädel die Verbindung der Schläfenschuppe mit dem Stirnbein zeigen. Indes geschieht die Verbindung in sehr wechselnder Form und keineswegs bei allen Gattungen der genannten Ordnungen. Herr W. Gruber sagt in seiner eingehenden Untersuchung über dieses Verhältniss, dass es zur Verbindung durch einen platten und gut abgegrenzten Fortsatz eigentlich nur bei den Affen komme. Von den anthropoiden Affen besitzen Gorilla und Schimpanse den Fortsatz konstant. Beim Orangutan vermisst man ihn häufiger, doch ist sein Vorkommen durch die Herren Owen, Brühl, Bischoff, Gruber und Trinchese auch für dieses Thier nachgewiesen worden. Herr Gruber sah ihn beim Orangutan unter 15 Fällen, von denen 3 wegen Verwachsung der Nähte keinen Aufschluss gaben, achtmal, während Herr Owen ihn unter 8 Fällen nur einmal beobachtete. Ebenso ist das Vorkommen inkonstant beim Hylobates. Diese Thatsachen erscheinen um so mehr bemerkenswerth, als eine ähnliche Verbindung bei den Halbaffen bis jetzt noch nicht beobachtet worden ist, letztere also in dieser Beziehung dem Menschen näher stehen.“

Digitized by Google

In der Literatur fand sich bis dahin nur eine Angabe über das Vorkommen eines Schläfenfortsatzes an einem modernen deutschen Schädel;[1]) Herr Virchow selbst konnte auch nur eine einzige Beobachtung aus deutschem Gebiete mittheilen und zwar an einem sehr jugendlichen prähistorischen Schädel aus dem Gräberfelde von Camburg, wo er das Vorkommen von Cretinismus schon in jener alten Zeit constatirt hatte.[2])

Im Jahre 1877 begann ich mit der Veröffentlichung meiner Untersuchungen: Ueber die Schädel der altbayerischen Landbevölkerung.[3])

Unter **2421** Schädeln der altbayerischen Landbevölkerung fand ich: **43** mit theils einseitigem, theils doppelseitigem vollkommen trennendem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, es sind das je 1 Schädel auf $56,_3$ oder $17,_3$ Schädel auf je 1000.

Auch aus anderen Gegenden Deutschlands liefen nun Einzelangaben über das Vorkommen von Stirnfortsätzen der Schläfenschuppe ein, aus welchen soviel hervorzugehen scheint, dass überall in Deutschland das Vorkommen ziemlich gleich häufig rsp. selten ist. Auch für andere Europäische Völker gilt das Gleiche, für welche ich damals schon über **8000** Schädel, die von mir beobachteten eingerechnet, aus der Literatur vergleichen konnte. Unter 4000 Slavenschädeln hatte W. Gruber den Stirnfortsatz 60 mal gefunden = 15,0 pro mille, Virchow gibt für Slaven 16,6 p. m. an, Calori fand unter 1013 Italienerschädeln den Fortsatz zu 22 p. m. bei Frauen-, und nur zu 4 p. m. bei Männer-Schädeln. Im Mittel berechnete ich daraus die Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei europäischen Völkern zu **16** pro mille.

---

[1]) J. Henle, Handbuch der Knochenlehre. Braunschweig 1855. S. 134.

[2]) R. Virchow. l. c. S. 40.

[3]) Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. I. S. 227 ff. und Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern. München, Th. Riedel Lexic. 8⁰ mit 16 Tafeln und 2 Karten.

Digitized by Google

Fünf Jahre später hat Herr Dimitrij Anutschin[1]) aus der Literatur und aus eigener Beobachtung die Gesammtzahl der darauf untersuchten Europäer-Schädel, unter Einrechnung der von mir untersuchten, auf nahezu 10 Tausend (9867) gebracht — Deutsche (vor allem meine Altbayern), Franzosen, Italiener, Russen, Oesterreicher. — Er fand in der Gesammtzahl den Stirnfortsatz ebenfalls zu 16 pro mille und bestätigte damit meine älteren Resultate.

Unbeschadet der Uebereinstimmung der statistischen Ergebnisse im Grossen konnte ich jedoch im Einzelnen enorme Differenzen der Anzahl der Schläfenfortsätze für lokal engbegrenzte Gruppen nachweisen.

Während in bayerischen Flachlandorten — mit und ohne slavische Beimischung — die Anzahl der Stirnfortsätze 16 pro mille betrug, stieg dieselbe in Gebirgsorten auf 44,8 pro mille. In dem kleinen Gebirgsorte Bergen am Chiemsee fand ich unter 8 Schädeln 1 mit vollständigem und 5 mit unvollständigem Schläfenbeinfortsatz zum Stirnbein, der vollständige Fortsatz fand sich dort sonach in 125 pro mille. In manchen meiner Untersuchungsreihen dagegen fand ich den Stirnfortsatz überhaupt gar nicht.

Aehnliche Beobachtungen machte Herr R. Virchow. Während Calori unter 1013 Italienerschädeln nur achtmal den vollständigen Stirnfortsatz zählte, sah ihn Virchow unter 5 Schädeln von St. Remo zweimal = 400 pro mille; unter 13 Finnenschädeln dreimal = 230 pro mille; unter 8 Ungarnschädeln zweimal = 250 pro mille.

Aus diesen Ergebnissen tritt uns die ausgesprochene „Erblichkeit“ dieser seltenen Bildung mit Entschiedenheit entgegen: in eng abgeschlossenen kleinen Bevölkerungsgruppen, bei den sich in solchen ergebenden gleichartigen verwandtschaftlichen Beziehungen der Bewohner kleiner Ortschaften, kann sich das Moment der Erblichkeit in gesteigertem Masse geltend machen. Es gilt das, wie ich gefunden habe, für alle seltenen angeborenen Schädel- und sonstigen Körperanomalien.

[1]) Biol. Centralblatt. 1882, II. Band. S. 38 ff.

b) Aussereuropäische Völker.

Herr R. Virchow und ich hatten aus z. Thl. freilich kleineren statistischen Reihen, mit Benützung der älteren Literatur, statistisch festgestellt, dass der Stirnfortsatz bei aussereuropäischen Schädeln zum Theil weit häufiger sei, und zwar um etwa das Zehnfache als bei den Europäern. Herr R. Virchow hat das vor allem für Schädel aus Australien und den Philippinen sowie aus Celebes konstatirt, ich für Schädel der nordafrikanischen Mischbevölkerung, Papuas aus Neu-Guinea, Kalmücken und Neger.

Gestützt auf unsere Statistik und unter Zuziehung noch weit grösseren statistischen Materials als uns damals zur Verfügung war, hat in jener oben erwähnten verdienstvollen Untersuchung Herr Anutschin auch dieses unser Resultat für aussereuropäische Völker voll bestätigt. Seine Gesammt-Statistik umfasst ausser den schon besprochenen 9867 Europäer-Schädeln noch 5302 aussereuropäische Schädel. Unter der Gesammtzahl von 15169 Menschen-Schädeln verschiedener Rassen fanden sich 449 mit Stirnfortsatz d. h. im Mittel also 3% (genau 2,96%). Die Schwankungsbreite war nach Herrn Anutschin wie 1 : 10 nämlich:

minmum:	Europäer	1,6%
maximum:	Australier	16,0% (genau 15,7%).

Die betreffenden Untersuchungen wurden seit dieser Zeit (1882) eifrig fortgesetzt. In den im Archiv für Anthropologie publizirten Catalogen der Anthropologischen Sammlungen Deutschlands[1]) ist nun ein weit grösseres statistisches Material zusammengebracht, als es früher Irgendjemandem zu benützen möglich war. Diese Mehrung kommt vor allem den Mongolen und Mongoloiden, den Malaien und Polynesiern, den Papua, Australiern[2]) und Negern, also den für unsere Betrachtungen

[1]) J. Ranke, Archiv für Anthropologie Bd. 1883 — Bd. 1897.

[2]) W. Krause: Zeitschr. f. Ethnologie Bd. XXIX. 1897. Verhandlungen der Berliner anthropol. Gesellschaft S. 575 ff.

Digitized by Google

wichtigsten Völkern und Rassen, zu gute. Im Ganzen umfasst meine folgende Statistik nun

20030 Menschenschädel,

und zwar 11000 Europäische Schädel
und 9020 Ausser-Europäische Schädel,
also eine Mehrung um 4861 Schädel im Ganzen. Um die älteren statistischen Ergebnisse Herrn Anutschin's mit den neuen hier gegebenen vergleichen zu können, wurden in die folgende Tabelle auch Herrn Anutschin's Zahlen eingestellt.

Tabelle

über das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei 20030 Menschen-Schädeln verschiedener Rasse.

Gesammt-Anzahl der Schädel:		Darunter solche mit Stirnfortsatz:	Bezeichnung der Schädel:	Anzahl der Schädel mit Stirnfortsatz in Procenten J. Ranke:	(Anutschin):
11000	:	169	Europäer (Deutsche, Oesterreicher, Italiener, Franzosen, Russen)	**1,53%**	(9867: 1,6 %)
2520	:	43	Amerikaner	**1,74** „	(2335: 1,6 „)
1200	:	21	Asiaten nicht mongoloider Rasse (Kaukasier, Inder, Turkestaner, Turkofinnen)	**2,00** „	(1194: 1,9 „)
710	:	27	Mongolen und Mongoloiden	**3,80** „	(596: 3,7 „)
1250	:	54	Malaien und Polynesier	**4,32** „	(946: 3,7 „)
787	:	73	Papua (Melanesier)	**9,28** „	(697: 8,6 „)
422	:	38	Australier	**9,00** „	(210:15,7 „)
81	:	9	Ceilonesen (Vedda 38 : 4; Tamilen 27 : 2; Singalesen 16 : 3)	**11,11** „	(-- : — „)
1231	:	146	Neger	**11,86** „	(884:12,4 „)
830	:	47	Nord-Afrikaner	**5,66** „	(— : — „)
S. **20030**	:	**637**		**3,10%**	(15169: 2,96%)

Digitized by Google

Unter den 20030 Schädeln von Menschen verschiedener Rasse fanden sich 637 mit theils einseitigem theils doppelseitigem vollkommen ausgebildetem (trennendem) Stirnfortsatz der Schläfenschuppe im Gesammtmittel sonach 3 auf 100.

Aber die Differenzen sind auch bei dieser reichen Statistik enorm. Wenn auch mit der steigenden Anzahl der zur Beobachtung beigezogenen Schädel der aussereuropäischen Rassen das procentische Vorkommen des Stirnfortsatzes nicht unwesentlich herabgedrückt erscheint, so bleibt doch unser älteres Resultat bestehen, dass, abgesehen von den Amerikanern, alle Ausser-Europäischen Völker und Rassen den Stirnfortsatz in grösserer relativer Häufigkeit aufweisen als die Europäer.

Bemerkenswerth erscheint es, dass die in fast verdoppelter Anzahl vorliegenden Australier-Schädel von ihrer letzten Stelle bei Anutschin mit 15,7% sich mit nun 9,0% ziemlich weit über die Neger mit c. 12% erhoben haben und den Papua (Melanesiern) mit 9,28% zunächst stehen. Aehnlich nah stehen sich die Mongolen (Mongoloiden) mit c. 4% (3,8%) und die Malaien (und Polynesier) mit 4,32%. Die gegenüber den Europäern etwas grössere Anzahl der Stirnfortsätze bei den „nicht-mongoloiden" Asiaten mit 2%, lässt sich vielleicht durch Beimischung mongoloiden Blutes erklären; ähnlich erklärt sich wohl die relativ hohe Anzahl der Stirnfortsätze bei den Nord-Afrikanern mit 5,66% aus Zumischung von Negerblut. Bei den Ceilonesen mit 11% darf man, obwohl hier die Statistik noch keineswegs ausreicht, doch an australoiden oder Papua-Einfluss denken.

Aber vor allem ist es wichtig, dass, wie oben dargelegt, die lokalen Differenzen in Europa selbst noch weit beträchtlicher sind als die Differenzen zwischen den verschiedenen Menschenrassen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes erscheint als eine erbliche Variation im Schädelbau der gesammten Menschheit.

Die grössere Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei aussereuropäischen Völkern erscheint danach zunächst weniger als ein

Rassen-Merkmal, als ein Erfolg gesteigerter Inzucht, wie sie sich bei kleineren Stämmen und Inselbevölkerungen der Natur der Sache nach ergibt. Es würde nach unseren Erfahrungen möglich sein, auch bei Europäern ähnliche Häufigkeit des Stirnfortsatzes durch Isolirung und Inzucht zu erzielen. Die Bevölkerungen von Bergen oder St. Remo würden, isolirt und auf Inzucht angewiesen, in dieser Hinsicht bald Neger, Australier und Papua übertreffen.

Immerhin deutet aber die grössere Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei allen engschädeligen schwarzen Rassen: Negern, Australier und Papua, gegenüber den weitschädeligen hellhäutigen Rassen: Mongoloiden (Mongolen, Malaien, Amerikaner) und Europäer, darauf hin, dass bei jenen schwarzen Rassen allgemeiner begünstigende Momente für die Entstehung des Schläfenfortsatzes bestehen, wie sie sich bei ersteren nur vereinzelt und lokal finden.

II. Der Stirnfortsatz bei Affen und Halbaffen.

a) Orangutan.

Mit den im Vorstehenden dargelegten Resultaten erscheint eine statistisch gesicherte Grundlage gewonnen zunächst zur Vergleichung zwischen Mensch und Anthropoiden sowie den übrigen Affen.

Hier hat Herr Anutschin zuerst ein grösseres statistisches Material zusammengebracht durch Untersuchungen in vielen europäischen Sammlungen, auch denen Münchens.

Unter 6 Orangutan-Schädeln hatte ich in der oben citirten Publication nur 1 mit Stirnfortsatz gefunden; zahlreiche alte Schädel mussten dabei wegen Verwachsung und Verstreichen der Nähte in der Schläfengegend von der statistischen Zählung ausgeschlossen werden. Aus der Literatur brachte ich noch 20 brauchbare Schädel zusammen. Unter der Gesammtzahl von 26 zeigten 10 Stirnfortsatz, was nahezu 40% ausmachen würde. Jedenfalls bestätigten aber meine Untersuchungen das

von Herrn R. Virchow angegebene[1]) inkonstante Vorkommen des Stirnfortsatzes beim Orangutan. Anutschin konnte 65 Schädel der Zählung unterziehen, er fand darunter 11 mit doppelseitigem und 7 mit einseitigem Stirnfortsatz = 27,7 %. Mit Einrechnung der obigen 26 meiner Zählung sind das 81 Orangutan-Schädeln, darunter 28 mit Stirnfortsatz = 34,5 %.

Meine neuen Ergebnisse habe ich der Hauptsache nach an der von Herrn E. Selenka der Münchener kgl. Akademie der Wissenschaften zur Aufstellung in der anthropologisch-prähistorischen Sammlung geschenkten Kollektion von Orangutanschädeln aus Borneo gewonnen.

Unter den 245 Orangutan-Schädeln aus Borneo der Selenka'schen Sammlung, welche von mir für diese Untersuchungen benützt werden konnten, waren bei 226 die anatomischen Verhältnisse der Schläfengegend deutlich genug, um Anwesenheit oder Abwesenheit des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp. constatiren zu können. Unter diesen fanden sich 76 mit entweder doppelseitigem oder einseitigem vollkommen trennenden Stirnfortsatz, das gibt 33,62 %, also fast genau ein Drittel der Gesammtsumme. Doppelseitig, rechts und links, zeigten den Fortsatz 54, einseitig, rechts oder links, 22 Schädel. Der doppelseitige Stirnfortsatz erscheint danach weit häufiger als der einseitige.

Die procentische Anzahl des Vorkommens des Stirnfortsatzes zu 33,62 % ist fast identisch mit der von mir oben aus der Zusammenfassung der älteren Zählungen berechneten 34,5 %. Mit Zuzählung jener oben erwähnten 81 Orangutan-Schädel meiner älteren Statistik zu den 226 der neuen Statistik erhebt sich die von mir verglichene Gesammtzahl der Orangutan-Schädel auf 307, davon 104 mit Stirnfortsatz = 33,8 %.

Das vortreffliche Material der Selenka'schen Sammlung erlaubt eine exakte Trennung der Schädel auch nach der Heimath der Thiere. Da tritt nun der gleiche Einfluss scheinbar des Lokals, in Wahrheit der Vererbung nicht

---

[1]) S. oben S. 228.

weniger deutlich hervor als bei unseren Untersuchungen am Menschen. In folgender kleinen Tabelle sind die Einzelresultate nach lokalen Gruppen geordnet, ohne Trennung nach Alter und Geschlecht.

Tabelle

über das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei Orangutans aus verschiedenen Gegenden Borneo's.

Herkunft der Schädel:	Anzahl der Schädel:	Schädel mit Processus frontalis:	Procentische Anzahl 100:
Kapuas u. Belaban	3	3	100,0 %
Berantau	5	4	80,0 „
Genepai	17	7	41,2 „
Batangtu	13	5	38,5 „
Rantei	11	4	36,4 „
Dadap	30	10	33,3 „
Bogau	15	5	33,3 „
Batang Bara	9	3	33,3 „
Ketungau	3	1	33,3 „
Skalau	106	31	29,2 „
Landak	14	3	21,4 „
Summe:	226	76	33,62%

Die Schwankungsbreite geht von 100% bis 21,4%.

Ein so ausgesprochener Unterschied, wie ihn Calori für das weibliche und männliche Geschlecht beim Menschen (Italiener-Schädel) gefunden hat, findet sich bei den beiden Geschlechtern des Orangutan nicht. Ein besonderer Werth der Selenka'schen Sammlung liegt darin, dass alle Schädel nach dem Geschlecht bezeichnet wurden. Die Gesammtzahl von 226 Schädeln, welche für diese Untersuchungen brauchbar waren, setzt sich aus 92 männlichen und 134 weiblichen Schädeln zusammen, unter letzteren fanden sich 47 = 35,07%, unter den ersteren 92 dagegen 29 = 31,52% mit Stirnfortsatz. Der Unterschied = 3,55% grössere Häufigkeit bei den Weibchen — fällt noch in die Fehlergrenzen derartiger statistischer Aufnahmen.

Digitized by Google

Immerhin verdient Beachtung, dass bei den Weibchen ein nur einseitig ausgebildeter Stirnfortsatz 16 mal = 12%, bei den Männchen nur 6 mal = 6,5% beobachtet worden ist. Der einseitige Stirnfortsatz ist im Verhältniss zum Menschen bei unseren Orangutan's auffallend selten, noch seltener der bei dem Menschen so sehr häufig auftretende unvollständige Stirnfortsatz, Proc. frontalis oss. temp. incompletus. Bei den altbayerischen Schädeln fand ich unter 2421 den completen Stirnfortsatz 43 mal = 17,3 pro mille, den unvollständigen 146 mal = 60,3 pro mille, sonach letzteren mehr als dreimal so häufig als ersteren. Unter den 226 Orangutan-Schädeln dieser Statistik kam der unvollständige Stirnfortsatz der Schläfenschuppe nur zweimal, und zwar beide Male an männlichen Schädeln, vor.

Als Resultat der Untersuchung der Orangutanschädel ergibt sich:

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp. s. squamae, bildet bei dem Orangutan von Borneo keineswegs einen regelmässigen Befund, er findet sich nur etwa bei $^1/_3$ der Schädel und erscheint danach als eine individuelle Bildung, entsprechend wie bei dem Menschen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes ist bei dem Orangutan von Borneo stets dreimal so häufig als bei den „Negern" (s. oben die Tabelle, die Zahlen sind 33,6% : 11,86%), und etwa 10 mal so häufig als in der „gesammten Menschheit" mit etwa 3% (genau 3,1%) und 21 mal häufiger als bei den europäischen Völkern mit 1,53%.

Bei dem Orangutan zeigt sich wie bei dem Menschen der Einfluss des Lokals rsp. der Vererbung auf die Häufigkeit des Stirnfortsatzes in der ausgesprochensten Weise, die Häufigkeit schwankt bei ersteren in den einzelnen lokalen Reihen von dem Minimum 21,4%, welches sich nur um einige Procente über das Mittel der Neger erhebt, und dem Maximum 80% rsp. 100%. Bei Europäern ergab sich als lokales Maximum 40%.[1])

[1]) Die Zahl der von Sumatra stammenden Orangutan-Schädel, welche ich untersuchen konnte, war nur 4, davon hatte nur 1 Schädel beiderseits stark ausgebildeten Stirnfortsatz = 25%.

Digitized by Google

b) Gorilla, Schimpanse, Hylobates und die niederen Affen und Halbaffen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei Gorilla und Schimpanse ist bis jetzt noch nicht an einer für eine statistische Aufnahme genügenden Anzahl geprüft. Es ist aber immerhin wichtig, dass man noch keinen Gorilla-Schädel ohne Stirnfortsatz gefunden zu haben scheint, sodass Virchow's dahin gehende Angabe sich bestätigt. Unter 35 Schädeln, z. Thl. nach der Literatur, z. Thl. von mir persönlich geprüft, fanden sich aber doch 3 = 8,5%, bei welchen der Fortsatz nur einseitig auftrat, zum Beweis, dass doch auch bei dem Gorilla das Vorkommen dieser Bildung nicht als eine absolute Baunothwendigkeit des Schädels angesprochen werden muss.

Am Schimpanse-Schädel wird der Stirnfortsatz selten vermisst; nach meinen und Anutschin's Zählungen an 70 Schädeln fand er sich bei 54 = 77%.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei den Schädeln von Hylobates verschiedener Species konnte von mir (10) und Anutschin (27), zusammen an 37 Schädeln, an welchen die Nahtverhältnisse in der Schläfengegend deutlich waren, geprüft werden, es fanden sich darunter 4 mit theils doppelseitigem, theils einseitigem Stirnfortsatz. Aus der Sammlung E. Selenka's hat G. Kirchner[1]) 36 Schädel von Hylobates concolor geprüft, er fand darunter 6 Schädel mit Stirnfortsatz. Im Ganzen fanden sich sonach unter 73 Schädeln 10 = 13,7%.

Die niederen Affen der alten Welt verhalten sich im Allgemeinen wie der Schimpanse; ich fand unter 83 Schädeln 60 mit theils doppelseitigem, theils einseitigem Stirnfortsatz = 72,3%.

Im Einzelnen kann ich die älteren Resultate der Autoren namentlich Anutschin's bestätigen: am häufigsten ist unter

---

[1]) Der Schädel des Hylobates concolor, sein Variationskreis und Zahnbau. Erlangen, Inaugural-Dissertation, 1895.

den niederen Affen der alten Welt der Stirnfortsatz bei den Makaken (Macacus und Inuus), A. fand bei 78 Schädeln 67 mit Fortsatz = 85,9%, ich bei 20 : 18 = 90,0%. Dann folgen bei uns beiden die Paviane, A. 81 : 63 = 77,8%, ich 20 : 16 = 80%; Meerkatzen (Cercopithecus, Cercocebus) A. 63 : 36 = 57%, ich 23 : 17 = 74,0%; Semnopithecus (mit Rhinopithecus, Colobus), A. 69 : 27 = 39,1, ich 21 : 9 = 42,3%.

Für alle 291 untersuchten Schädel von niederen Affen der alten Welt berechnen sich nach Anutschin 67,3%; mit Zuzählung der obigen 83 von mir geprüften Schädel stellt sich für die Gesammtsumme von 374 Schädeln das Vorkommen des Stirnfortsatzes zu 68,4%.

Bei diesen niederen Affen der alten Welt ist sonach das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe ein so häufiges, dass man dasselbe nahezu als typischen Befund betrachten darf, sie reihen sich hinsichtlich dieser Bildung dem Gorilla und dem Schimpanse an. Vielleicht macht die Gruppe Semnopithecus einen Uebergang zu der folgenden Reihe, als deren Repräsentant zunächst der Orangutan erscheint.

Bei Orangutan und Hylobates ist, im Gegensatz zu den letzt besprochenen Affen, das Vorkommen des Stirnfortsatzes so selten, dass es wie beim Menschen als eine individuelle Variation angesprochen werden muss: 33,6 und 10,8%.

Noch ausgesprochener hat der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe den Charakter der individuellen Variation bei den Affen und Krallenaffen der neuen Welt.

Ich habe 53 Schädel darauf geprüft (11 Mycetes = 0; 2 Ateles = 1 Stirnfortsatz; 3 Logothrix = 0; 17 Cebus = 0; 4 Pithecia = 2; 7 Callithrix = 0; 1 Chrysothrix = 0; 8 Hapole = 1), es fanden sich 3 mit Stirnfortsatz und 1 mit Anlagen des Schläfenbeins ans Stirnbein ohne Fortsatzbildung, im Ganzen also 4 = 7,5%.

Die Angabe Virchow's, dass den Halbaffen der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe fehle, konnte ich an 26 Schädeln prüfen; bei keinem derselben war mit Sicherheit ein Stirnfortsatz zu konstatiren; in 2 Fällen blieb wegen Nahtverwachsung

das Verhältniss zweifelhaft. Gewiss erscheint sonach das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei den Halbaffen nicht häufiger als bei den Affen der neuen Welt: er fehlt ganz oder ist, wenn er vorkommen sollte, eine seltene Variation.

Das Gesammtresultat der Untersuchung für das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei den Primaten ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle

über das procentische Vorkommen des Stirnfortsatzes bei den Primaten.

		Häufigkeit des Stirnfortsatzes
	1. Menschen.	
20030	Menschenschädel verschiedener Rassen	3,10%
11000	Europäer	1,53 „
1231	Neger	11,86 „
	2. Affen:	
35	Gorilla[1])	100,0 %
70	Schimpanse	77,0 „
374	Niedere Affen der alten Welt	68,4 „
307	Orangutan (Borneo)	33,6 „
73	Hylabates verschiedener Species	13,7 „
53	Affen der neuen Welt	7,5 „
	3. Halb-Affen:	
26	Halbaffen	0,0 %.

Bei dem Orangutan und bei dem Menschen konnte oben der Einfluss des Lokals, d. h. der Vererbung in einer örtlich enger abgeschlossenen Gruppe auf die Häufigkeit des Vorkommens des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe sicher gestellt werden. Im Grossen und Ganzen zeigt einen solchen Einfluss des Lokals (= Vererbung) auch die vorstehende Gesammtreihe sowohl für die niederen Affen als für die menschenähnlichen Affen im Allgemeinen. Bei den Afrikanischen Menschenaffen (Gorilla und Schimpanse) bildet das Fehlen des

[1]) Darunter 3 = 8,5% mit nur einseitigem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe.

Stirnfortsatzes die seltene Ausnahme, umgekehrt ist es bei den Asiaten (Orangutan und Hylobates), bei welchen das Vorkommen des Stirnfortsatzes die Ausnahme bildet; bei nahezu Dreiviertel aller niederen Affen der alten Welt findet sich der Stirnfortsatz. In Amerika dagegen fehlt der Stirnfortsatz den Affenschädeln so gut wie ganz.

Als Resultat ergibt sich:

Die direkte Verbindung der Schläfenschuppe mit dem Stirnbein durch einen Stirnfortsatz gehört sonach bei dem Gorilla und auch bei dem Schimpanse, wie bei fast allen niederen Affen der alten Welt, zur typischen Schädelbildung, das Fehlen dieser Verbindung erscheint als individuelle Ausnahme, Variation.

Bei Orang, Hylobates sowie den niederen Affen der alten Welt, einschliesslich den Krallenaffen, lässt das Vorkommen des Stirnfortsatzes entweder mehr oder weniger häufige Ausnahmen zu oder wird selbst zu einer seltenen oder sehr seltenen individuellen Variation. Letzteres gilt auch für den Menschen. Den Halbaffen fehlt der Stirnfortsatz nach den bisherigen Untersuchungen.

Der Mensch reiht sich bezüglich des Vorkommens dieser bemerkenswerthen Bildung am Schädel zwischen die Halbaffen und die Affen der neuen Welt ein.

Sehen wir von den niederen Affen ab, so steht der Mensch nach unserer obigen Tabelle zwischen Halbaffen und Hylobates, Neger und Hylobates stehen fast vollkommen gleich.

Der Mensch trennt sich sonach in dieser Hinsicht von den grossen menschenähnlichen Affen im engeren Sinne, an deren Spitze sich der Gorilla stellt. —

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ist ein Beispiel für die eine Seite der individuellen Variation:

In den gesetzmässigen Bauverhältnissen des Schädels aller Primaten ist die Möglichkeit zur Ausbildung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe gegeben, aber nur individuell erfolgt diese mögliche Ausbildung auch faktisch.

III. Die Entstehung und Bedeutung des Stirnfortsatzes.

Aber die Betrachtung darf sich nicht nur auf die Primaten beschränken.

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ist eine für den Schädel nicht nur der Primaten, sondern wahrscheinlich aller Säuger im Typus des Schädelbaus begründete mögliche und thatsächlich weit verbreitet vorkommende Bildung.

Wie oben schon erwähnt, zeigt sich als regelmässiger Befund eine Verbindung der Schläfenbeinschuppe mit dem Stirnbein nach W. Gruber u. A. bei: „Nagern, Einhufern und Dickhäutern."

Die Art der Verbindung ist bei den einzelnen genannten Gruppen etwas verschieden, und vielfach findet sich auch, was ich gegen W. Gruber's gegentheilige Bemerkung (s. oben) hervorheben möchte, ein gut ausgebildeter wahrer Stirnfortsatz.

Bei Hippopotamus und Elephas berührt das Stirnbein das Schläfenbein in relativ geringer Ausdehnung, bei Equus ist das Stirnbein mit dem Schläfenbein in breiter Berührungslinie verbunden, dagegen findet sich bei Sus, Tapir und Hyrax meist ein gut ausgebildeter Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ähnlich dem bei den Primaten, und vor allem bei dem Menschen, typischen Verhältnisse. Bei letzterem kommen übrigens die anderen, eben genannten Arten der Verbindung der beiden Knochen: von der schmalen bis zur ausgedehnten Berührung und von der Bildung eines kleinen bis zu der eines extrem grossen eigentlichen Stirnfortsatz als individuelle Variation bekanntlich ebenfalls vor. Bei Nagern sah ich einen zum Theil gut ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe z. B. bei Arctomys, Sciurus, Pteromys, Erethizon u. a., während bei Hystrix eine breite Verbindung der beiden Knochen gewöhnlich erscheint, was übrigens gelegentlich auch bei Arctomys (A. empetra) zur Beobachtung kam.

Die Erklärungsversuche des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe beim Menschen dürfen daher, nach dem eben Gesagten, nicht auf den Menschen allein, und etwa noch auf die menschen-

Digitized by Google

ähnlichen Affen, zugeschnitten sein. Wir haben es mit einer Frage zu thun, welche eine Berücksichtigung des Baues des Säugethierschädels im Allgemeinen nothwendig macht.

Lediglich die menschlichen Schädelverhältnisse berücksichtigt die älteste Theorie der Bildung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, welche in der neuesten Zeit wieder mehrfach z. B. von Graf Spee und W. Krause u. A., gleichsam als die einzig mögliche, vorgetragen wird. Diese Erklärung wurde schon von Joh. Friedr. Meckel[1]) angedeutet im Zusammenhang mit einer von ihm gelieferten Beschreibung der in der Schläfenfontanelle und in deren nächster Nachbarschaft auftretenden atypischen Verknöcherungscentren, deren häufigste Form als Fontanellknochen der Schläfenfontanelle, temporelle Schaltknochen, Os epiptericum, bezeichnet wird.

Henle und Hyrtel schlossen sich an die von Meckel geäusserte Meinung an, dass es sich bei dem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe beim Menschen eigentlich um einen dieser atypischen Fontanellknochen handle, der jedoch mit der Schläfenschuppe verschmelze.[2]) Bei der Beschreibung eines Schaltknochens der Schläfenfontanelle an einem Schädel der Wiener Anatomischen Sammlung sagt z. B. Hyrtl:[3]) „Verwachsung dieses Schaltknochens mit der Schläfenschuppe bedingt jene bei allen Rassen ausnahmsweise vorkommende und deshalb irrthümlicher Weise als charakteristisches Zeichen einzelner derselben angesprochene Nahtverbindung zwischen Schläfenschuppe und Stirnbein.“ Auf diesen mehrfach an verschiedenen Orten wiederholten Ausspruch Hyrtl's gehen die meisten Wiederholungen dieser Meinung vor allem zurück. Herr W. Krause sagt in seiner neuesten vortrefflichen Publikation über 180 von ihm studirter Australier-Schädel:[4]) „Verwächst der Schläfen-

---

[1]) Die ältere Literatur s. bei R. Virchow l. c. S. 41 ff.

[2]) R. Virchow, l. c. S. 41.

[3]) Jos. Hyrtl, Vergangenheit und Gegenwart des Museums für menschliche Anatomie an der Wiener Universität. Wien 1869. S. 64. Nr. 73.

[4]) Zeitschrift für Ethnologie Bd. XXIX. 1897. Verhandlungen der Berliner anthropologischen Gesellschaft S. 515.

fontanellknochen (Os epiptericum) mit der Squama temporalis, so entsteht ein Processus frontalis der letzteren, verwächst er mit dem Os parietale, was die Norm ist, so verbindet sich letzterer durch die Sutura parieto-sphenoidalis mit der Ala magna."

Herr Virchow hat sich in der oft citirten Abhandlung mit Entschiedenheit wenigstens gegen die allgemeine Giltigkeit dieser Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe ausgesprochen. Es kann ja nicht verkannt werden, dass unter Umständen eine derartige Verwachsung eines solchen atypischen temporalen Fontanellknochens mit der Schläfenschuppe eintreten kann, da im späteren Lebensalter, mit all den anderen Schädelnähten, auch die, nicht weniger zäh wie die normalen Nähte sich erhaltenden, Grenznähte der Fontanellknochen gegen die Nachbarknochen verstreichen. Ein Beweis aber dafür, dass durch eine solche Verwachsung thatsächlich ein typischer wahrer Stirnfortsatz gebildet worden sei, ist, wie mir scheint, noch niemals erbracht worden, die blosse Möglichkeit darf nicht als Beweis angesprochen werden. Die senile Verwachsung der Fontanellknochen der Schläfenfontanelle findet auch gewöhnlich unregelmässig und an allen Grenznähten ziemlich gleichzeitig statt.

Herr Virchow führt gegen die Verwachsungstheorie noch weitere gewichtige Gründe an. Am ausschlaggebendsten erscheint, dass der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe an ganz jugendlichen Menschen-Schädeln beobachtet worden ist, bei welchen von einer solchen hypothetischen, wie gesagt, gewöhnlich erst im senilen Alter erfolgenden Nahtverstreichung nicht die Rede sein kann. Herr Virchow hat gut ausgebildete Stirnfortsätze der Schläfenschuppe an dem oben erwähnten Schädel eines $1^1/_2$ jährigen Kindes beobachtet.[1]) Unter den zahlreichen von mir beobachteten Fällen beim Menschen zeigten sich in der überwiegenden Anzahl die Schädelnähte der Schläfengegend noch offen. Von Affen, vor allem vom Orangutan, stehen mir zahlreiche Beispiele von Stirnfortsatz aus dem allerersten Jugendalter zur Verfügung.

[1]) Aus dem Gräberfelde von Kamburg.

Noch auf ein anderes Verhältniss macht Herr Virchow[1]) aufmerksam. Wenn der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe seine Entstehung der Verwachsung eines temporalen Schaltknochens mit einem der nachbarlich anliegenden Knochen rsp. mit der Schläfenschuppe verdankt, ist kein Grund abzusehen, warum eine solche Verwachsung nicht auch mit einem der anderen Nachbarknochen, namentlich mit dem Stirnbein, erfolgen sollte, da die Fontanellknochen doch auch dem Stirnbein dicht anliegen und senil thatsächlich mit allen drei benachbarten Knochen (meist gleichzeitig) verschmelzen. Aus einer hypothetischen einseitigen Verwachsung eines Fontanellknochens mit dem Stirnbein würde dann kein Processus frontalis squamae temporalis, sondern „ein Processus temporalis ossis frontis entstehen.“ „Aber ein solcher ist, sagt Herr Virchow, meines Wissens niemals beobachtet worden.“[2])

Danach muss es zunächst scheinen, als würde die Entdeckung eines Processus temporalis ossis frontis die alte Theorie Meckel's und Hyrtl's bestätigen. Ich werde sogleich zeigen, dass das doch nicht im strengen Sinn zutrifft.

Den von Herrn Virchow für die Begründung der Verwachsungstheorie Hyrtl's geforderten Schläfenfortsatz des Stirnbeins, als Widerspiel des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, habe ich thatsächlich an Menschenschädeln entdeckt. In meiner Statistik der altbayerischen Schädel konnte ich unter den 2421 Schädeln, deren Schläfengegend eine genaue Untersuchung zuliess, 2 mit gut entwickeltem Processus temporalis ossis frontis nachweisen. Diese Auffindung des offenbar an Europäerschädeln ausserordentlich seltenen Vorkommens eines Schläfenfortsatzes des Stirnbeins hat Herr Brösike einige Jahre später (1880) in dem Katalog der Berliner kraniologischen Sammlung der Anatomie (Archiv für Anthropologie, 1880) durch Auffindung eines dritten derartigen Falles bestätigt.[3])

---

[1]) l. c. S. 45, 46. [2]) l. c. S. 46.

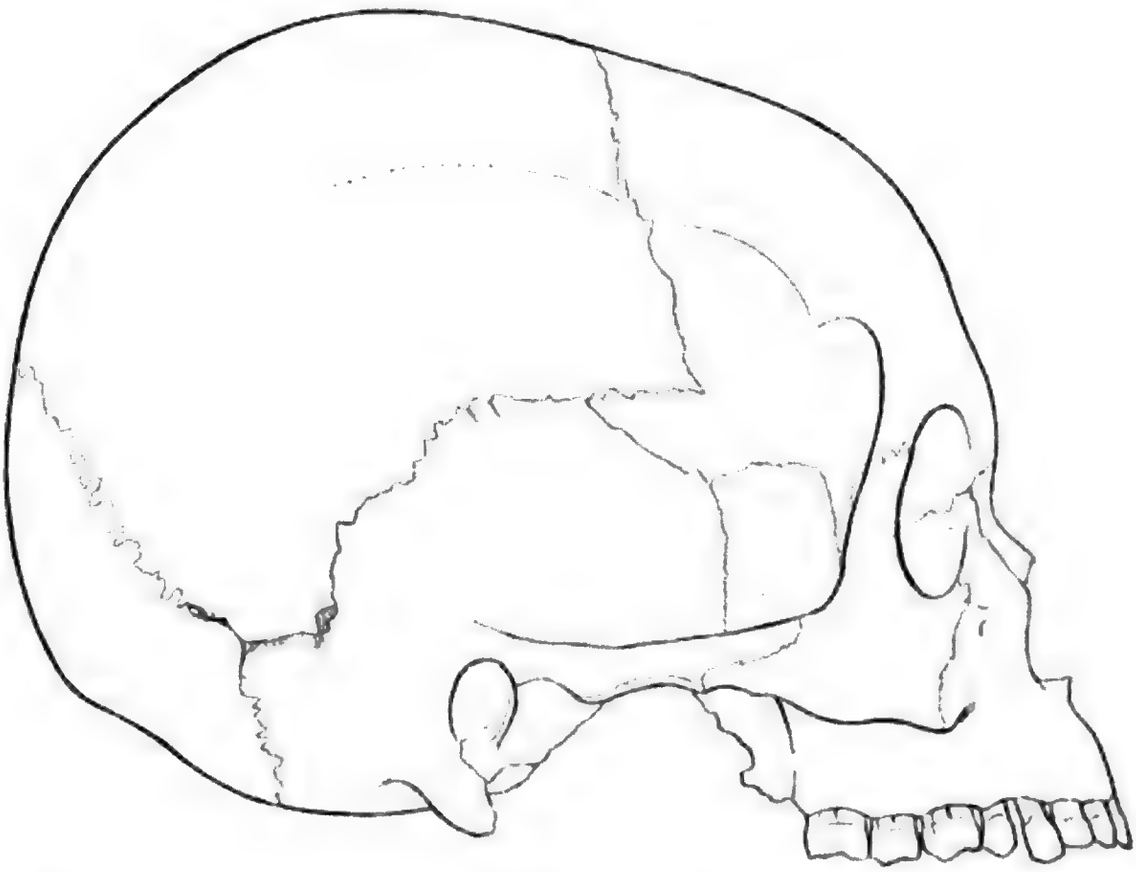
[3]) Ob die der Angabe nach aus Verwachsung von Schläfenschaltknochen mit dem Stirnbein entstandenen „Schläfenfortsätze“ der Strass-

Digitized by Google

In neuester Zeit hatte ich Gelegenheit, diesen Schläfenfortsatz des Stirnbeins noch mehrfach zu beobachten und zwar an **Schädeln aus dem Bismarckarchipel.** Das Münchener anthropologische Institut bewahrt 6 solcher Schädel, alle vortrefflich erhalten, aber ohne passende Unterkiefer.

Diese Schädel zeigen eine überraschend grosse Anzahl von sonst, wie im Vorstehenden statistisch nachgewiesen, sehr seltenen individuellen Bildungen in der Schläfengegend.[1])

Fig. 1 a.



Schläfenfortsatz des Stirnbeins. Schädel aus dem Bismarck-Archipel (rechte Seite).

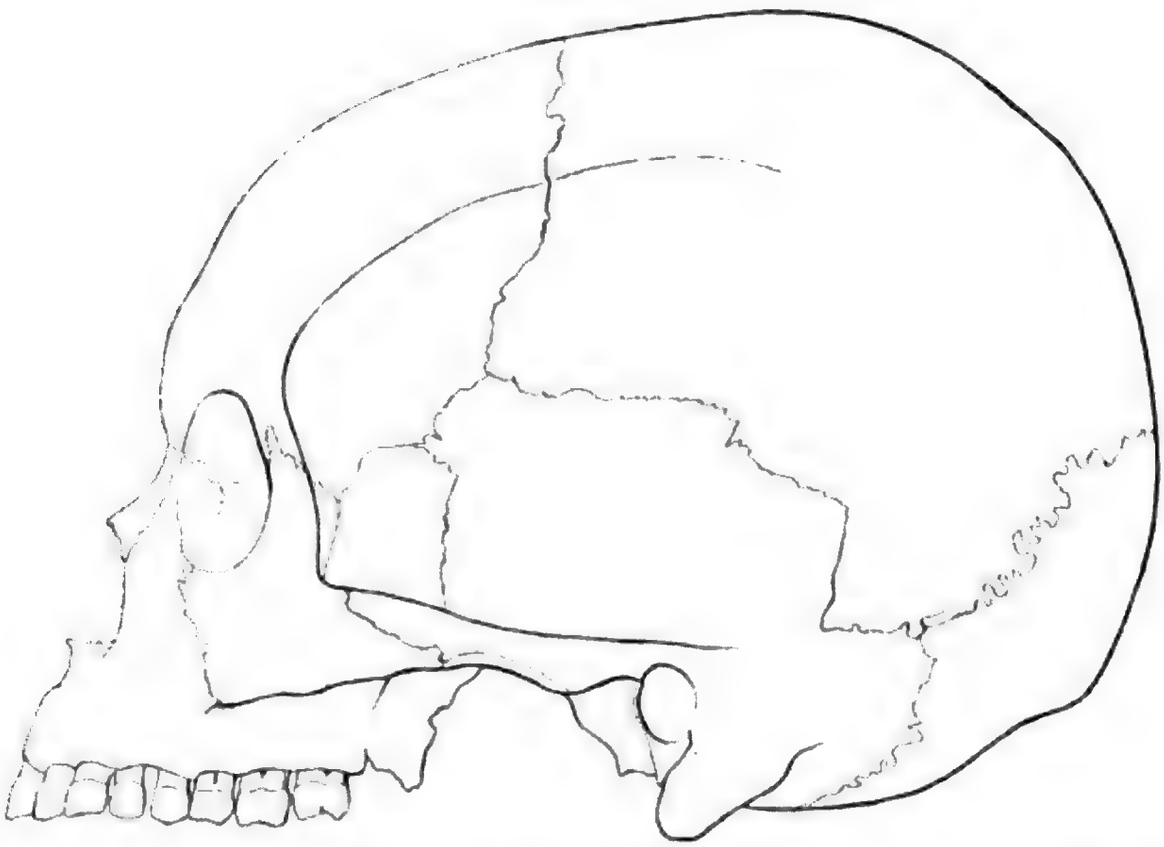
burger Sammlung Arch. f. Anthr. unseren Schläfenfortsätzen entsprechen, wage ich nicht zu entscheiden.

[1]) Ein Schädel aus Neuguinea (Nr. 7 der Sammlung) zeigt dagegen annähernd normale Verhältnisse in der Schläfengegend; die Entfernung der Schläfenschuppe vom Stirnbein beträgt aber rechts nur 3, links 2,5 Millimeter, die beiden Knochen zeigen sonach doch eine beträchtliche Annäherung begründet auf einer Reduction und Schmalheit der Spitze des grossen Keilbeinflügels (s. unten).

Einer dieser 6 Schädel aus dem Bismarckarchipel zeigt links einen zwar rel. kleinen aber vollkommen ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, rechts erreicht ein kleinerer solcher Fortsatz das Stirnbein nicht vollkommen (Processus frontalis squamae temporalis incompletus). Dieser eine Schädel besitzt sonach rechts noch eine kurze Spheno-Parietalnaht und nähert sich hierin allein normalen Verhältnissen an.

Drei andere dieser Schädel weisen doppelseitige Stirn-

Fig. 1 b.



Stirnfortsatz der Schläfenschuppe. Der gleiche Schädel aus dem Bismarck-Archipel (linke Seite).

fortsätze der Schläfenschuppe auf, zum Theil in extremer, ganz an die bei dem Orangutan beobachteten Verhältnisse erinnernder, Ausbildung.

Ein Schädel besitzt doppelseitig grosse **Schläfenfortsätze des Stirnbeins,** Processus temporalis ossis frontis.

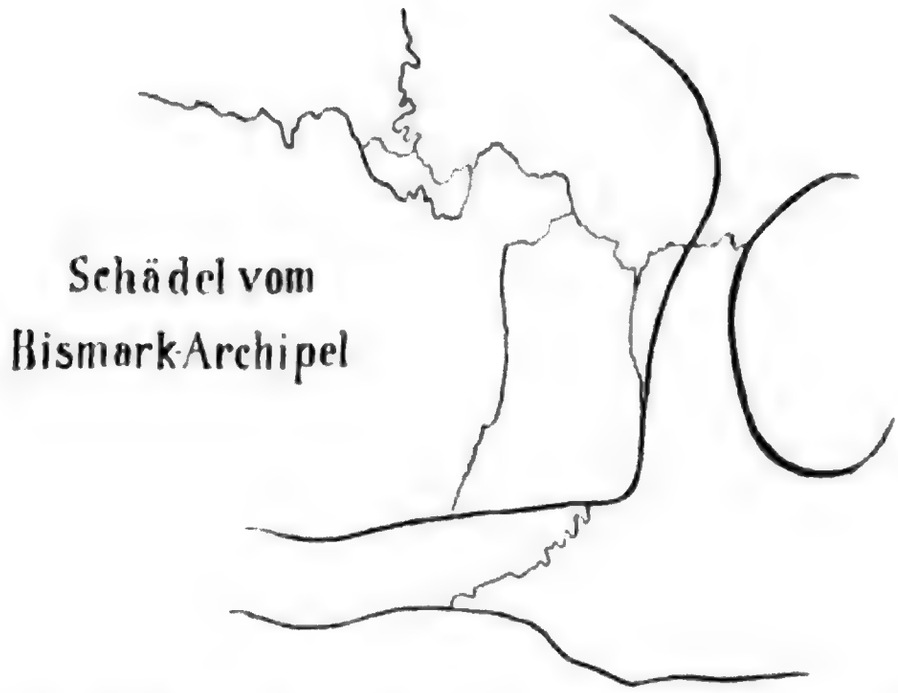
Der letzte Schädel dieser Gruppe zeigt links einen mächtig ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, (Fig. 1b), rechts einen rel. kolossalen **Schläfenfortsatz des Stirnbeins** (Fig. 1a).

Digitized by Google

Dieses gleichzeitige vicarirende Vorkommen von Stirnfortsatz der Schläfenschuppe und Schläfenfortsatz des Stirnbeins weist darauf hin, dass beide Bildungen als nächst verwandt betrachtet werden müssen.

Aber das ist gewiss, dass bei den eben beschriebenen Schädeln aus dem Bismarckarchipel, ebenso wie bei den Schädeln der Primaten, Nichts dafür spricht, dass hier einseitige Verwachsungen einmal gebildeter atypischer temporaler Schaltknochen, das eine Mal mit der Schläfenbeinschuppe, das andere Mal mit dem unteren Winkel des Stirnbeins, stattgefunden habe. Die Nähte in der Nachbarschaft sind offen, eine senile Verwachsung ausgeschlossen. Die 6 Schädel bringen aber auch noch einen positiven Beweis dafür, dass temporale Schaltknochen und die beiden besprochenen Fortsätze prinzipiell auseinander gehalten werden müssen:

Fig. 2 a.



einer der Schädel zeigt hinter einem breiten stark in das Stirnbein einspringenden Stirnfortsatz der Schläfenschuppe noch einen länglichen Schaltknochen zwischen Stirnbein, Scheitelbein und Schuppe des Schläfenbeins, welcher die Fontanelle ganz ausfüllt (Fig. 2 a), also einen wahren Schläfen-

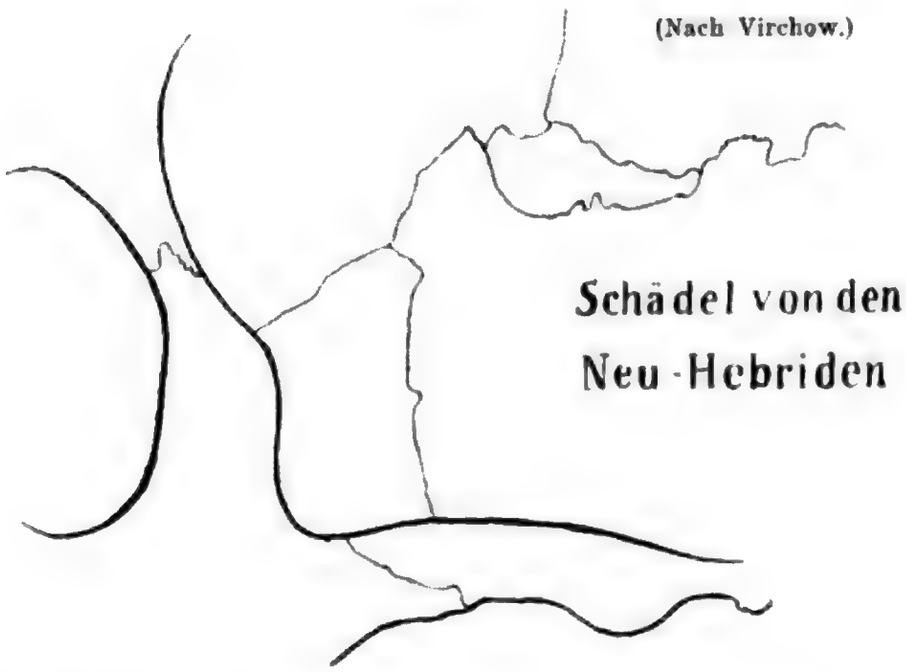
Digitized by Google

fontanellknochen mit allseitig offenen Nähten, welcher die Schläfenfontanelle ganz erfüllt. Auch Herr R. Virchow hat einen grossen, die Fontanelle ganz ausfüllenden Schläfenfontanellknochen neben einem Stirnfortsatz (Fig. 2 b) beobachtet.[1])

Hiedurch erscheint der direkte Beweis erbracht, dass, da beide gleichzeitig an derselben Schläfe auftreten können, Schläfenfontanellknochen und Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, und sein Widerspiel: der Schläfenfortsatz des Stirnbeins, nicht im Prinzip dasselbe sein können.

Thatsächlich ist der bei dem Menschen so häufig auftretende temporale Schaltknochen, in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle, eine atypische, der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe und der Schläfenfortsatz des Stirnbeins dagegen eine typische Bildung am Schädel. Das gilt nicht nur

Fig. 2 b.



für die Schädel der Affen und die oben genannten niederen Säugethiere, sondern auch für den Menschen. Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe des Menschenschädels ist in allen

[1]) Zeitschr. f. Ethnologie, 1884, Bd. XVI. S. (157) Figur 1.

Beziehungen vollkommen entsprechend gebildet wie der des Orangutan und der übrigen anthropoiden Affen, sodass für den Menschen keine andere Entstehungsgeschichte desselben angenommen werden darf als für jene.

Graf Spee sagt in seinem ausgezeichneten Werke über den Schädel S. 160[1]) (Varietäten): „Vom vorderen Schuppenrande aus schiebt sich zuweilen ein Knochenfortsatz (Processus frontalis squamae [Gruber]) zwischen Parietale und Ala temporalis des Keilbeins durch bis zum Stirnbein vor. Derselbe findet sich bei manchen Säugethieren, Nagern, anthropoiden Affen, typisch. Beim Menschen entsteht er dadurch, dass ein Schaltknochen der vorderen Seitenfontanelle mit dem Schuppentheil allein verwächst, anstatt den vorderen unteren Winkel des Os parietale zu bilden."[2])

Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass Graf Spee den Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Affen u. a. für eine typische, bei dem Menschen dagegen für eine atypische d. h. pathologische Bildung hält, welche jene typische Affenbildung imitirt.

Eine verschiedene Erklärung der Entstehung dieser ganz gleichartigen Bildungen bei dem Menschen und den Anthropoiden und anderen Säugethieren erscheint mir aber, wie gesagt, unzulässig. Der Versuch einer Trennung zwischen einem typischen Stirnfortsatz der Schläfenschuppe der Affen und einem atypischen solchen Fortsatz beim Menschen wird lediglich durch die für den Menschen adaptirte hypothetische Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, durch einseitige Verwachsung eines atypischen Fontanellknochens mit der letzteren, nahe gelegt. Das ist sicher, dass diese Erklärungshypothese augenscheinlich für die Affen und die anderen Säugethiere, welche Processus frontalis squamae besitzen, nicht passt. Für den Menschen bietet die geläufige Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes doch nur dadurch eine grössere Wahrscheinlichkeit, weil in der menschlichen

[1]) l. c. — vergl. auch l. c. S. 326.

[2]) cf. auch oben S. 244, W. Krause.

Schläfenfontanelle in so beträchtlicher Anzahl und in so wechselnden Formen Schaltknochen vorkommen. Je häufiger solche sind, desto leichter könnte ja, so hat man geschlossen, eine zufällige einseitige Verwachsung mit der Schuppe des Schläfenbeins eintreten.

Aber bei den Affen gehören Fontanellknochen in der Schläfenfontanelle zu den allerseltensten Vorkommnissen und sind speziell weit seltener als die Stirnfortsätze der Schläfenschuppe.

Unter den Orangutanschädeln der Selenka'schen Sammlung, welche eine Prüfung dieser Verhältnisse zuliessen, zählte ich:

1. Unter 226 Orangutan-Schädeln:

Schädel mit Processus frontalis squamae	76 =	100
Schädel mit temporalen Fontanellknochen	3 =	4 %

Ganz anders zeigen sich die entsprechenden Verhältnisse an Menschenschädeln. Ich zählte

2. Unter 2421 Menschen-Schädeln,
(Schädel der altbayerischen Landbevölkerung):

Schädel mit Processus frontalis squamae	43 =	100
Schädel mit temporalen Fontanellknochen	251 =	581 %

Von diesen 251 Menschenschädeln mit temporalen Fontanellknochen zeigten 123 auf einer oder auf beiden Seiten vollkommen trennende, die Ala magna von der Berührung mit dem Seitenwandbein abschneidende Schaltknochen; fast gleich viele, nämlich 128, hatten unvollständig trennende Schaltknochen d. h. solche, welche entweder das Stirnbein nicht erreichen (Os epiptericum posterius) oder die Schuppe nicht erreichen (Os epiptericum anterius). Beide Formen sind als, dann gemeinschaftlich vollkommen trennende, Fontanellknochen, nicht selten gleichzeitig vorhanden; der sonst einheitliche Fontanellknochen erscheint in solchen Fällen durch eine Mittelnaht in einen vorderen und einen hinteren Abschnitt getrennt.

Digitized by Google

Ganz ähnlich wie bei Europäern ist das Verhältniss der Schläfenfontanellknochen bei anderen Menschenrassen, auch bei den Australiern, (s. R. Virchow l. c.).

Von den 3 Orangutan-Schädeln, an welchen ich temporale Fontanellknochen fand, zeigt einer beiderseits vollkommen trennende Schaltknochen (Nr. 129 ♂). Der zweite (Nr. 231 ♀) hat rechts normale Schläfen, links wird das Seitenwandbein von der Ala magna durch zwei Schaltknochen vollkommen abgetrennt, durch ein kleineres Os epiptericum anterius und ein grösseres Os epiptericum posterius. Bei dem dritten Schädel (Nr. 287 ♂) finden sich links und rechts Stirnfortsätze der Schläfenschuppe, rechts neben einem solchen Stirnfortsatz noch ein Schläfenfontanellknochen.

Nach diesen Erfahrungen kann an die Hyrtl'sche Hypothese für die Erklärung der Entstehung der Stirnfortsätze der Schläfenschuppe für die Affen, speziell für Orangutan, der sich ja sonst in den fraglichen Beziehungen relativ menschenähnlich verhält, nicht mehr gedacht werden, da ja der Schläfenfontanellknochen bei ihnen eine weit seltenere Erscheinung ist als der Stirnfortsatz.

Noch weniger möglich ist das für die übrigen oben genannten Säugethiere, bei welchen der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe als eine regelmässig auftretende Baueinrichtung des Schädels erscheint. Bei den betreffenden Thieren waren an normalen Schädeln, so viel mir bekannt, bis jetzt überhaupt Fontanellknochen der Schläfenfontanelle noch niemals beobachtet worden.

In neuester Zeit habe ich jedoch einen hierher gehörenden Fall thatsächlich gesehen. Bei dem Schädel eines Sciurus caucasicus, bei welchem einseitig ein wohlbegrenzter, annähernd viereckiger Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bestand, zeigte sich auf der anderen Schädelseite anscheinend die gleiche Bildung, jedoch war der „Stirnfortsatz" an seiner Grenze gegen die Schläfenschuppe durch eine Naht vollkommen abgetrennt. Dadurch entsteht „eine Art von Fontanellknochen", welcher in diesem Fall zweifelsohne für den Stirnfortsatz vicarirt.

Derartige Beobachtungen, welche auch an Menschenschädeln gelegentlich entgegentreten, mahnen an den Satz des Herrn Virchow, welchen er als Schlussergebniss seiner bezüglichen Untersuchung formulirte:[1])

Die temporalen Schaltknochen sind verwandte, aber nicht gleichartige Bildungen, wie der Stirnfortsatz."

Unsere neuen Beobachtungen gestatten es, diesen Satz nun näher zu begründen und das verwandtschaftliche Verhältniss zwischen den beiden Bildungen darzulegen.

Die Bildungen, welche uns als Fontanellknochen der Schläfenfontanelle entgegentreten, haben eine verschiedene Entstehung und für den typischen Schädelbau verschiedenen Werth. Es werden unter den gemeinsamen Namen prinzipiell verschiedene Gebilde zusammengefasst. Die einen Schaltknochen der Schläfenfontanelle sind pathologische, atypische Verknöcherungen, die anderen sind **Individualisirungen typischer**, regelmässig entwickelungsgeschichtlich gesondert angelegter, aber normal mit Nachbarknochen zu einem Knochen-Complex verschmolzener **Elementar-Knochen**.

Bisher wurden gewöhnlich nur die ersteren atypischen Formen beachtet. So sagt z. B. Herr Virchow:[2]) „es ist nicht zu übersehen, dass die Fontanellknochen relativ späte Bildungen sind. Wir nennen Fontanellen die zur Zeit der Geburt noch offenen (oder genauer, häutigen) Stellen am Schädel, und wir denken uns daher unter dem Namen von Fontanellknochen solche knöcherne Gebilde, welche in der Regel erst nach der Geburt in diesen offenen Stellen entstehen." Diese hier von Herrn Virchow genauer beschriebenen „Fontanellknochen" sind solche, welche soeben als atypische, pathologische Bildungen in der Schläfenfontanelle bezeichnet worden sind.

Von diesen müssen, wie oben angedeutet, jene viel selte-

---

[1]) l. c. S. 59.

[2]) l. c. S. 47.

neren, aber auch in der Schläfengegend gelegene, Schaltknochen getrennt werden, welche aus typischen Verknöcherungspunkten des Schädels sich entwickeln, und welche gewöhnlich schon in sehr früher Zeit, meist schon vor dem vierten Fötalmonat, mit grösseren Nachbarknochen verschmelzen. In manchen Fällen tritt jedoch diese normale Verschmelzung mit dem betreffenden Hauptknochen nicht ein, sodass aus solchen typischen Knochenpunkten individualisirte Knochen entstehen, ebenfalls ringsum durch Nähte von den Nachbarknochen getrennt.

Die in der Schläfenfontanelle zusammenstossenden Knochen zeigen an der Grenze der Fontanelle zwei solche typische, normal mit grösseren Nachbarknochen verschmelzende, Verknöcherungscentren, von welchen der eine schon seit längerer Zeit bekannt und näher beschrieben ist.

Das Stirnbein hat in der Schläfengegend je ein solches besonderes Ossifikations-Centrum, welches gesondert von den übrigen Theilen dieses grossen Knochens entsteht. Herr Virchow hat[1]) auf diesen unteren Knochenkern des Stirnbeins hingewiesen. Derselbe wurde zuerst von Serres, dann genauer von den Herren Rambaud und Renault sowie von Herrn von Ihering[2]) beschrieben und als Apophysis orbitaria externa, als Postfrontale oder Frontale posterius bezeichnet. Dieser Knochentheil liegt dicht an und vor der Schläfenfontanelle, nach rückwärts von dem Processus zygomaticus des Stirnbeins und obwohl seine Verschmelzung mit dem Mittelstück des Stirnbeins schon sehr früh beginnt, und im dritten oder vierten Monat des Fötallebens grossentheils vollzogen ist, so finden sich Spuren seiner Trennung doch nicht ganz selten noch bei Neugeborenen. Herr R. Virchow bildet einen sehr characteristischen Fall der Art in der oft genannten Abhandlung ab,[3]) bei welchem sich der betreffende sonst mit dem Stirnbein verschmelzende Elementarknochen vollkommen individualisirt, rings durch Nähte getrennt, zeigt.

[1]) l. c. S. 42 f.

[2]) Reichert und du Bois-Reymont, Archiv f. Anatomie 1872. S. 649.

[3]) l. c. S. 43; Tafel III. Fig. 6.

An Schädeln aus dem dritten und dem Anfang des vierten Embryonalmonats ist die Trennung noch eine vollkommene und ich habe dieselbe mehrfach constatirt.

Eine vollkommene Trennung bei älteren Schädeln habe ich aber bisher noch nicht gesehen. Im Uebrigen kann ich jedoch die Angaben des Herrn von Ihering und R. Virchow bestätigen. Unter 162 Schädeln von menschlichen Embryonen und Neugeborenen, vom dritten Embryonal-Monat durch alle Monate bis zur normalen Geburt, welche ich auf dieses Verhältniss geprüft habe, vermisste ich nur an sieben (jüngeren) Schädeln deutlichere Spuren der Abtrennung der Apophysis orbitaria externa (Postfrontale), bei allen übrigen waren diese Spuren unverkennbar und drei Schädel aus dem 9. und 10. Monat zeigten die von von Ihering beschriebenen offenen Nahtreste annähernd senkrecht auf den unteren Verlauf der Kranznaht in das Stirnbein gegen die Augenhöhle zu einspringend.[1])

Dieses untere hintere selbständige Verknöcherungs-Centrum des Stirnbeins kann, da es jederseits im Stirnbein selbst, nicht in der Fontanelle, liegt, zur Entstehung eines Stirnfortsatzes des Schläfenbeins oder eines Schläfenfortsatzes des Stirnbeins keine Veranlassung geben, ein Verhältniss, welches die beigegebenen Abbildungen (Fig. 4—12) direkt deutlich machen.

Ein ähnlicher typischer Knochenkern findet sich an dem Schläfenfontanellrand der Schuppe des Schläfenbeins nicht.

Dagegen haben es schon ältere Beobachtungen, vor allem die Hannover's,[2]) wahrscheinlich gemacht, dass der grosse Keilbeinflügel ein oberes Ergänzungsstück besitzt, welches als Deckknochen, Hautknochen, entsteht, während sich bekanntlich der grosse Keilbeinflügel seiner Hauptausdehnung nach aus knorpeliger Anlage als Primordialknochen entwickelt.

---

[1]) S. die folgenden Abbildungen von Schädeln von Neugeborenen und Embryonen Fig. 5—12, bei letzterer offner Nathrest.

[2]) Primordialbrusken og dens forbening, Det kgl danske vidensk. selskab Skrifter. Naturw. mathem. Afdel. 11. Band. Kopenhagen. 1888. citirt nach Graf Spee l. c.

Digitized by Google

Meine Beobachtungen erheben diese Vermuthung[1]) zur Gewissheit: wir haben ein Hauptknochen-Ergänzungsstück an dem oberen Ende der Ala magna von dem durch primordiale Verknöcherung entstandenen Haupttheile zu unterscheiden.

Dieses Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna, welches man nicht, wie vielfach geschehen, mit den atypischen Formen der Schläfenfontanellknochen verwechseln und zusammen werfen darf, hat genetisch als Deckknochen mit der, dem knorpelig vorgebildeten Schädelskelet als Primordialknochen zugehörenden, Ala magna nichts zu thun. Die Ala magna zeigt sich, wie das Hinterhauptsbein und das Schläfenbein, als ein Complex principiell differenter Skelettheile, welche sich auf verschiedene Weise und sonach anfänglich gesondert bilden.

Eine ganz ähnliche Bildung, wie das Deckknochen-Ergänzungsstück der Ala magna ist bekanntlich das Interparietale der Säuger. Das Interparietale erscheint als Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale posterius, welche zusammen beim Menschen die Schuppe des Hinterhauptsbeines bilden.

Hier sind auch die Schicksale, welche diese beiden zu einem Knochenkomplex verschmolzenen differenten Elementarbestandtheile des Skelets erfahren können, festgestellt. Es ist bekannt, dass sie im Ganzen vollkommen oder theilweise von einander getrennt bleiben können, sodass eine, beide Elementarknochen — das Interparietale und das Occipitale superius — trennende Quernaht, die fötale Hinterhauptsquernaht, (Sutura occipitalis transversa fötalis R. Virchow) während des erwachsenen Lebens persistirt. Besonders bemerkenswerth erscheint es aber, dass sich das Interparietale, welches als Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale superius beim Menschen und den meisten Säugethieren, wenn es nicht dauernd individualisirt bleibt, mit dem Oberrand des Occipitale superius

[1]) Graf Spee, l. c. S. 142, citirt nach Hannover (s. S. 141): „Von der Ala magna (Alisphenoid) werden wahrscheinlich auch die oberen Theile des Randes zwischen Frontale, Parietale und Squama als Deckknochen ausgebildet". S. auch l. c. S. 282 und S. 326.

verwächst und mit seinen Aussenrändern den Haupttheil der Lambdanaht bildet, bei einer ganzen Anzahl von Säugethieren nicht mit dem letzteren Knochen sondern mit den Parietalia verbindet. Es bleibt dann die fötale Naht zwischen Interparietale und Occipitale superius dauernd offen, während die Grenznaht (Lambda-Naht) zwischen dem Interparietale und den Parietalia (resp. dem vereinigten Parietale) so vollkommen verschwinden, dass bei Erwachsenen keine Spur mehr auf die ehemalige Trennung hindeutet. Sehr charakteristisch zeigt sich dieses Verhältniss an Hirsch-Schädeln. Bei solchen zeigen auch noch ältere Embryonen und ganz junge Thiere das Interparietale, ähnlich in der Form wie das des Menschen, rings von Nähten gegen die Nachbarknochen abgegrenzt. Bei etwas älteren Schädeln sind die oberen Grenznähte gegen das Parietale verstrichen und eine gerade quere Grenznaht (die fötale Hinterhauptsquernaht) scheidet scheinbar die Parietalia, in Wahrheit das Interparietale, vom Hinterhauptsbein.

Nach den Angaben der vergleichenden Anatomie[1]) findet sich die Verwachsung des Interparietale mit den Parietalia bei Nagern und Wiederkäuern. Es ist leicht diese Beobachtungen zu bestätigen, ich möchte aber daran erinnern, dass, wie mehrfach schon constatirt, bei manchen Nagern, auch an Schädeln von erwachsenen Thieren, das Interparietale unverbunden, frei, durch Nähte vollkommen getrennt, zwischen den Parietalia und dem Occipitale superius zu liegen pflegt. Es gilt das z. B. für Castor fiber, bei welchem mir drei Schädel ein freies, individualisirtes Interparietale zeigten. Gelegentlich scheint bei derselben Säuger-Gruppe doch auch eine Verwachsung des Interparietale mit dem Occipitale superius vorzukommen, wie es, wie gesagt, für den Menschen und die Mehrzahl der Säuger typisch ist.

Nach meinen Beobachtungen kann das Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna in Bezieh-

---

[1]) C. Gegenbauer, Grundriss der vergleichenden Anatomie. II. Aufl. 1878. S. 488, 489.

ung auf seine Verbindung mit Nachbarknochen ganz ähnliche Schicksale, wie das Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale superius, das Interparietale, erfahren.

Es ist doch wohl zweckmässig, das Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna — entsprechend der Benennung des Interparietale — auch mit einem eigenen Namen zu bezeichnen, da die Bezeichnungen: Fontanellknochen der Schläfenfontanelle, temporaler Schaltknochen, Os epiptericum schon für die atypischen Formen festgelegt sind. Ich schlage für den neu gefundenen typischen Elementarknochen den indifferenten Namen Os Intertemporale oder Intertemporale vor. Diese Bezeichnung hat einerseits den Vortheil, über den vergleichend-anatomischen Werth, dieses elementaren Hautknochengebildes Nichts zu präjudiciren, anderseits erinnert sie an den Namen des, wie gesagt, nächst verwandten Hautknochens, das Interparietale.

Das Intertemporale verbindet sich beim Menschen in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle so vollkommen mit dem oberen Ende der Ala magna, deren obere Partie es dann bildet, dass kein Rest einer Trennungsnaht beobachtet werden kann.

Bei voller Ausbildung erscheint dann der obere Theil der Ala magna im Ganzen und namentlich nach hinten gegen die Schläfenschuppe verbreitert, woraus die bekannte Flügelform beim Menschenschädel entsteht. Die ganze Ala magna ist dabei auch relativ lang und überhaupt wohl ausgebildet. (Fig. 3.)

Ebenso wie das Interparietale vollkommen individualisirt und durch Grenznähte gegen die Nachbarknochen abgegliedert sein kann, so kann sich auch das Intertemporale durch eine vollkommen trennende Quernaht von der übrigen Ala magna abgliedern. Ein solcher Fall ist der oben an einem Schädel von Sciurus caucasicus beschriebene scheinbare Schläfenfontanellknochen, welcher für einen Stirnfortsatz der anderen Schädelseite vikarirt.

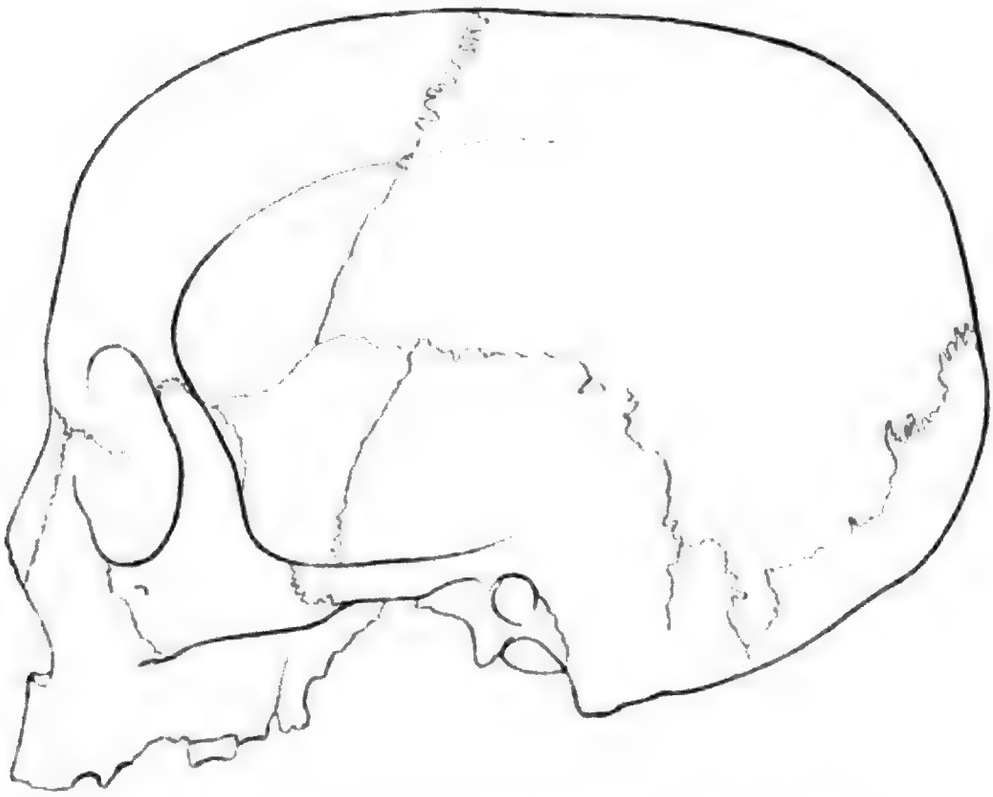
An Menschen-Schädeln ist entwickelungsgeschichtlich das

Digitized by Google

Verhalten der beiden betreffenden Abschnitte des grossen Keilbeinflügels: das aus primordialer Verknöcherung hervorgehende Hauptstück zu dem Hautknochen-Ergänzungsstück, Intertemporale, nicht schwer zu konstatiren. Ich habe 200 Embryonen-Schädel, vom 3. Monat bis zum Geburtsalter, darauf untersucht.

An macerirten Schädeln von Embryonen aus dem vierten Monat sitzt das Hautknochenergänzungsstück auf der schmalen,

Fig. 3.

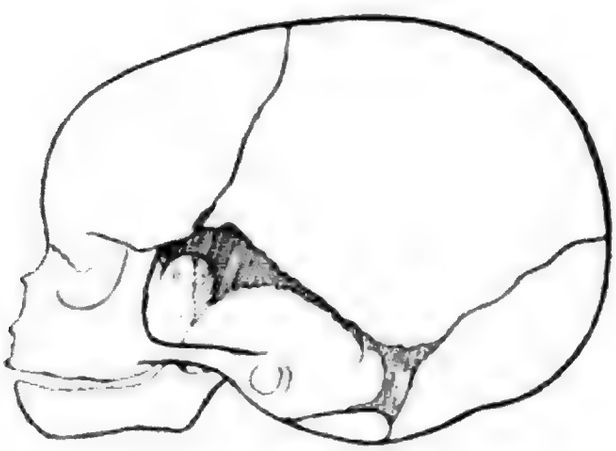


Gut ausgebildete Schläfengegend bei einem Neger-Schädel (Parc).

nach oben sich zuspitzenden, durch primäre Knorpelverknöcherung entstandenen Ala magna wie eine Haube schief auf, wobei sich das lockere Gefüge der Hautverknöcherung, wie das gelegentlich auch noch bei älteren Früchten (Fig. 4) zu sehen ist, scharf von dem dichteren Gefüge der eigentlichen Ala magna unterscheidet. In der Richtung gegen die Schläfenbeinschuppe ist die Hautverknöcherung etwas breiter und greift tiefer nach abwärts. So innig in dieser Periode beide Bestandtheile der

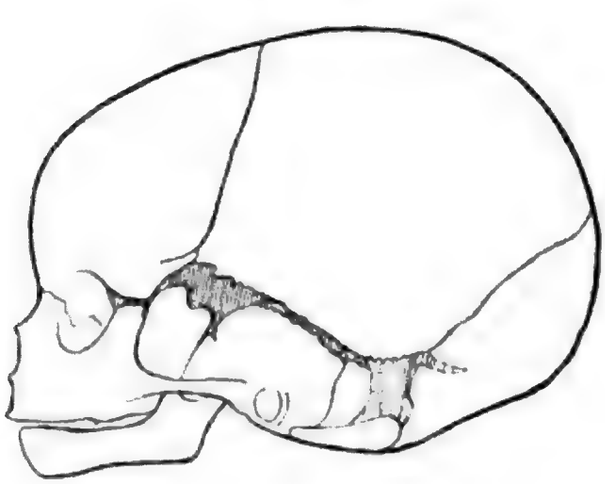
Ala magna schon verschmolzen zu sein pflegen, so findet man doch Fälle, wie der in Fig. 4 abgebildete, welche die Trennung nach erkennen lassen, die beiden Abschnitte greifen in einer feinen Zackenlinie in einander ein.

Fig. 4.



Reste und Spuren einer Trennungsnaht sind bei jüngeren und älteren Embryonen häufig genug, die nebenstehenden Abbildungen (Fig. 5 – 8) geben einige Beispiele. Der Oberrand der Ala magna erscheint manchmal zweilappig, durch einen seichten Einschnitt getrennt. Fig. 5.

Fig. 5.



In anderen Fällen geht eine tiefe Spalte, manchmal fast senkrecht, in dem grossen Keilbeinflügel vom Oberrand aus nach abwärts Fig. 6 und 7.

Digitized by Google

Besonders charakteristisch sind aber solche Bildungen, in welchen eine Naht schief von oben und vorn nach hinten und

Fig. 6.

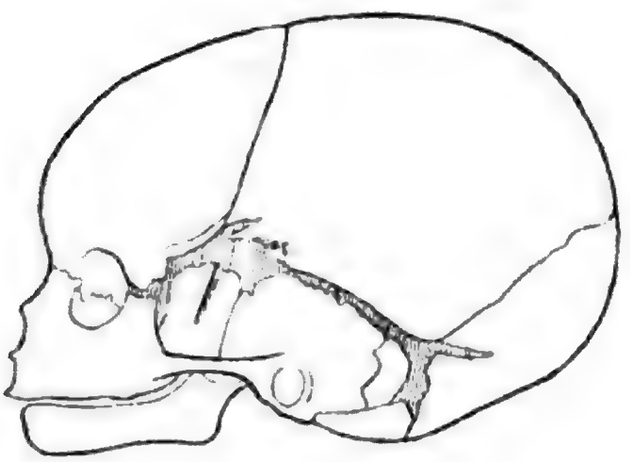
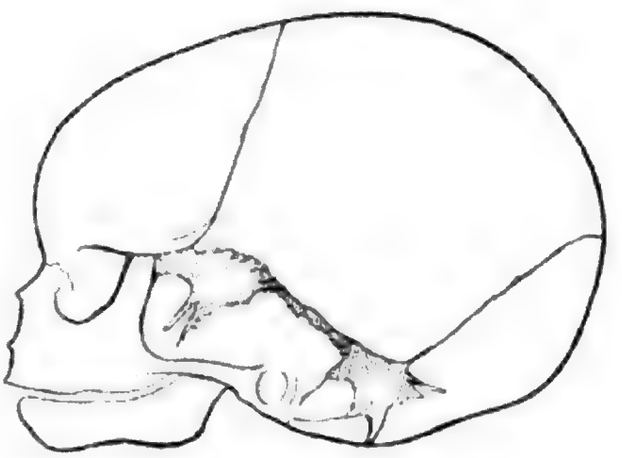
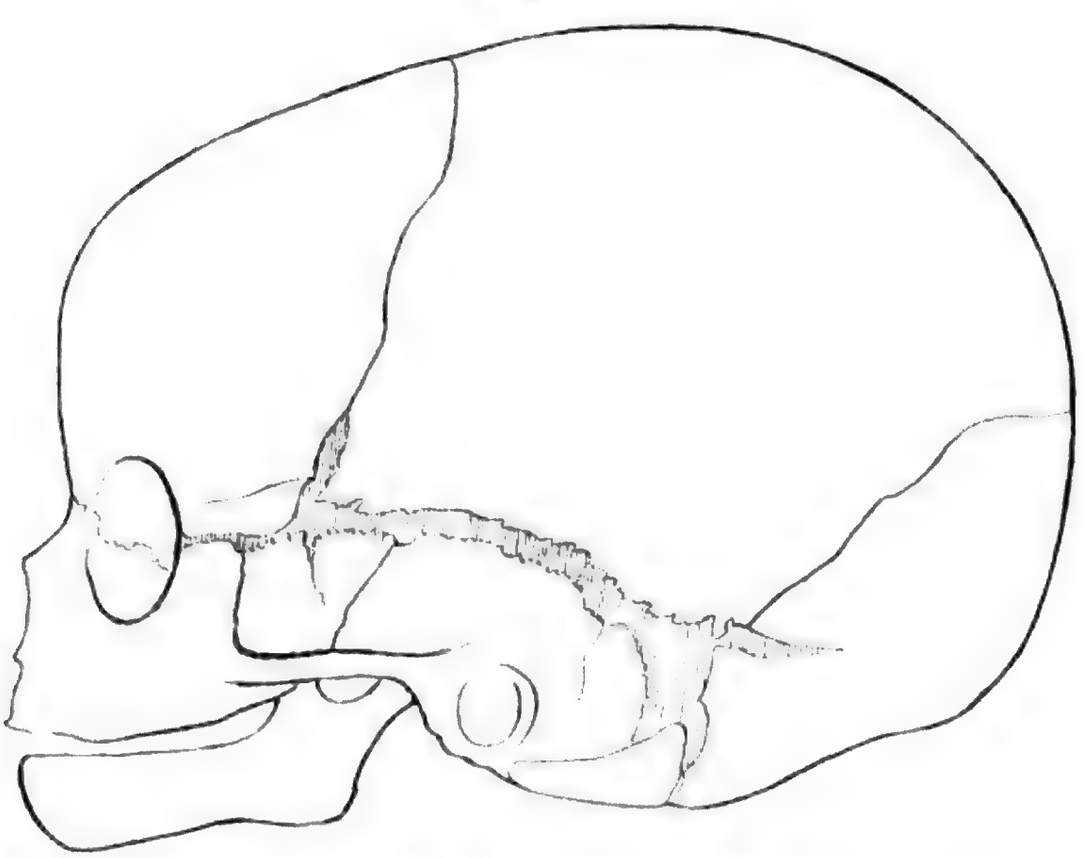


Fig. 7.



unten einspringt und die hintere obere Ecke des Keilbeinflügels mehr oder weniger weit abtrennt wie in Fig. 8.

Fig. 8.

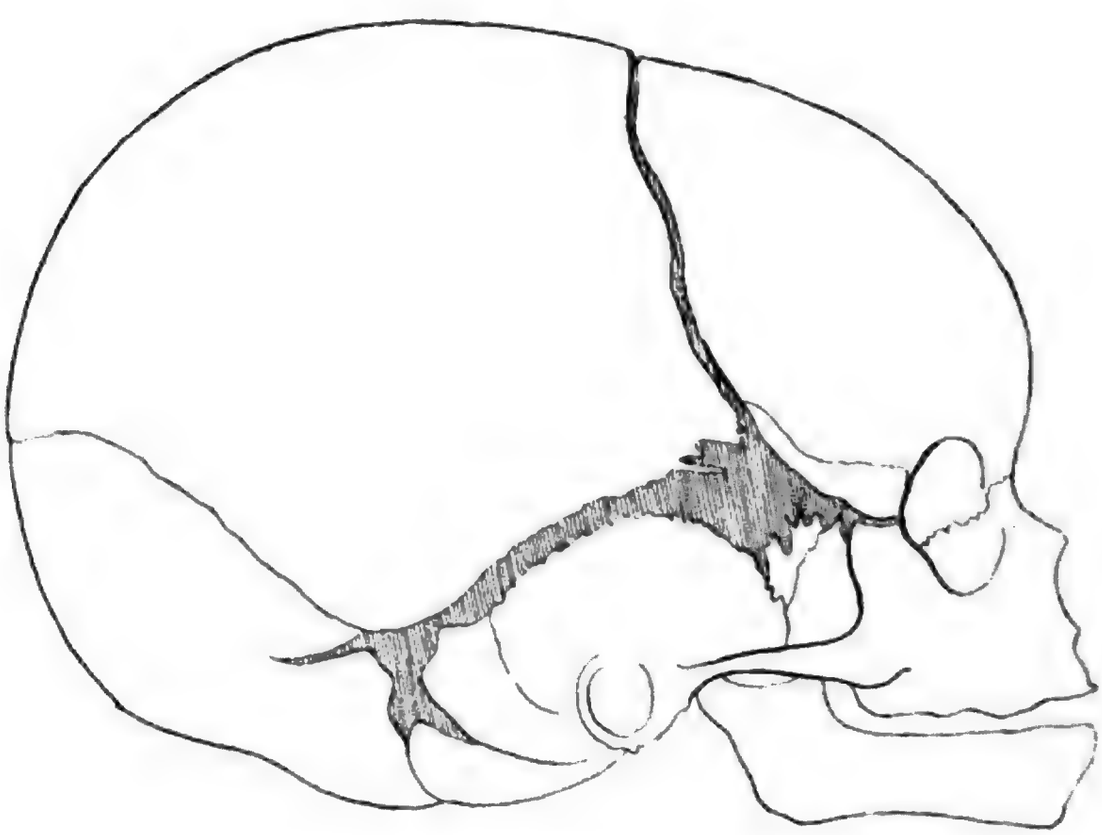


In zwei Fällen ist es mir gelungen, an menschlichen Embryonen-Schädeln aus dem 10. Monate eine vollkommene Ab-

Digitized by Google

trennung der hinteren oberen Spitze der Ala magna resp. des Intertemporale zu constatiren, sodass hier das Intertemporale vollkommen individualisirt erscheint, ganz entsprechend der bekannten Individualisirung des Interparietale. Die von der Ala magna abgetrennten Stücke sind an den menschlichen Embryonen-Schädeln verschieden gross. Bei dem einen Schädel, bei welchem beiderseitig das Intertemporale selbständig besteht (Fig. 9 und Fig. 10), zeigen sich rechts und links be-

Fig. 9.



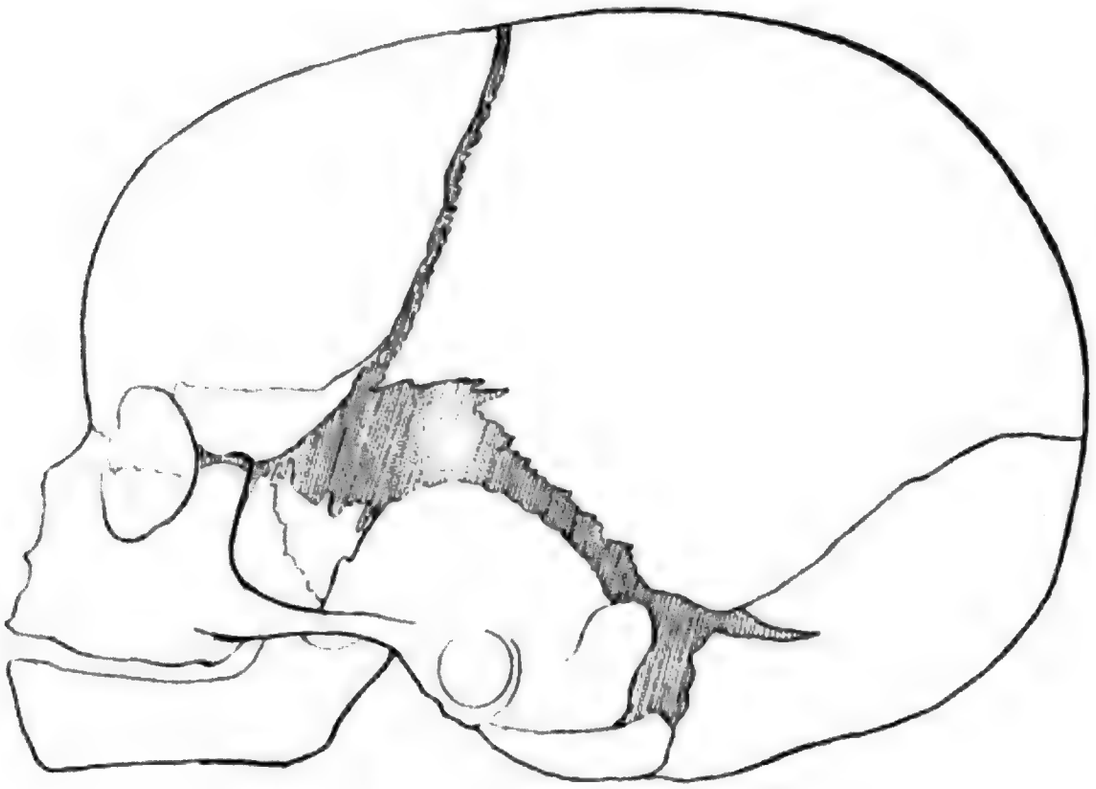
trächtliche Grössenunterschiede desselben: rechts grösste Länge 9—11 mm, grösste Breite 8—9 mm. An dem zweiten Schädel (Fig. 11) findet sich die Abtrennung des Intertemporale nur einseitig (rechts) und im Ganzen etwas kleiner, die Masse sind grösste Länge: 9 mm, grösste Breite: 7 mm.

Wenn ich nicht irre, kann auch durch eine annähernd quer verlaufende Naht der obere Abschnitt der Ala magna, das Intertemporale, von dem unteren Abschnitt abgetrennt werden. In einem derartigen Fall mass das in der rechten

Digitized by Google

Schläfe abgetrennte Stück 12 mm in der Länge und an der Ala magna 5 mm in der Breite, und war annähernd viereckig gestaltet;[1]) an einem zweiten Schädel war das durch eine Quernaht abgetrennte Stück, durch senkrechte Nähte in der einen Schläfe, in zwei, in der anderen in drei Theilstücke zerfallen. Auch eine für die Ränder der Hautknochen in früheren Perioden so charakteristische Auffaserung des Intertemporale kann sich erhalten. (Fig. 12.)

Fig. 10.



Diese in der Gegend der Schläfenfontanelle liegenden, letztere aber in Wahrheit begrenzenden und ihr daher niemals eigentlich angehörenden, typischen Bildungen des Intertemporale sind bisher im Allgemeinen mit den atypischen Fontanellknochen der Schläfenfontanelle zu-

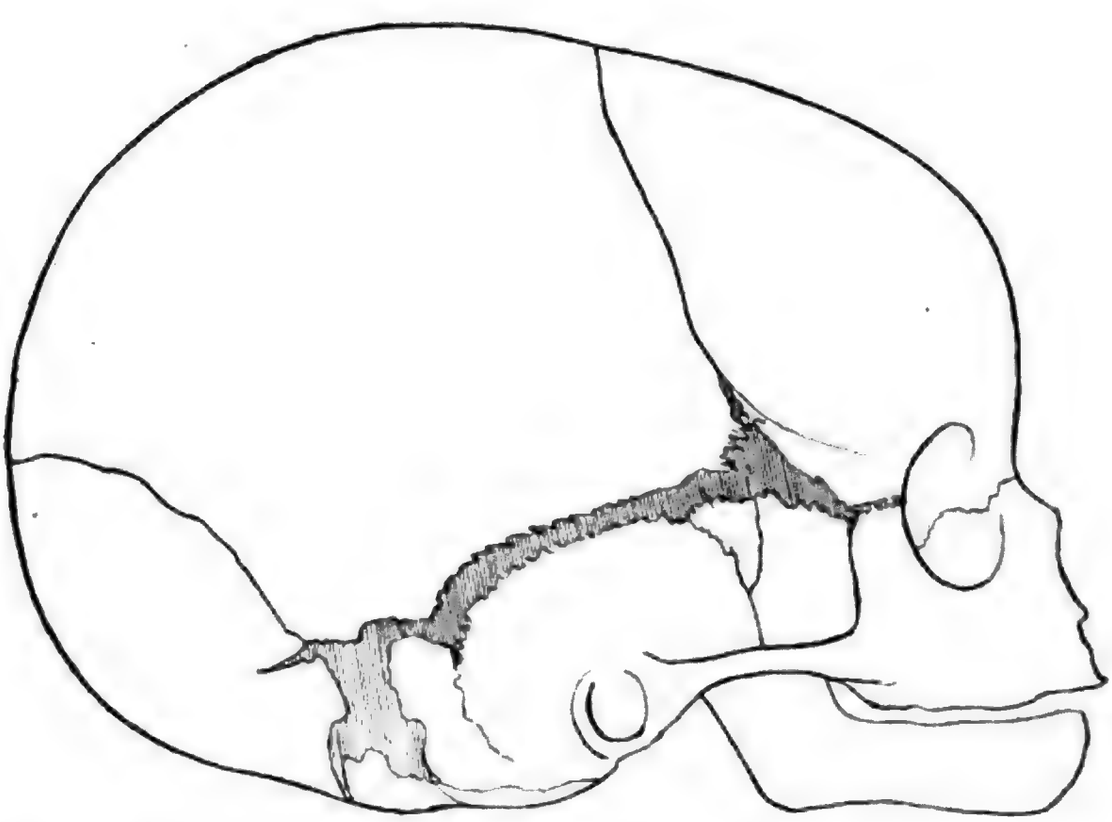
[1]) Die Ala magna ist auf der rechten Seite um 5 mm verkürzt im Verhältniss zur linken Seite, an der sich keine Abspaltung findet. S. unten.

Digitized by Google

sammengeworfen, ihr prinzipieller Unterschied wenigstens nicht genügend hervorgehoben worden. Sie sind aber, was sich schon aus der oben gegebenen Beschreibung der atypischen Fontanellknochen ergibt, meist sicher von letzteren zu trennen.

Die atypischen Fontanellknochen, indem sie sich als neue Formelemente zwischen die vier in der Gegend der Schläfenfontanelle zusammenstossenden Knochen: Stirnbein, Scheitelbein, Schläfenbein und grossen Keilbeinflügel, hinein-

Fig. 11.



legen, beeinträchtigen die volle Ausbreitung aller vier Knochen. Diese Beeinträchtigung ist jedoch, da sie sich, wie gesagt, auf alle Nachbarknochen in ziemlich gleicher Weise bezieht, im Allgemeinen meist eine unbedeutende.

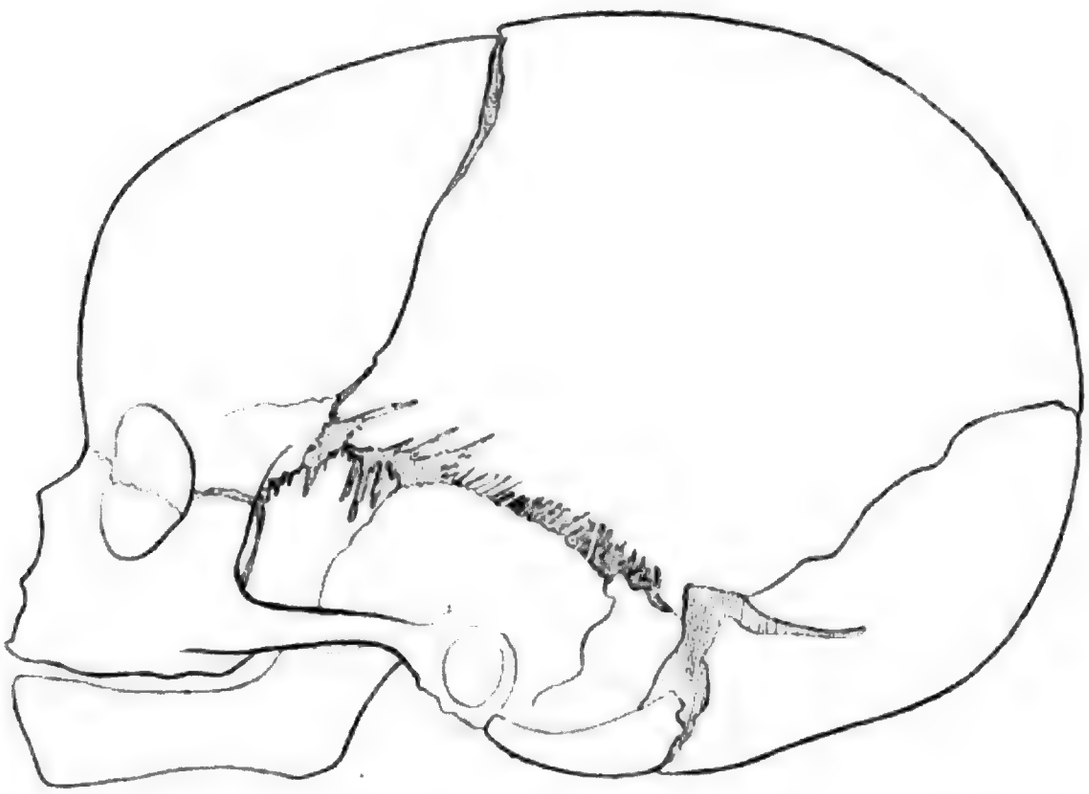
Ganz anders ist das Verhältniss bei dem Intertemporale. Das individualisirte Intertemporale, der Zwischenschläfenknochen, ist gleichsam von dem grossen Keilbeinflügel oben weggeschnitten, nur letzterer wird daher in seiner Ausbildung

Digitized by Google

beeinträchtigt: er wird um das abgetrennte individualisirte oder mit anderen Nachbarknochen verschmolzene Ergänzungsstück verkürzt.

Für den Nachweis dieser Verkürzung bieten die Orangutan-Schädel der Selenka'schen Sammlung ein vortreffliches Material. Unter ihnen findet sich, wie oben gesagt, eine nicht unbeträchtliche Anzahl solcher, welche nur auf der einen Schädelhälfte einen Stirnfortsatz besitzen, während die andere Schläfe davon frei ist. Bei solchen Schädeln mit ein-

Fig. 12.



seitigem Stirnfortsatz kann man sonach an demselben Individuum die verschiedene Höhe der Ala magna mit und ohne Stirnfortsatz der Schläfenschuppe messen.

In der folgenden Tabelle habe ich die Messungs-Ergebnisse an zehn solcher Schädel zusammengestellt.

Digitized by Google

Tabelle

über die Höhe der Ala magna bei 10 Orangutanschädeln mit einseitigem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe.

Bezeichnung der Schädel:	Höhe der Ala magna in den Schläfen mit Stirnfortsatz:	Höhe der Ala magna in den Schläfen ohne Stirnfortsatz:	Differenz:
1. Nr. 83 ♀	23 mm	28 mm	+ 5 mm
2. „ 207 ♂	22 „	28 „	+ 6 „
3. „ 119 ♀	20 „	23 „	+ 3 „
4. „ 109 ♀	22 „	31 „	+ 9 „
5. „ 115 ♀	20 „	30 „	+ 10 „
6. „ 140 ♀	22 „	25 „	+ 3 „
7. „ 40 ♂	21 „	31 „	+ 10 „
8. „ 247 ♀	22 „	26 „	+ 4 „
9. „ 200 ♂	26 „	33 „	+ 7 „
10. „ 179 ♂	23 „	33 „	+ 10 „
10 Schädel	22,1 mm :	28,8 mm	= + 6,7 mm.

Die Ala magna ist danach im Durchschnitt um $^1/_4$ verkürzt auf der Seite des Stirnfortsatzes.

Da das Intertemporale die obere flügelförmige Verbreiterung der Ala magna bildet, wird durch seine Abgliederung letztere nicht nur verkürzt, sondern auch entsprechend verschmälert. Der obere Rand der Ala magna zeigt sich dann meist nach oben vielfach abgerundet, was an die ursprünglich nach oben sich zuspitzende oder wenigstens verschmälernde Form der primordialen Knochenanlage der Ala magna erinnert.

Speziell soll noch einmal direkt darauf hingewiesen werden, dass das Intertemporale, wie das Interparietale und manche andere typische Elementar-Bestandtheile des Hirnschädels, soweit sie normal zu Knochencomplexen verschmelzen, diese Verschmelzung schon sehr bald, beim Menschen meist schon vor dem 4. Embryonalmonat, erfahren. Im Gegensatz gegen das Verhalten dieser typischen Elementarknochen verwachsen die atypischen Fontanellknochen, welche überhaupt vielfach weit später als erstere entstehen, meist erst im späteren, senilen Lebensalter mit den Nachbarknochen.

Digitized by Google

K. von Bardeleben[1]) hat das Epiptericum als „Postfrontale“ bezeichnet. Abgesehen davon, dass eine solche Bezeichnung nicht für die grosse Mehrzahl der atypischen Fontanellknochen der Schläfe, sondern nur für das Intertemporale in Frage kommen könnte, so ist für die menschliche Anatomie die Bezeichnung „Postfrontale“ schon für das oben Beschriebene Apophysis orbitaria externa durch von Ihering[2]) belegt. Die vergleichend-anatomische Würdigung der betreffenden Elementarknochen des Menschenschädels kann nur im Zusammenhang der Betrachtung aller entsprechenden Bildungen erfolgen.

Resultate.

Wie das Interparietale, welches beim Menschen und der Mehrzahl aller Säuger gesetzmässig mit dem Oberrand des Occipitale verschmilzt, doch bei einigen Säugergruppen (Nagethiere und Wiederkäuer) sich nicht mit dem Occipitale superius sondern mit den Parietalia zu einem, für diese Thiere auch typischen und gesetzmässigen Knochen-Komplex verbindet, so kann sich auch das Intertemporale, anstatt mit dem oberen Theil der Ala magna, mit einem der anderen Nachbarknochen zu einem Knochenkomplex vereinigen.

Bei dem Menschen findet eine solche Vereinigung in seltenen Fällen

1. mit dem vorderen oberen Rand der Schläfenschuppe statt: daraus entsteht der

Stirnfortsatz der Schläfenschuppe,

der Processus frontalis squamae temporis.

2. mit dem unteren hinteren Winkel des Stirnbeins, daraus entsteht der von mir entdeckte

Schläfenfortsatz des Stirnbeins,

der Processus temporalis ossis frontis.

---

[1]) K. von Bardeleben, Anatomischer Anzeiger. Bd. XII. 1896. Ergänz.-Heft S. 153—154.

[2]) v. Ihering l. c. und oben S. 255.

Digitized by Google

3. Eine Verwachsung des Intertemporale mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins habe ich beim Menschen bisher noch nicht sicher nachweisen können.

4. Ganz ähnlich wie bei dem Menschen sind die typischen Verwachsungsverhältnisse des Intertemporale bei der Mehrzahl der Affen.

Auch bei diesen, so namentlich bei Orangutan und Hylobates, ist die Verschmelzung des Intertemporale mit dem oberen Ende der Ala magna das Gewöhnliche.

Daneben findet sich aber gelegentlich bei diesen Menschenaffen, und zwar bei Hylobates kaum häufiger als bei dem Menschen, auch eine Verschmelzung des Intertemporale mit der Schläfenschuppe zu einem Stirnfortsatz.

Ein Schläfenfortsatz des Stirnbeins ist bei den Affen bisher noch nicht beschrieben.

Dagegen fand ich mehrfach an Orangutanschädeln eine doppelte Verschmelzung des Intertemporale, unten mit der Ala magna, oben mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins, sodass eine zusammenhängende Knochenbrücke zwischen Stirnbein und Schläfenschuppe gebildet wird.

Bei Gorilla und Schimpanse und jenen oben genannten niedrigeren Säugethieren ist der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe das gewöhnliche Vorkommniss. Bei ihnen verschmilzt fast ausnahmslos das Intertemporale nicht mit der Ala magna sondern mit der Schläfenschuppe zur Bildung des Stirnfortsatzes derselben.

Dieses Wechselverhältniss der Verschmelzung mit verschiedenen Nachbarknochen entspricht im Principe jenem oben von dem Interparietale erwähnten.

5. Da das Intertemporale durch Verschmelzung mit der Schläfenschuppe den Stirnfortsatz derselben bildet, so lässt sich bei den Schläfen mit Stirnfortsatz eine entsprechende Verkürzung und Verkümmerung der Ala magna, deren oberes verbreitertes Endstück das Intertemporale sonst bildet, nachweisen.

Digitized by Google

Beschreibung der Abbildungen im Texte.

Figur 1a und b (S. 246 und 247): Männlicher, jugendlicher Schädel aus dem Bismarckarchipel.

Fig. 1a: Rechte Schläfenansicht.

Fig. 1b: Linke Schläfenansicht.

Figur 1a: Schläfenfortsatz des Stirnbeins. Vom Stirnbein springt unten beinahe senkrecht nach hinten gewendet ein breiter Fortsatz vor und verbindet sich mit dem vorderen oberen Rande der Schläfenschuppe. Die Ala magna ist entsprechend verkürzt und von der Berührung mit dem Scheitelbein vollkommen ausgeschlossen.

Figur 1b: Stirnfortsatz der Schläfenschuppe. Von dem vorderen oberen Rand der Schläfenschuppe springt, ganz dem Schläfenfortsatz des Stirnbeins in Figur 1a entsprechend, ein grosser breiter Stirnfortsatz der Schläfenschuppe gegen das Stirnbein vor. Derselbe schliesst ebenfalls die entsprechend verkürzte Ala magna von der Berührung mit dem Scheitelbein aus.

Figur 2a und b (S. 248 und 249): Die Schläfenansicht zweier Schädel, bei welchen gleichzeitig grosse Stirnfortsätze der Schläfenschuppe und Schläfen-Fontanellknochen vorhanden sind.

Figur 2a: Rechte Schläfenansicht eines Schädels vom Bismarckarchipel. Ein breiter an seiner Basis etwas eingezogener Stirnfortsatz des Schläfenbeins erhebt sich von dem vorderen oberen Rande der Schläfenschuppe und trennt die entsprechend verkürzte Ala magna von der Berührung mit dem Scheitelbein ab. Hinter dem Stirnfortsatz zwischen dem Oberrand der Schläfenschuppe und dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins zeigt sich ein länglicher unregelmässig gestalteter Schläfen-Fontanellknochen.

Figur 2b: Schläfenansicht eines Schädels von den Neuhebriden nach R. Virchow. Das Verhältniss entspricht ganz dem vorhin (Fig. 2a) beschriebenen.

Figur 3 (S. 259): Linke Schläfenansicht eines Negerschädels (Pare) mit wohlausgebildetem grossen Keilbeinflügel, dessen Oberrand sich breit vorn an den unteren Rand des Scheitelbeins anlegt.

Figur 4—12. Abbildung von Schädeln von Embryonen und Neugeborenen der Münchener Stadtbevölkerung. Fig. 4—7 Schädel aus dem 5. bis 6. Entwickelungsmonat.

Figur 4 (S. 260): An der nach oben sich verschmälernd und abgerundet zugehenden Ala magna erkennt man noch die Trennung der beiden Abschnitte der letzteren, das Intertemporale zeigt die Hautknochenstruktur und ist durch eine feine Zackenlinie (Fötalnaht) abgegrenzt.

Figur 5 (S. 260): Der Oberrand der Ala magna zeigt hier wie bei Fig. 6, 7 und 8 Spuren der Abtrennung des Intertemporale. Bei Fig. 4 ist der Oberrand des grossen Keilbeinflügels durch einen seichten Einschnitt gleichsam gelappt.

Figur 6 (S. 261): Die Trennungsspalte (Rest der Fötalnaht) schneidet annähernd senkrecht von oben nach unten in den grossen Keilbeinflügel ein und halbirt denselben nahezu.

Figur 7 (S. 261): Die Verlaufsrichtung der Trennungsspalte (Rest der Fötalnaht) geht schief von hinten nach vorn.

Figur 8 (S. 261): Schädel aus dem 10. Entwickelungsmonat. Die Trennungsspalte (Fötalnaht) schneidet von der Mitte des Oberrandes der Ala magna, schief nach unten und hinten gerichtet, tief ein, das Intertemporale fast vollkommen abtrennend.

Figur 9 und 10 (S. 262 und 263): Rechte und linke Schläfenansicht eines Neugeborenen-Schädels mit doppelseitiger vollkommener Abtrennung und Individualisirung des Intertemporale von der übrigen Ala magna. Die offen gebliebene Fötalnaht schneidet wie bei Fig. 8 nahe dem vorderen Rand der Ala magna in diese schief nach unten und hinten ein. Der Rand des dadurch abgetrennten Intertemporale zeigt noch die charakteristische Auffaserung der Hautknochen, das obere Ende der übrigen Ala magna spitzt sich in der charakteristischen Weise zu, wie es der ursprünglichen embryonalen Form der Ala entspricht. Rechts ist das Intertemporale kleiner als links.

Figur 11 (S. 264): Rechte Schläfenansicht eines Schädels aus dem 10. Entwickelungsmonat mit vollkommen abgetrenntem und individualisirtem Intertemporale, die linke Schläfe zeigt keine Trennungsspuren (Fötalnahtreste) des letzteren. Die offen gebliebene fötale Naht zwischen der übrigen Ala magna und dem Intertemporale schneidet nahezu senkrecht ein, etwa der theilweisen Trennung in Abbildung No. 6 S. 261 entsprechend.

Figur 12 (S. 265): Linke Schläfenansicht eines Schädels aus dem 10. Entwickelungsmonat, welcher das Intertemporale ohne Trennungsspur in der für die Hautknochen charakteristischen Weise gleichsam aufgefasert zeigt, ebenso den unteren Scheitelbein-Rand.

In Fig. 5 bis 12 ist durch eine von dem unteren Ende der Kranznaht in das Stirnbein einschneidende Linie die Trennungsspur des Postfrontale vom Stirnbein angedeutet, s. S. 254 und 255.

Digitized by Google

Die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus.

Von **K. Schwarzschild.**

(*Eingelaufen 11. Juni.*)

(Mit Tafel I.)

§ 1. Die Beugungsfigur einer punktförmigen Lichtquelle im idealen, aplanatischen Fernrohr ist unter Benutzung der Theorie der Bessel'schen Funktionen von H. Struve[1]) und ausführlicher von E. v. Lommel[2]) behandelt worden. Nur in einem Punkte erscheinen diese Untersuchungen noch der Ergänzung fähig. Sie beziehen sich nämlich nur auf Einstellungen in ziemlicher Nähe des Focus. Das Interesse des Gegenstandes für den Mathematiker, wie für den Optiker, und die Rücksicht auf die verschiedenen Anwendungen des Fernrohrs, bei welchen Einstellungen weiter ausserhalb des Focus in Betracht kommen, machen es aber wünschenswert, die Theorie auch für letztere Fälle näher auszuführen. Das ist im Folgenden geschehen. Es zeigt sich, dass die Lichtintensität im Beugungsbilde weiter ausserhalb des Focus einer Darstellung durch semikonvergente Reihen fähig ist, auf deren erste Glieder man sich in Praxis beschränken kann. Der anscheinend so verwickelte Verlauf der Lichtintensität längs jedes Radius des kreisförmigen Beugungsbildes stellt sich dann dar als Uebereinanderlagerung

[1]) Die allgemeine Beugungsfigur im Fernrohr. Mémoires de l'Ac. d. Sc. de St. Pétersbourg. 1886.

[2]) Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der bayer. Akad. d. Wissenschaften. 1886.

Digitized by Google

zweier Wellen, welche angenähert die Form von Sinuskurven, aber verschiedene Wellenlänge und Amplitude haben, über diejenige konstante mittlere Intensität, welche bei geradliniger Fortpflanzung des Lichts auftreten würde.

§ 2. Trifft eine ebene Welle, welche von einem unendlich fernen Punkte in der Axe eines fehlerlosen Objektivs kommt, auf dieses auf und wird von ihm gebrochen, so verwandelt sich die ebene Welle in eine kugelförmige, welche zum Centrum den Brennpunkt des Objektivs hat und unmittelbar hinter dem Objektiv über das ganze durchgetretene Bereich der Wellenfläche hin mit gleicher Amplitude schwingt. Aus dem Huyghens'schen Prinzipe erhält man dann für die Lichtintensität J in irgend einem Punkte P hinter dem Objektiv den Ausdruck:

$$J = S^2 + T^2 \qquad 1)$$

wo S und T definiert sind als reeller und imaginärer Teil des Integrals:

$$W = S + iT = \int d\sigma\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(\Delta + \delta)} \qquad 2)$$

Hierin bezeichnet $d\sigma$ ein Element der Wellenfläche, Δ die Distanz des Punktes P von diesem Elemente, λ die Wellenlänge und δ eine beliebige reelle Konstante, die aus dem Werte J der Norm von W offenbar herausfällt. Das Integral ist dabei über sämtliche Elemente der Wellenfläche zu erstrecken.

Nun lege man ein rechtwinkliches Coordinatensystem durch den Brennpunkt, dessen x-Axe in die Axe des Objektivs falle. Die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ der Wellenfläche seien ξ, η, ζ, die des Punktes P seien u, v, 0. Wir dürfen die dritte Coordinate des Punktes P null setzen, weil offenbar die ganze Beugungsfigur zur Objektivaxe symmetrisch ist und durch Rotation der in einem Schnitte durch die Axe erhaltenen Figur um die Axe geliefert wird. Es ist dann:

$$\Delta^2 = (\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + \zeta^2$$

Führt man weiter Polarkoordinaten mit dem Brennpunkt als Pol ein durch die Gleichungen:

$$\xi = f \cos\vartheta \qquad \eta = f \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \zeta = f \sin\vartheta \sin\varphi$$

wobei f die Brennlänge bezeichnet, so erhält man:

$$\Delta^2 = (f-u)^2 + 4fu\sin^2\frac{\vartheta}{2} + v^2 - 4fv\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$$

Setzt man noch:

$$2\sin\frac{\vartheta}{2} = \varrho$$

und entwickelt bis auf Glieder dritter Ordnung in ϱ genau, so folgt[1]):

$$\Delta = f - u + \frac{fu}{2(f-u)}\left\{\varrho^2 - 2\varrho\frac{v}{u}\cos\varphi + \frac{v^2}{uf}\right\} \qquad 3)$$

Das Flächenelement $d\sigma$ hat den Ausdruck:

$$d\sigma = f^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = f^2\varrho\, d\varrho\, d\varphi \qquad 4)$$

Man nenne nun ϑ_1 den halben Oeffnungswinkel des Objektivs und führe die Abkürzungen ein:

$$2\sin\frac{\vartheta_1}{2} = \varrho_1 \quad r = \frac{\varrho}{\varrho_1} \quad p = \frac{v}{u}\frac{1}{\varrho_1} \quad m = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{fu}{f-u}\varrho_1^2 \qquad 5)$$

Durchläuft man die Wellenfläche von der Axe bis zum Rande, so wächst r von 0 bis 1. Die Grösse p andrerseits ist dem Abstande v des Punktes P von der Axe proportional und wird nahezu 1 in der Grenze des geometrischen Schattens der Kugelwelle. Denn man hat an dieser Grenze offenbar:

$$\frac{v}{u} = \sin\vartheta_1$$

mithin:

$$p = \frac{\sin\vartheta_1}{2\sin\frac{\vartheta_1}{2}}$$

ein Ausdruck, der für kleines ϑ_1, ein Objektiv von mässigem Oeffnungswinkel, nahezu den Wert 1 hat. Die Grösse m ist eine Konstante für konstantes u, für jede zur Axe senkrechte

[1]) Darüber, dass die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, vgl. Kirchhoff, Optik pag. 52 und 86, sowie Strehl, Theorie des Fernrohrs (Leipzig 1894), p. 55.

Ebene, also für jedes einzelne Beugungsbild. Um uns einen Ueberblick über ihre Werte zu verschaffen, wollen wir Licht von der Wellenlänge 0.0005 mm und ein Objektiv von 30 cm Durchmesser und 3 m Brennweite zu Grunde legen. Für eine Verschiebung von u Millimetern aus dem Focus wird dann genähert:

$$m = 31.4\, u$$

Beträgt also u nur wenige Millimeter, so wächst m bereits über 100. Derartig grosse Werte von m werden wir im Folgenden voraussetzen.

Wählt man nun noch für die Konstante δ den Wert:

$$\delta = u - f + \frac{v^2}{2u} \qquad 6)$$

und führt die Ausdrücke 3) bis 6) in 2) ein, so erhält man für das auszuführende Integral:

$$W = f^4 \varrho_1^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi$$

Da es hier gleichgültig ist, welche Einheit wir für die Lichtintensität wählen, so dürfen wir W mit einem beliebigen Faktor multiplizieren. Wir nehmen hierfür:

$$\frac{m\,i}{2\pi f^4 \varrho_1^2}$$

und spalten das hiermit multiplizierte W gleich in zwei Teile, indem wir setzen:

$$W = W_1 - W_2 \qquad 7)$$

$$W_1 = \frac{m\,i}{2\pi} \int_0^K \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi$$

$$W_2 = \frac{m\,i}{2\pi} \int_1^K \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi \qquad 8)$$

Dabei soll K eine Konstante bedeuten, welche wir später ins Unendliche wachsend denken wollen.

Digitized by Google

§ 3. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Integral W_1. Fasst man r und φ als Polarkoordinaten eines Punktes in einer Ebene auf, nennt df das Flächenelement dieser Ebene und s die Entfernung des beliebigen Punktes r, φ vom Punkte mit den Coordinaten $r = p$, $\varphi = 0$, so erhält man für W_1 den Ausdruck:

$$W_1 = \frac{m\,i}{2\pi}\int e^{-\frac{im}{2}s^2}\,df$$

und dabei ist das Integral über einen mit dem Radius K um den Nullpunkt beschriebenen Kreis zu erstrecken. Führt man jetzt Polarkoordinaten s, ψ mit dem Punkte p, 0 als Pol ein, die also mit r und φ durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$r^2 = s^2 - 2\,s\,p\cos\psi + p^2 \qquad r\sin\varphi = s\sin\psi$$

so geht das Integral über in:

$$W_1 = \frac{m\,i}{2\pi}\int e^{-\frac{mi}{2}s^2}\,s\,ds\,d\psi$$

und hierbei ist der Grenzkreis der Fläche, über die das Integral zu erstrecken ist, durch die Gleichung:

$$K^2 = s^2 - 2\,s\,p\cos\psi + p^2 \tag{9}$$

bestimmt. In dieser Form lässt sich aber die Integration nach s ausführen:

$$W_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi\,[e^{-\frac{mi}{2}s^2} - 1] = 1 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\psi\,e^{-\frac{mi}{2}s^2} \tag{10}$$

Hierin ist für s^2 der aus 9) folgende Wert einzuführen.

Derselbe ist:

$$s^2 = K^2 + p^2\cos 2\psi + 2p\cos\psi\sqrt{K^2 - p^2\sin^2\psi}$$

oder, wenn q eine für alle grossen Werte von K endliche Grösse bezeichnet:

$$s^2 = K^2 + 2\,p\,K\cos\psi + p^2\cos 2\psi + \frac{q}{K}$$

Digitized by Google

Für das Integral in 10) folgt somit:

$$\int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-\frac{mi}{2}s^2} = e^{-\frac{mi}{2}K^2} \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-\frac{mi}{2}\left(2pK\cos\psi + p^2\cos 2\psi + \frac{q}{K}\right)}$$

Der entstehende Integrand enthält den Faktor:

$$e^{-mipK\cos\psi} = \cos(mpK\cos\psi) - i\sin(mpK\cos\psi)$$

dessen reeller, wie imaginärer Teil mit wachsendem K immer rascher, für immer geringere Aenderungen von ψ, zwischen den Grenzen ± 1 oscilliert. Man beweist unschwer nach bekannten Mustern, dass infolge dieses Umstandes für $\lim K = \infty$ das ganze Integral verschwindet, und erhält dann aus 10):

Für $\lim K = \infty$:

$$W_1 = 1 \qquad 11)$$

§ 4. Um weiter das Integral W_2 auszuführen, erinnere man sich der Integraldarstellung der Bessel'schen Funktion:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\, d\varphi$$

Mit ihrer Hülfe kann man in 8) die Integration nach φ ausführen und erhält, wenn man zugleich K ins Unendliche wachsen lässt:

$$W_2 = mi\int_1^{\infty} e^{-\frac{im}{2}(r^2+p^2)} J_0(mpr)\, r\, dr \qquad 12)$$

Das hier erscheinende Argument der Bessel'schen Funktion mpr wird, da $r > 1$ ist und es sich für uns um grosse Werte von m handelt, gross, so lange nicht p sehr klein ist, so lange es sich nicht um Punkte nahe der Axe, dem Centrum des Beugungsbildes handelt. Man wird daher, von letzterem Fall abgesehen, mit Vorteil von der bekannten semikonvergenten Entwicklung der Bessel'schen Funktion für grosses Argument[1]) Gebrauch machen können, die sich in der Form schreiben lässt:

[1]) Vgl. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 58.

Digitized by Google

$$J_0(x) = \frac{e^{ix - \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} A(x) + \frac{e^{-ix + \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} A(-x)$$

wo $A(x)$ durch die semikonvergente Reihe geliefert wird:

$$A(x) = 1 + \frac{1^2}{1!} \frac{1}{(8ix)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \frac{1}{(8ix)^2} + \ldots \qquad 13)$$

Indem wir das erste Glied dieser Entwicklung von den übrigen abtrennen, schreiben wir:

$$J_0(x) = \frac{e^{ix - \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} + \frac{e^{-ix + \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} + J_0'(x)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in 12) erhält man:

$$W_2 = \frac{m i e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi \cdot mp}} \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr$$
$$+ \frac{m i e^{+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi mp}} \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, dr + m i \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r^2+p^2)} J_0'(mpr) \cdot r\, dr \qquad 14)$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich durch partielle Integration in folgender Art umformen:

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr = \left[- e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{\sqrt{r}}{r-p} \right]_1^\infty$$
$$+ \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{r}}{r-p} \right) \cdot dr \qquad 15)$$

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, dr = \left[- e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \frac{\sqrt{r}}{r+p} \right]_1^\infty$$
$$+ \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{r}}{r+p} \right) dr \qquad 16)$$

Digitized by Google

Die hier rechts auftretenden Integrale sollen mit W_3 und W_4 bezeichnet werden. In W_3 und W_4 würde man eine ähnliche partielle Integration ausführen und so fortfahren können und dabei offenbar jedes Mal von Neuem den Faktor m in den Nenner treten sehen. Ein ähnliches Verfahren liesse sich aber auch auf die aus den folgenden Gliedern der Entwicklung 13) entspringenden Integrale anwenden. Was man so im Ganzen schliesslich erhielte, wäre eine semikonvergente Entwicklung von W_2 nach negativen Potenzen von m. Wir begnügen uns damit, die ersten Glieder dieser Entwicklung explicit aufzustellen und eine Formel für den Rest anzugeben.

Die eben erhaltenen Formeln geben:

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr = \frac{e^{-\frac{i m}{2}(1-p)^2}}{1-p} + W_3$$

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, dr = \frac{e^{-\frac{i m}{2}(1+p)^2}}{1+p} + W_4$$

und, wenn man dies in 14) einsetzt:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} + R \qquad 17)$$

worin R die Summe der drei Integrale ist:

$$R = m i \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r^2+p^2)} J_0'(m p r)\, r\, dr$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{r}}{r-p}\right) dr$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r+p)^2 + \frac{\pi i}{4}} \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{r}}{r+p}\right) dr$$

Eine obere Grenze für diesen Rest R habe ich nun auf folgende Weise gewonnen. Ich habe zunächst ähnlich, wie

Digitized by Google

in 15) und 16), in allen drei Integralen einmal partiell integriert, so dass der Faktor m in den Nenner trat. Ferner habe ich die Maxima und Minima der Integranden aufgesucht und nach den Mittelwertsätzen Grenzen für die Integrale über die dazwischen liegenden Intervalle aufgestellt. Für das erste Integral habe ich dabei von dem Satze Gebrauch gemacht, dass der Modul des Restes der Entwicklung 13) kleiner ist als der Modul des ersten ausgelassenen Gliedes. So fand sich für den Rest R ein Ausdruck von der Form:

$$\text{Mod } R < \frac{K_1}{\sqrt{m^5}} + \frac{K_2}{\sqrt{m^3}} \tag{18}$$

in welchem K_1 und K_2 die nachstehenden Funktionen von p bedeuten:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{27}{64} \frac{1}{p^{5/2}} \frac{1}{1-p^2}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\,p^{3/2}(1+p)^3} + \frac{1-6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\,p^{3/2}(1-p)^3}$$

$$\text{für: } 0 < p < \frac{1}{5+\sqrt{24}}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\,p^{3/2}(1+p)^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(5+\sqrt{24})^{1/2}(4+\sqrt{24})^2} \frac{1}{p^3}$$

$$\text{für: } \frac{1}{5+\sqrt{24}} < p < \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \tag{19}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\,p^{3/2}(1+p)^3} - \frac{1-6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\,p^{3/2}(1-p)^3}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(5+\sqrt{24})^{1/2}(4+\sqrt{24})^2} \frac{1}{p^3}$$

$$\text{für: } \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 < p < 1$$

Die Werte dieser Funktionen sind folgender kleiner Tafel zu entnehmen:

Digitized by Google

p	$\frac{1}{100} K_1$	K_2	p	$\frac{1}{100} K_1$	K_2
0.01	168	199	0.50	0.0	6.4
0.02	29.7	70.3	0.60	0.0	12.5
0.03	10.8	37.9	0.65	0.0	18.5
0.05	3.0	17.3	0.70	0.0	29.5
0.10	0.5	5.3	0.75	0.0	51.1
0.20	0.1	2.1	0.80	0.0	99.9
0.30	0.0	2.7	0.85	0.0	237
0.40	0.0	3.9	0.90	0.0	798

Mit dem aus der Tafel und Gleichung 18) zu entnehmenden maximalen Reste R erhält man nach 17), 11) und 7) für das gesuchte Integral W den einfachen Ausdruck:

$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1-p} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} \qquad \text{A)}$$

§ 5. Die Formel 18) verbunden mit 19) und die Tafel lassen erkennen, dass der Rest R gross wird, sobald sich p der Null oder der 1, dem Centrum oder dem Rande des Beugungsbildes nähert, dass mithin die Formel A) nur für einen mittleren ringförmigen Streifen des Beugungsbildes anwendbar ist, der übrigens bei vorgeschriebener Genauigkeit um so breiter wird, je mehr m wächst. Es soll daher eine andere Darstellung von W abgeleitet werden, welche auch für grösseres p, für Randpunkte brauchbar bleibt.

Man schreibe an Stelle von 15):

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{i m}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr$$

$$= m i \int_1^\infty e^{-\frac{i m}{2}(r-p)^2} (\sqrt{r} - \sqrt{p})\, dr + m i \sqrt{p} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2} dr \qquad 20)$$

Digitized by Google

und integriere nur das erste Integral partiell:

$$m\,i\int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2}(\sqrt{r}-\sqrt{p})\,dr$$

$$= \left[-e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2}\frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{p}}\right]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{p}}\right)dr \qquad 21)$$

Man nenne das hier rechts stehende Integral W_5. Man bemerkt, dass W_5 nicht wie W_3, einen Nenner $r-p$ im Integranden hat, der an dem grossen Werte des obigen Restes R für p in der Nähe von 1 schuld ist. Aus 20) und 21) findet man:

$$m\,i\int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2}\sqrt{r}\,dr = \frac{e^{-\frac{im}{2}(1-p)^2}}{1+\sqrt{p}} + m\,i\sqrt{p}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2}dr + W_5$$

und durch Einsetzen in 14):

$$W_3 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}}\,\frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2+\frac{\pi i}{4}}}{1+p} + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}}\,\frac{e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2-\frac{\pi i}{4}}}{1+\sqrt{p}}$$
$$+ i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr + R' \qquad 22)$$

wobei sich R' von R dadurch unterscheidet, dass W_5 an Stelle von W_3 tritt. Für R' habe ich nun ähnliche Ueberlegungen ausgeführt, wie sie oben für R geschildert worden sind, und erhalten:

$$\text{Mod } R' < \frac{K_1'}{\sqrt{m^5}} + \frac{K_2'}{\sqrt{m^3}} \qquad 23)$$

wobei K_1' und K_2' die folgenden Funktionen von p sind:

$$K_1' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{27}{128}\,\frac{1}{p^{5/2}}\,\frac{1}{1+p}$$
$$K_2' = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}}\,\frac{1}{4p}\left\{\frac{9}{16p} + \frac{1+6p-3p^2}{(1+p)^3} + \frac{1+3\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^3}\right\} \qquad 24)$$

Digitized by Google

deren Werte nachstehendem Täfelchen entnommen werden können:

p	K'_1	K'_2	p	K'_1	K'_2
0.10	24.1	24.1	0.70	0.1	0.4
0.20	3.8	5.2	0.80	0.1	0.3
0.30	1.2	2.2	0.90	0.1	0.2
0.40	0.6	1.3	1.00	0.0	0.2
0.50	0.3	0.8	1.10	0.0	0.1
0.60	0.2	0.5	1.20	0.0	0.1

Mit dem aus dieser Tafel und Formel 23) zu entnehmenden maximalen Rest R' erhält man nach 22), 11) und 7) für W den Ausdruck:

$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1+\sqrt{p}}$$
$$- i\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} dr \qquad \text{B)}$$

Dass hier in dem Ausdruck von W für Randpunkte gerade dieses Integral stehen bleibt, entspringt nicht einer Unvollkommenheit unsrer Behandlungsweise, sondern ist eine Notwendigkeit. Denn die Beugungsfigur im idealen Fernrohr ist identisch mit der Beugungsfigur einer kreisförmigen Oeffnung[1]) und zwar einer Oeffnung von um so grösserem Radius, je grösser m ist. Für grosses m wird daher der Rand der kreisförmigen Oeffnung streckenweise nahezu durch einen geradlinigen ersetzt werden können, und es wird als Hauptglied dieses Integral auftreten müssen, welches von 1 abgezogen das für die Beugungserscheinung eines geradlinigen Randes geltende W ergiebt. Letzteres ist z. B. der Abhandlung von E. v. Lommel: „Ueber die Beugungserscheinungen geradlinig

[1]) Vgl. Kirchhoff, Optik p. 83 ff.

Digitized by Google

begrenzter Schirme"[1]) zu entnehmen, in welcher ausserdem Tafeln für das Integral gegeben sind, von denen wir Gebrauch zu machen haben. Um ganz auf die Lommel'sche Form zu kommen, setze man:

$$\frac{m}{2}(r-p)^2 = x \qquad \frac{m}{2}(1-p)^2 = q$$

Läuft r von 1 bis ∞, so läuft x, falls p kleiner als 1 ist, von q bis ∞, falls aber p grösser als 1 ist, zunächst von q nach 0 und erst dann von 0 bis ∞. In Rücksicht auf diese Verschiedenheit folgt:

Für $p < 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx-\frac{i}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx\right\}$$

Für $p > 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx+\frac{i}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx\right\}$$

Mit Hülfe der folgenden Formeln, die man § 34 und 76 der Lommel'schen Abhandlung entnimmt:

$$\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx = \int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx = 1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{1}{2}}[2x]\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{1}{2}}[2x]\cos x$$

[1]) Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften 1886.

$$\frac{1}{2}\int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,V_{\frac{1}{2}}[2x]\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\,V_{\frac{3}{2}}[2x]\sin x$$

ergiebt sich hieraus:

Für $p < 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr$$

$$= e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\left\{\frac{1}{2}\,V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2}\,V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2]\right\}$$

Für $p > 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr$$

$$= 1 - e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\left\{\frac{1}{2}\,V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2}\,V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2]\right\}$$

Die Funktionen $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ sind es, welche mit dem Argumente $m(1-p)^2$ von 0 bis 100 Tafel XXII. der Lommel'schen Abhandlung entnommen werden können.

Führt man diese Ausdrücke nun in B) ein, so erhält man:

Für $p < 1$:

$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}}\,\frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2+\frac{\pi i}{4}}}{1+p}$$

$$- e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\left\{\frac{1}{2}\,V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2}\,V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}\,(1+\sqrt{p})}\right\} \qquad \text{C)}$$

Für $p > 1$:

$$W = -\frac{1}{\sqrt{2\pi m p}}\,\frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2+\frac{\pi i}{4}}}{1+p}$$

$$+ e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\left\{\frac{1}{2}\,V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2}\,V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}}\,\frac{1}{1+\sqrt{p}}\right\} \qquad \text{D)}$$

Digitized by Google

§ 6. Um die Darstellungen A) und C) von W auf dieselbe Form zu bringen und die Norm J von W einfach bilden zu können, setze man:

im Bereiche der Anwendung von Formel A):

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1-p} \qquad k = 0 \qquad L = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+p} \qquad \text{I}$$

im Bereiche der Anwendung der Formeln C) und D):

$$K \cos k = \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+\sqrt{p}}$$

$$K \sin k = \frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}} [m(1-p)^2] \qquad L = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+p} \qquad \text{I}'$$

wobei im Ausdruck von $K \cos k$ für $p < 1$ das positive, für $p > 1$ das negative Zeichen zu nehmen ist.

Dann wird:

Für $p < 1$:

$$W = 1 - K e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - k i - \frac{\pi i}{4}} - L e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}$$

Für $p > 1$:

$$W = \qquad K e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - k i - \frac{\pi i}{4}} - L e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}$$

Die Abtrennung des reellen Teiles S vom imaginären T und die Bildung von $S^2 + T^2$ liefert nun leicht:

Für $p < 1$:

$$\left.\begin{aligned} J = 1 + K^2 + L^2 &- 2 K \cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}\right] \\ &- 2 L \cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right] \\ &+ 2 K L \sin[2 m p - k] \end{aligned}\right\} \text{II}$$

Für $p > 1$:

$$J = K^2 + L^2 - 2 K L \sin[2 m p - k] \qquad \text{II}'$$

Die Formeln I, I′ und II, II′ stellen das Resultat unserer Untersuchung dar. Mit ihrer Hülfe kann für grosses m angenähert J berechnet werden — von dem einen Falle abgesehen, dass p sehr klein ist, dass es sich um Punkte in nächster Nähe des Centrums des Beugungsbildes handelt. In diesem Falle führen aber die bekannten Formeln, welche von H. Struve und Lommel in den eingangs citierten Arbeiten aufgestellt sind, schon bei Beschränkung auf die ersten Glieder zum Ziel:

$$\left.\begin{aligned} P &= J_0(mp) - p^2 J_2(mp) + p^4 J_4(mp) - \dots \\ Q &= p J_1(mp) - p^3 J_3(mp) + p^5 J_5(mp) - \dots \\ J &= 1 + P^2 + Q^2 - 2P\cos\left[\frac{m}{2}(1+p^2)\right] \\ &\qquad - 2Q\sin\left[\frac{m}{2}(1+p^2)\right] \end{aligned}\right\} \text{III}$$

Auch diese Formeln lassen sich in die Gestalt II überführen, wenn man bedenkt, dass für kleines p: $k = 0$ ist und setzt:

$$\left.\begin{aligned} K\cos 2mp &= P\sin\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) - Q\cos\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) \\ L\cos 2mp &= P\sin\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) + Q\cos\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) \end{aligned}\right\} \text{IV}$$

Die Werte der in diesen Formeln auftretenden Funktionen sind den folgenden Tafeln zu entnehmen.

	I.			II.		
p	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+p)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+\sqrt{p})}}$	$m(1-p)^2$	$\frac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}$
0.01	3.95	4.03	3.62	0.00	+0.354	−0.354
0.02	2.77	2.88	2.47	0.01	0.352	0.315
0.03	2.24	2.37	1.96	0.04	0.347	0.281
0.05	1.70	1.88	1.46	0.09	0.341	0.250
0.10	1.15	1.40	0.96	0.2	0.328	0.209
0.20	0.74	1.11	0.62	0.4	0.310	0.167

I.				II.		
p	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+p)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+\sqrt{p})}}$	$m(1-p)^2$	$\frac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}$
0.30	0.56	1.04	0.47	0.6	+0.295	−0.141
0.40	0.45	1.05	0.39	0.8	0.281	0.122
0.50	0.38	1.13	0.33	1	0.270	0.107
0.60	0.32	1.29	0.29	2	0.228	0.066
0.65	0.30	1.41	0.27	3	0.201	0.046
0.70	0.28	1.59	0.26	4	0.181	0.034
0.75	0.26	1.84	0.25	7	0.144	0.018
0.80	0.25	2.23	0.24	10	0.123	0.011
0.85	0.23	2.89	0.23	15	0.102	0.006
0.90	0.22	4.21	0.22	20	0.089	0.004
0.95	0.21	8.19	0.21	40	0.063	0.002
1.00	0.20	∞	0.20	60	0.051	0.001
1.10	0.18		0.19	80	0.045	0.001
1.20	0.17		0.17	100	0.040	0.000
1.30	0.15		0.16			

Tafel II. bildet für die ganzzahligen Argumente einen Auszug aus der Tafel XXII. von Lommel's Abhandlung über die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme, für die kleineren Argumente sind die Werte nach den am selben Orte § 77 angegebenen Formeln berechnet. Tafeln für die Besselschen Funktionen findet man so vielfach, dass ich sie hier nicht zu wiederholen brauche.

§ 7. Bevor wir die Rechnung nach diesen Formeln für einen Fall numerisch durchführen, wollen wir uns an ihrer Hand allgemein den Charakter des Beugungsbildes weit ausserhalb des Focus klar machen.

Nicht einfach zu übersehen ist die Beugungserscheinung in unmittelbarer Nähe des Centrums. Im Centrum selbst, für $p = 0$, hat man in Formel III:

$$J_0 = 1 \qquad P = 1 \qquad Q = 0$$

und hiermit den bekannten Ausdruck:

$$J = 4 \sin^2 \frac{m}{4}$$

Digitized by Google

Es hängt also vom Werte von m ab, ob im Centrum Dunkelheit oder möglicher Weise eine maximale Helligkeit herrscht, und geringe Aenderung der Einstellung führt schon einen Wechsel zwischen diesen Extremen herbei. Um das Centrum lagern sich dann eine Reihe heller und dunkler Ringe, die nach III zu berechnen sind und wesentlich durch das Oscillieren der Funktion $J_0(m\,p)$ bestimmt werden.

Von welcher Grenze an sind nun die Formeln I und II zu verwenden? Da das Auge Helligkeitsdifferenzen unter 1% unter den hier in Betracht kommenden Verhältnissen keinesfalls unterscheiden kann, genügt es, wenn man J auf 0.01 genau berechnet, was erreicht ist, wenn man den Wert von W auf 0.005 richtig bestimmt hat. Man entnimmt den obigen Tafeln und Formeln für die Reste R und R', dass diese Genauigkeit von den Formeln I resp. I′ und II resp. II′ geliefert wird innerhalb der Grenzen:

Formel I und II.

für $m = 100$	von $p = 0.11$	bis $p = 0.44$
300	„ „ $= 0.04$	„ „ $= 0.68$
900	„ „ $= 0.01$	„ „ $= 0.82$

Formel I′, II und II′.

für $m =$ 50	und	$p > 0.35$
100	„	$p > 0.21$
300	„	$p > 0.10$

Man bemerkt weiter, dass, soweit für K und k die Formeln I verwendbar sind, die quadratischen Glieder in II den Nenner m, die linearen Glieder nur den Nenner $\sqrt{m}$ erhalten. Erstere Glieder werden also klein gegen letztere und man erhält für das mittlere Gebiet der Beugungsfigur die Näherungsformel:

$$J = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi m p}}\,\frac{1}{1-p}\cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{V}$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi m p}}\,\frac{1}{1+p}\cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right]$$

Digitized by Google

Aus dieser Formel liest man den Satz ab, der schon in § 1 hervorgehoben wurde: Ueber die mittlere Intensität 1 lagern sich zwei Wellenzüge, deren einzelne Windungen nahezu die Form von Sinuskurven haben.[1]) Denn die Argumente wachsen (ausser für die hier ausgeschlossenen Werte von p in der Nähe von 1 beim ersten Glied) nahezu proportional mit p, die Wellenlänge ist

für die erste Welle — für die zweite Welle

$$\Delta p = \frac{2\pi}{m(1-p)} \qquad \Delta p = \frac{2\pi}{m(1+p)} \tag{25}$$

und die Amplituden ändern sich für das vorausgesetzte grosse m nur wenig innerhalb dieser Wellenlängen. Die Anzahl der Maxima und Minima zwischen $p = 0.1$ und $p = 0.5$ wird

bei der ersten Welle		und	bei der zweiten Welle	
für $m = 100$	9		für $m = 100$	17
$m = 900$	81		$m = 900$	163

Die Amplitude der Schwingungen nimmt von innen nach aussen bei der ersten Welle anfangs ab, dann zu, bei der zweiten ständig ab. Im halben Radius des Beugungsbildes ($p = 0.5$) beträgt sie:

	1. Welle	2. Welle
für $m = 100$:	± 0.23	± 0.08
„ „ 900 :	± 0.08	± 0.03

Für $m = 900$, was einer Verschiebung von 3 cm aus dem Focus bei einem Fernrohr von 30 cm Oeffnung und 3 cm Brennweite entspricht, betragen also die Schwankungen der Intensität um den Mittelwert in der Nähe des halben Radius des Beugungsbildes nur mehr 11%.

Die Erscheinung, die sich aus der Uebereinanderlagerung dieser beiden Wellen von verschiedener Wellenlänge ergiebt, ist sehr verwickelt und wechselt in allen ihren Einzelheiten rasch mit jeder Aenderung von m.

---

[1]) Man überzeugt sich leicht, dass die Intensität 1 diejenige Intensität bedeutet, welche bei geradliniger Ausbreitung der Lichtstrahlen gleichförmig über die ganze extrafokale Lichtscheibe herrschen würde.

Stärkere Schwankungen der Intensität bleiben, auch für beliebig grosses m, am Rande des Beugungsbildes bestehen. Denn es tritt hier — das liess sich, wie erwähnt, voraussehen — dieselbe Erscheinung auf, wie am Rande eines gradlinigen Schirms. Der Wert von L und der Wert des zweiten Gliedes von $K \cos k$ in Formel I' sinkt am Rande des Beugungsbildes ($p = 1$) schon für $m = 100$ auf 0.02. Man erhält also eine sehr genäherte Darstellung der Erscheinung am Rande, wenn man:

$$L = 0$$

$$K \cos k = \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] \qquad K \sin k = \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2]$$

setzt. Hieraus folgt aber durch einfache Umstellungen in II und II':

Für $p < 1$:

$$J = \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] - \cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right] \right\}^2$$
$$+ \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] + \sin\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right] \right\}^2$$

Für $p > 1$:

$$J = \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}} [m(1-p)^2] \right\}^2$$

Diese Ausdrücke stimmen, wenn man $x = m(1-p)^2$ setzt, überein mit den von Lommel a. a. O. § 127 gegebenen und in Tafel XXI. und XXII. tabulierten Ausdrücken für die Beugung an einem gradlinigen Rande. Diesen Tafeln ist folgendes zu entnehmen (was man auch leicht aus den Formeln in Verbindung mit den obigen kleinen Tafeln für $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{1}{2}}$ ableitet).

Am Rande des geometrischen Bildes ($p = 1$) beträgt die Intensität $\frac{1}{4}$ der Durchschnittsintensität 1. Sie sinkt dann nach aussen, in den geometrischen Schatten hinein, beständig und schnell ab. Nach innen hingegen wächst sie und erreicht ein Maximum von 1.37 für:

$$m(1-p)^2 = 4.65 \qquad p = 1 - \frac{2.2}{\sqrt{m}}$$

sinkt dann wieder auf 0.78 für:

$$m(1-p)^2 = 11.0 \qquad p = 1 - \frac{3.3}{\sqrt{m}}$$

um hierauf weitere kleinere Schwankungen auszuführen.

Die ganze Beugungsfigur erscheint demnach umgeben von einem hellen, durch einen relativ dunkeln Zwischenraum abgetrennten Ring, welcher übrigens noch ganz innerhalb der Grenze des geometrischen Bildes zu liegen kommt.

Wir wollen uns schliesslich klar machen, welche scheinbare Breite (vom Objektiv aus gesehen) die hier auftretenden Ringe haben, welcher Winkelwert ihnen entspricht.

Die scheinbare Grösse χ des Radius des geometrischen Bildes ist, wenn v den Abstand eines Randpunktes desselben von der Axe bezeichnet, bestimmt durch:

$$\sin\chi = \frac{v}{f-u}$$

Für einen Punkt im geometrischen Rande war aber in § 2:

$$\frac{v}{u} = \sin\vartheta_1$$

wo ϑ_1 der halbe Oeffnungswinkel des Objektivs ist. Demnach:

$$\sin\chi = \frac{u}{f-u}\sin\vartheta_1$$

Die Einheit der Wellenlängen, wie sie die Gleichungen 25) geben, war der Radius des geometrischen Bildes. Der Winkelwert dieser Grössen ist daher, wenn man Sinus durch Bogen ersetzt:

$$\Delta p \cdot \chi = \frac{2\pi u}{m(f-u)}\,\frac{\sin\vartheta_1}{1-p} \qquad \text{resp. } \Delta p \cdot \chi = \frac{2\pi u}{m(f-u)}\,\frac{\sin\vartheta_1}{1+p}$$

und wenn man den Wert von m nach 5) einführt:

$$\Delta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{f\sin\vartheta_1}\,\frac{\cos^2\frac{\vartheta_1}{2}}{1-p} \qquad \text{resp. } \Delta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{f\sin\vartheta_1}\,\frac{\cos^2\frac{\vartheta_1}{2}}{1+p}$$

Bedenkt man, dass $2f \sin \vartheta_1$ gleich dem Objektivdurchmesser d ist und dass $\cos^2 \frac{\vartheta_1}{2}$ gleich 1 gesetzt werden kann, so erhält man für die scheinbare Breite der Ringe, wie sie in dem mittleren Gebiete der Beugungsfigur auftreten:

$$\Delta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{d} \frac{2}{1-p} \qquad \text{resp. } \Delta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{d} \frac{2}{1+p}$$

d. h. die scheinbare Breite dieser Ringe ist unabhängig von der Grösse der Verschiebung aus dem Focus. Für die oben vorausgesetzten Grössenverhältnisse des Fernrohrs und $p = 0.5$ erhält man:

$$1''.4 \qquad \text{resp. } 0''.5$$

Diese Grössen bedeuten die Breite eines hellen Rings und des auf ihn folgenden dunkeln Rings zusammengenommen, also den Abstand auf einander folgender heller Ringe.

Anders steht es mit den Ringen am Rande der Beugungsfigur. Betrachtet man als Breite des äussersten Rings den Abstand des ersten Minimums $\left(p = 1 - \frac{3.3}{\sqrt{m}}\right)$ vom geometrischen Rande, also die Grösse:

$$b = \frac{3.3}{\sqrt{m}}$$

so ist der Winkelwert dieser Grösse:

$$b\chi = \frac{3.3}{\sqrt{m}} \frac{u}{f-u} \sin \vartheta_1$$

und hierfür erhält man mit Hülfe der Gleichungen 5):

$$b\chi = \frac{3.3}{2\pi} \frac{\sqrt{m} \cdot \lambda}{f \sin \vartheta_1} \cos^2 \frac{\vartheta_1}{2}$$

oder ähnlich, wie oben:

$$b \cdot \chi = 1.1 \sqrt{m} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Die Ringe am Rande der Beugungsfigur nehmen also mit wachsendem m an scheinbarer Breite und hiermit an Deutlichkeit zu.

Digitized by Google

§ 8. Es soll schliesslich die Beugungsfigur für $m = 100$ (3 mm Verschiebung aus dem Focus eines Fernrohrs von 30 cm Oeffnung und 3 m Brennweite) ausgeführt werden. Man sieht an diesem Beispiel am besten, wie sich die drei verschiedenen Darstellungen der Intensität für Centrum, mittleren Ring und Rand des Beugungsbildes ablösen und wie sich die Grössenordnung der einzelnen Glieder dieser Ausdrücke zu einander verhält.

Es wurden zunächst K, k und L von $p = 0.1$ bis $p = 0.5$ (vgl. den vorigen Paragraphen) nach Formel I, von $p = 0.5$ an nach Formel I′ gerechnet und die Werte von $K^2 + L^2$ und KL abgeleitet. Es fand sich (die Querstriche bezeichnen das Anwendungsbereich der einzelnen Formeln):

p	K	L	k	K^2+L^2	KL	p	K	L	k	K^2+L^2	KL
0.10	0.140	0.115		0.03	0.02	0.970	0.441	0.021	34°6	0.19	0.01
0.20	0.111	0.074		0.02	0.01	0.980	0.465	0.020	37.2	0.22	0.01
0.30	0.104	0.056		0.01	0.01	0.990	0.489	0.020	40.1	0.24	0.01
0.40	0.105	0.045		0.01	0.00	1.000	0.516	0.020	−43.4	0.27	0.01
0.50	0.112	0.038	− 1°6	0.01	0.00	1.010	0.458	0.020	−43.5	0.21	0.01
0.60	0.128	0.032	2.7	0.02	0.00	1.020	0.433	0.020	40.5	0.19	0.01
0.70	0.156	0.028	4.6	0.02	0.00	1.030	0.407	0.019	37.8	0.17	0.01
0.80	0.207	0.025	9.4	0.04	0.01	1.045	0.373	0.019	34.2	0.14	0.01
0.827	0.228	0.024	11.6	0.05	0.01	1.063	0.333	0.018	29.9	0.11	0.01
0.859	0.260	0.023	14.7	0.07	0.01	1.100	0.273	0.018	23.1	0.07	0.00
0.900	0.312	0.022	20.2	0.10	0.01	1.141	0.219	0.018	17.5	0.05	0.00
0.937	0.372	0.021	26.7	0.14	0.01	1.173	0.191	0.017	14.0	0.04	0.00
0.955	0.407	0.021	−30.8	0.17	0.01	1.200	0.167	0.017	−11.7	0.03	0.00

Dann wurden alle Werte von p berechnet, für welche die Argumente $\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}$ und $\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}$ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ wurden, wobei für ersteres Argument zunächst nur Werte von p unter 0.8 in Betracht gezogen wurden. Die zugehörigen Werte der Ausdrücke:

$$A = 2K\cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}\right]$$

und:
$$B = 2\,L \cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right]$$

wurden dann graphisch aufgetragen und durch eine Curve von der Form der Windungen einer Sinuscurve verbunden. Für die Werte von p über 0.8, wo das Argument von A langsamer wächst, wurde A für alle in der vorstehenden Tafel angegebenen Werte p direkt berechnet. Auf diese Weise sind die Curven A und B (Figurentafel I.) entstanden.

Die Curve C giebt die Werte von:
$$C = 1 + K^2 + L^2$$

Das letzte Glied des Ausdrucks II (resp. II′)
$$2\,K\,L \sin(2\,m\,p - k)$$
welches nicht über 0.03 steigt und aus Wellen von der Länge 0.032 in p besteht, habe ich nicht berücksichtigt, weil es bei der Kürze der Wellen verbunden mit der geringen Amplitude für den Anblick der Beugungsfigur im Fernrohr bedeutungslos bleiben muss.

Die (graphisch ausgeführte) Superposition der Wellen A und B über C liefert die Curve J, die Darstellung der Lichtintensität für einen Radius des Beugungsbildes, von $p = 0.1$ an. Für p unter 0.1 habe ich in Intervallen von 0.005 in p fortschreitend die Werte von J nach den Formeln III direkt berechnet, dieselben eingetragen und durch eine Curve verbunden. Für p über 1 wurde J unmittelbar durch die Summe $K^2 + L^2$ geliefert.

Man bemerkt, dass für $p > 0.1$ der Charakter der Beugungsfigur in groben Zügen bereits durch die Curve A dargestellt wird. Die Beugungsfigur besteht im Wesentlichen aus acht hellen Ringen. Der innerste ist besonders schmal und hell, dann folgen Ringe mit abnehmender Intensität und zunehmender Breite. Besonders hell wird wieder der äusserste Ring, der sich zugleich durch seine Breite, wie durch die Dunkelheit des Zwischenraums, welcher ihn von den übrigen Ringen trennt, auszeichnet.

Digitized by Google

Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 25. Juli.*)

Für die Beurtheilung der Convergenz von Kettenbrüchen mit beliebigen reellen oder complexen Gliedern besitzt man bisher, soweit mir die betreffende Literatur bekannt ist, keinerlei allgemeine Kriterien. In dem folgenden Aufsatze sollen einige Formen hinreichender Convergenz-Bedingungen von sehr einfachem Charakter und verhältnissmässig grosser Allgemeinheit mitgetheilt werden. Ich benütze diese Gelegenheit, um zunächst das Wesen der beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere, die ich als unbedingte und bedingte Convergenz eines Kettenbruches bezeichne, genauer festzustellen (§ 2). Da bei dieser Untersuchung das eventuelle Vorkommen von sinnlosen Näherungsbrüchen (d. h. solchen mit dem Nenner 0) eine eingehende Berücksichtigung erfordert, so schicke ich zunächst einige Bemerkungen über die Natur und eventuelle Häufigkeit derselben voraus (§ 1). Sodann wird ein allgemeines Kriterium für die unbedingte Convergenz eines Kettenbruches mit beliebigen Gliedern aufgestellt, welches sich als eine directe Verallgemeinerung eines bekannten Kriteriums für Kettenbrüche mit lauter reellen negativen Gliedern erweist (§ 3). Nach einer Digression über eine durch jenes Kriterium ermöglichte Verallgemeinerung des Legendre'schen Irrationalitäts-Satzes (§ 4), werden mit Hülfe von sehr einfachen Transformationen zunächst für zwei speciellere Kettenbruch-Formen, schliesslich aber auch wieder für ganz beliebige Kettenbrüche noch andere Convergenz-Bedingungen von wesentlich verschiedenem Charakter abgeleitet (§ 5).

§ 1.

Zur Bezeichnung des n-gliedrigen Kettenbruches:

$$(1)\qquad \pm b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \ddots \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

bediene ich mich der gedrängteren Schreibweise:

$$(2)\qquad \pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$$

oder auch der Symbole:

$$(3)\qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n{}_{(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n{}_{(\nu)},$$

wofür ich im Falle $b_0 = 0$ kürzer schreibe:

$$(4)\qquad \left[\pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n{}_{(\nu)}, \qquad \left[\pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n{}_{(\nu)}.$$

Analog bezeichne ich den entsprechenden unendlichen Kettenbruch durch:

$$(5)\qquad \pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \cdots \pm \frac{a_\nu|}{|b_\nu} \pm \cdots$$

oder:

$$(6)\qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty{}_{(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty{}_{(\nu)}.$$

Dabei pflege ich in (3), (4) und (6) die ausdrückliche Hervorhebung des laufenden Index ν durch das beigesetzte Zeichen (ν) überall da wegzulassen, wo ein Missverständniss ausgeschlossen erscheint (also: $\left[\pm b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ etc.).

Digitized by Google

Die a_ν, b_ν sollen im folgenden beliebige (reelle oder complexe) Zahlen bedeuten, mit der einzigen (gewissermaassen selbstverständlichen) Beschränkung, dass die a_ν durchweg als von Null verschieden angenommen werden. Wegen der Willkürlichkeit der a_ν, b_ν kann daher das oben beliebig gelassene Vorzeichen $\pm$ überall wegfallen, da derselbe Grad von Allgemeinheit erzielt wird, wenn man statt $\pm b_0$, $\pm a_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) lediglich b_0, a_ν schreibt. Es genügt also, für die folgenden Betrachtungen einen Kettenbruch von der Form:

$$(7) \qquad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n \quad \text{bezw.} \quad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

zu Grunde zu legen.

Wird sodann ein System von Zahlen A_ν, B_ν durch die Gleichungen definirt:

$$(8) \begin{cases} \text{(a)}\ A_0 = b_0 & B_1 = 1 \\ \text{(b)}\ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ \text{(c)}\ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}\ (\nu \geqq 2), \end{cases}$$

so bezeichne ich den zunächst rein formal definirten Ausdruck $\frac{A_m}{B_m}$ ($m = 1, 2, 3 \ldots$) als den m^{ten} Näherungsbruch der Kettenbrüche (7), gleichgültig, ob $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder nicht. Ersteres findet offenbar allemal statt, wenn $|B_m| > 0$ ist, und dieser Fall tritt sicher dann ein, wenn der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen bestimmten Sinn besitzt; zugleich wird hierbei:

$$(9) \qquad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = \frac{A_m}{B_m}.$$

Es kann aber auch $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellen, ohne dass das gleiche für den betreffenden Kettenbruch gilt.[1])

[1]) Vgl. Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. II, S. 269.

Digitized by Google

In diesem Falle sehe ich den Werth des Kettenbruches als durch Gl. (9) definirt an, so dass ich also $\frac{A_m}{B_m}$ schlechthin als den Werth des Kettenbruches bezeichne, sofern nur B_m von Null verschieden ausfällt.

Ist dagegen $B_m = 0$, so sage ich, der m^{te} Näherungsbruch werde sinnlos. Ueber den einzig möglichen Charakter solcher sinnloser Näherungsbrüche und den eventuellen Umfang ihres Auftretens gewinnt man Aufschluss mit Hülfe der bekannten Formel:

$$(10) \qquad A_m B_{m-1} - B_m A_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot a_1 a_2 \ldots a_m,$$

aus welcher sich unmittelbar die nachstehenden Consequenzen ergeben:

I. Es kann niemals gleichzeitig $A_{m-1} = 0$, $A_m = 0$ sein

II. Sind B_{m-1}, B_m von Null verschieden, so kann niemals die Beziehung bestehen:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_m}{B_m}.$$

III. Ist $B_m = 0$, so kann nicht gleichzeitig $B_{m-1} = 0$ sein — vice versa; es kann also mit $B_m = 0$ nicht auch gleichzeitig $B_{m+1} = 0$ sein.

IV. Es kann niemals gleichzeitig $A_m = 0$, $B_m = 0$ sein.

Aus der Zusammenfassung von III und IV ergiebt sich schliesslich:

V. Wird irgend ein Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$ sinnlos, so kann das nur in der Weise geschehen, dass $B_m = 0$, dagegen A_m von Null verschieden. Zugleich kann dann keiner der benachbarten Näherungsbrüche $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}}$ sinnlos werden.

Digitized by Google

§ 2.

Der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst convergent, wenn $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ eine bestimmte Zahl (incl. 0) vorstellt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass zu einem convergenten Kettenbruche höchstens eine endliche Zahl von sinnlosen Näherungsbrüchen gehören kann, während andererseits die Zulässigkeit einer solchen endlichen Anzahl sinnloser Näherungsbrüche keineswegs ausgeschlossen erscheint.

Bekanntlich involvirt die Convergenz des obigen Kettenbruches durchaus nicht diejenige aller Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m > 1$: mit anderen Worten, ein convergenter Kettenbruch kann — im Gegensatze zu einer convergenten Reihe oder einem convergenten Producte — durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern divergent werden.[1])

Ich bezeichne nun den Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als unbedingt convergent, wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für jedes $m \geqq 0$ convergirt; andererseits als bedingt convergent, wenn zwar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ convergirt, dagegen unter den Kettenbrüchen $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m > 1$ mindestens ein divergenter sich befindet.[2])

---

[1]) Vgl. Stolz, a. a. O. S. 280. — Stern, Algebr. Analysis, S. 307. 482.

[2]) Besondere Benennungen zur ausdrücklichen Kennzeichnung dieser beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere scheinen bisher nicht üblich geworden zu sein. Da ich solche — wie die folgenden Auseinandersetzungen des näheren zeigen — für äusserst wünschenswerth halten muss, so bediene ich mich der im Texte angegebenen Ausdrücke. Dieselben werden also hier in wesentlich anderer Bedeutung gebraucht, als in der Theorie der unendlichen Reihen und Producte, wo sie die

Da das Anfangsglied b_0 auf den Convergenz-Charakter des betreffenden Kettenbruches offenbar keinen Einfluss ausüben kann, so steht es frei, bei der weiteren Untersuchung der beiden angedeuteten Möglichkeiten von vornherein $b_0 = 0$ anzunehmen und somit von dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auszugehen. Es werde dann wieder gesetzt:

$$(10) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_n}{B_n} \text{ für } n > 1;\ A_0 = 0,\ B_0 = 1,$$

und entsprechend für $m \geqq 0$:

$$(11) \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n = \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} \text{ für } n > m+1;\ A_{m,m} = 0,\ B_{m,m} = 1,$$

so dass also speciell: $A_{0,n} = A_n$, $B_{0,n} = B_n$ wird. Dabei sind die Beziehungen (10), (11) wiederum lediglich so zu verstehen, dass A_n, B_n bezw. $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ die rein formal nach dem Vorbilde der Gleichungen (8) gebildeten Zähler und Nenner der betreffenden Näherungsbrüche bedeuten — gleichgültig, ob B_n, $B_{m,n}$ für jeden Werth n von Null verschieden sind und ob die links stehenden Kettenbrüche ein Sinn haben oder nicht. Zwischen den A_n, B_n und $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ bestehen alsdann, wie leicht zu sehen, die Relationen:

$$(12) \qquad \begin{cases} A_n = B_{m,n} A_m + A_{m,n} A_{m-1} \\ B_n = B_{m,n} B_m + A_{m,n} B_{m-1} \end{cases} (n \geqq m \geqq 1).$$

Es werde nun der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als convergent und sein Werth $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K$ vorläufig als von Null verschieden vorausgesetzt. Ueber die Convergenz oder Divergenz des

---

Existenz bezw. Nicht-Existenz des commutativen Charakters bezeichnen. Da bei der grundverschiedenen Bildungsweise der Kettenbrüche etwas derartiges überhaupt nicht in Frage kommen kann, so erscheint wohl jedes Missverständniss nach dieser Richtung von vornherein ausgeschlossen.

Digitized by Google

Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} (m \geq 1)$ entscheidet auf Grund der oben gegebenen Definition lediglich das Verhalten von $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$. Hierbei sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die $B_{m,n}$ sollen — zum mindesten von einer bestimmten Stelle $n > n_0$ ab — durchweg von Null verschieden sein. Da in Folge der Convergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ das analoge für die B_n gilt, so stellen — zum mindesten für hinlänglich grosse n — die Quotienten:

$$\frac{A_n}{B_n} = K_n, \qquad \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = K_{m,n} \tag{13}$$

bestimmte Zahlen vor. Alsdann ergiebt sich aus (12) die Beziehung:

$$K_n = \frac{A_m + K_{m,n} A_{m-1}}{B_m + K_{m,n} B_{m-1}} \tag{14}$$

und, da der Nenner der rechten Seite $\left(= \frac{B_n}{B_{m,n}}\right)$ wiederum von Null verschieden ist, so folgt weiter:

$$(K_n \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot K_{m,n} = -(K_n \cdot B_m - A_m) \tag{15}$$

also schliesslich für $\lim n = \infty$:

$$(K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} = -(K \cdot B_m - A_m) \quad (m > 1) \tag{16}$$

Hieraus folgt aber, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ allemal convergirt, wenn $|K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}| > 0$, d. h. wenn $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ von K verschieden ausfällt (wobei es gleichgültig ist, ob $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder sinnlos wird, da ja im letzteren Falle, nach § 1, V, $|A_{m-1}| > 0$ sein muss).

Ist dagegen $K \cdot B_{m-1} - A_{m-1} = 0$, d. h.:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}, \tag{17}$$

so muss offenbar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ nach ∞ divergiren[1]) (da keinesfalls gleichzeitig $K \cdot B_m - A_m = 0$ sein kann, nämlich weder: $A_m = B_m = 0$ nach § 1, IV, noch: $\frac{A_m}{B_m} = K = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ nach § 1, II).

II. Es mögen unter den $B_{m,n}$ unendlich viele den Werth 0 haben, etwa $B_{m,n_\nu} = 0$, wo (n_ν) für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen bedeutet. Alsdann ist ohne weiteres klar, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ keinesfalls convergiren kann. Man kann aber auch nicht sagen, dass er nach ∞ divergire, da ja unter den Näherungsbrüchen $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$ unendlich viele schlechthin sinnlos werden. Dagegen lässt sich nachweisen — und das scheint mir hierbei wesentlich — dass auch in diesem Falle[2]) die Gleichung (17) bestehen muss. Ersetzt man nämlich in Gl. (12) n durch n_ν, so folgt, wegen $B_{m,n_\nu} = 0$:

[1]) Darunter ist hier immer nur zu verstehen, dass der absolute Betrag von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich gross wird. Dagegen braucht, wenn z. B. die a_ν, b_ν reell sind, der Kettenbruch keineswegs „eigentlich", d. h. nach $+\infty$ bezw. $-\infty$, zu divergiren, sondern könnte auch zwischen den Werthen $-\infty$ und $+\infty$ oscilliren.

[2]) Dass dieser zunächst nur als möglich erscheinende Fall auch wirklich vorkommt, d. h. dass es wirklich convergente Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ giebt, für welche unendlich viele Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos ausfallen, wird weiter unten gezeigt werden. Vorläufig bemerke man, dass aus:

$$\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} \tag{19}$$

Digitized by Google

$$(18) \qquad A_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1} \qquad B_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$$

und daher, weil $|A_{m,n_\nu}| > 0$ und für hinlänglich grosse ν, etwa für $\nu \geq \nu_0$ auch $|B_{n_\nu}| > 0$ sein muss:

$$(19) \qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} \quad (\nu = \nu_0,\ \nu_0 + 1,\ \nu_0 + 2,\ \ldots)$$

also schliesslich:

$$(20) \qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K, \text{ q. e. d.}$$

Bezeichnet man sodann mit p_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) die nach Ausschluss der m_ν übrig bleibenden natürlichen Zahlen,[1]) so dass also durchweg $|B_{m,p_\nu}| > 0$, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (20), wenn man in Gl. (15) $n = p_\nu$ setzt, dass die Folge der nicht-sinnlosen Kettenbrüche $\frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}}$ für $\lim \nu = \infty$ nach ∞ divergirt.

---

und den für $n = n_\nu$ aus (12) hervorgehenden Beziehungen:

$$A_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot A_m + A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1}$$
$$B_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot B_m + A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$$

stets auch umgekehrt folgt:

$$B_{m,n_\nu} = 0.$$

Denn wäre $|B_{m,n_\nu}| > 0$, so würde sich (gleichgültig, ob $|A_{m,n_\nu}| > 0$ oder $= 0$) allemal ergeben: $\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, was nach § 1, II unmöglich ist. Besteht also Gl. (19) für unendlich viele n_ν, so werden auch die unendlich vielen Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos.

[1]) Die p_ν müssen allemal wirklich eine unendliche Menge bilden, da ja niemals zwei consecutive $B_{m,n}$ verschwinden können.

Digitized by Google

Ich will von einem Kettenbruche, der zwar unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche besitzt, während immerhin die Folge der übrigen nach ∞ divergirt, sagen: er divergire im wesentlichen nach ∞. Man hat dann für einen derartigen Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ zwar nicht $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$ (sondern nur: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}} = \infty$), dagegen: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0$. Bei Anwendung dieser Terminologie gilt nun der Satz:

Wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt, so convergirt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ nach Null — und umgekehrt.

Für die nach Gl. (11) mit $A_{m-1,n}$, $B_{m-1,n}$ zu bezeichnenden Näherungsbruch-Zähler und -Nenner von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ gelten nämlich die Beziehungen:

$$(21) \qquad \begin{cases} A_{m-1,n} = a_m B_{m,n} \\ B_{m-1,n} = b_m B_{m,n} + A_{m,n}. \end{cases}$$

Folglich wird:

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_m \cdot \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}}{1 + b_m \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}} = 0, \text{ wenn: } \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0.$$

Umgekehrt ergiebt sich:

$$(23) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}}{a_m - b_m \cdot \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}} = 0, \text{ wenn: } \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = 0$$

(aber, im letzteren Falle, nicht nothwendig: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$) — q. e. d.

Digitized by Google

Mit Hülfe dieses letzten Resultates lässt sich auch noch der oben vorläufig ausgeschlossene Fall: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K = 0$ unmittelbar erledigen. Da hier $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ wird, so folgt nämlich aus dem eben gesagten, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt. Zugleich hat man — wegen $A_0 = 0$, $B_0 = 1$:

$$\frac{A_0}{B_0} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} \text{ (nämlich } = 0), \tag{24}$$

d. h. es besteht Gl. (17) bezw. (20) für den besonderen Werth $m = 1$ und es divergirt auch (schlechthin oder im wesentlichen) $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m = 1$, so dass also dieser Fall ohne weiteres unter die früher als I., II. bezeichneten subsumirt werden kann. Findet dann aber die Gleichung:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = 0 \tag{25}$$

für irgend einen weiteren Werth m statt, so hat man $A_{m-1} = 0$, also $|A_m| > 0$, und erkennt analog wie früher aus Gl. (15) (mit der einzigen Modification, dass jetzt $\lim\limits_{n=\infty} K_n = 0$ zu setzen ist), dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt; und in gleicher Weise ergiebt sich die Convergenz dieses Kettenbruches, falls für das betreffende m die Gl. (25) nicht besteht, d. h. wenn A_{m-1} von Null verschieden ist.

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ergiebt sich nun, wenn man noch die bisher mit m bezeichnete Zahl durch $m + 1$ ersetzt, der folgende Satz:

Digitized by Google

Ist $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ (wo K endlich oder Null), so **convergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ $(m \geqq 0)$, falls $\frac{A_m}{B_m}$ von K verschieden (event. auch sinnlos) ausfällt; ist dagegen $\frac{A_m}{B_m} = K$, so **divergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞, während dann $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird.

Und es folgt weiter:

Die **nothwendige und hinreichende** Bedingung für die **unbedingte** Convergenz des convergenten Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ besteht darin, dass für **keinen** Werth $m \geqq 0$ die Beziehung $\frac{A_m}{B_m} = K$ stattfindet. Convergirt der Kettenbruch nur bedingt, so existirt mindestens ein Werth m derart, dass $\frac{A_m}{B_m} = K$ wird, d. h. der **unendliche** Kettenbruch: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ kann in diesem Falle durch den **endlichen**: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ ersetzt werden.[1])

---

[1]) Dabei wird im Falle $K = 0$ auch $m = 0$, d. h. der im allgemeinen Falle $|K| > 0$ auftretende endliche Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ reducirt sich hier auf 0. Zugleich erkennt man, dass ein Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ nie anders als bedingt convergiren kann. Denn nach dem oben gesagten muss ja $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ allemal schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergiren. Man könnte danach die Definition der unbedingten

Digitized by Google

Hiernach besitzen also ausschliesslich unbedingt convergente Kettenbruch-Entwickelungen einer Zahl oder Function K den Charakter einer gewissen analytischen Nothwendigkeit: jede der Zahlen a_ν, b_ν steht, wie gross auch ν sein mag, zu K in einer bestimmten, durch die vorangehenden Zahlen $a_0, b_0, \ldots a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$ vermittelten Beziehung, in der K selbst eine wesentliche Rolle spielt. Ist dagegen $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo $|K| > 0$) nur bedingt convergent, so giebt es eine oder eine erste Zahl m von der Beschaffenheit, dass: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = K$, dagegen: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird. Hier besteht offenbar ein bestimmter Zusammenhang mit der Zahl K nur für die Zahlen $a_1, b_1, \ldots a_m, b_m$, während alle übrigen a_ν, b_ν $(\nu > m)$ von K völlig unabhängig sind und nur der Bedingung $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ zu genügen haben. Man könnte geradezu in dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, ohne seinen Werth zu verändern, alle Glieder $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ für $\nu \geqq m+1$ durch unendlich viele andere Systeme $\frac{a'_\nu}{b'_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ersetzen, die bis auf die Bedingung $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ als willkürlich anzusehen wären.

Ueber solche Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ sei noch folgendes bemerkt. Aus dem oben gesagten geht hervor

---

Convergenz auch folgendermaassen fassen: Der convergente Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst unbedingt convergent, wenn keiner der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ nach Null convergirt.

(da $\frac{A'_1}{B'_1} = \frac{a'_1}{b'_1}$ sicher von $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ d. h. 0 verschieden), dass $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_3^\infty$ convergiren muss. Und da andererseits $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach ∞ divergirt, so folgt, dass:

$$\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_3^\infty = -b_2 \tag{26}$$

sein muss. Besitzt nun der Kettenbruch die Eigenschaft, dass für keinen weiteren Werth m (d. h. ausser für $m = 0$) die Beziehung besteht: $\frac{A'_m}{B'_m} = 0$, so convergirt jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 2$, also convergirt der Kettenbruch (26) unbedingt. Man gewinnt also in diesem Falle aus der nur bedingt convergirenden Null-Entwickelung eine unbedingt convergirende für die Zahl b_2. Auf diese Weise hat z. B. Legendre[1]) die Entwickelung:

$$-3 = \left[-\frac{\pi^2}{2\nu - 1}\right]_3^\infty \tag{27}$$

abgeleitet, die ihm zum Beweise der Irrationalität von π^2 diente.

Ein analoger Schluss ist offenbar auch dann möglich, wenn für eine endliche Anzahl von Werthen m die Relation $\frac{A'_m}{B'_m} = 0$ stattfindet.

Es ist aber auch der Fall denkbar, dass die Gleichung:

$$\frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}} = 0 \tag{28}$$

---

[1]) Éléments de Géométrie, Note IV. — Aus:

$$\operatorname{tang} x = \left[\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{2\nu - 1}\right]_2^\infty$$

folgt nämlich für $x = \pi$:

$$0 = \left[\frac{\pi}{1}, -\frac{\pi^2}{2\nu - 1}\right]_2^\infty$$

(Stolz, a. a. O. S. 315. — Stern, a. a. O. S. 481. 482).

Digitized by Google

für eine unendliche Folge von Zahlen m_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) stattfindet. Alsdann werden unter den Kettenbrüchen von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich viele divergente vorkommen (nämlich alle für $m = m_\nu + 1$ resultirenden, so dass also der vorgelegte Kettenbruch selbst nach Abtrennung einer beliebig grossen Anzahl von Anfangsgliedern niemals einen unbedingt convergenten liefern kann.

Da diese Möglichkeit meines Wissens niemals erörtert worden ist, so dürfte es nicht überflüssig sein, nachzuweisen, dass der fragliche, zunächst nur als denkbar hingestellte Fall auch wirklich construirt werden kann.

Nach einer bekannten Euler'schen Formel[1]) hat man:

$$(29) \qquad s_n = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = \left[\frac{1}{q_1}, -\frac{q_{\nu-1}^2}{q_{\nu-1}+q_\nu}\right]_2^n = \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^n$$

und hieraus resultirt für $\lim n = \infty$, falls $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu}$ convergirt, die Transformation dieser Reihe in einen aequivalenten Kettenbruch, d. h. einen solchen, dessen Näherungsbrüche $\frac{A'_n}{B'_n}$ mit den Partialsummen s_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) übereinstimmen. Wählt man also die betreffende Reihe in der Weise, dass $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = 0$ und ausserdem für unendlich viele Zahlen m_ν die Beziehung besteht: $s_{m_\nu} = 0$, so wird auch allemal $\frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}} = 0$. Eine solche Wahl lässt sich aber auf unendlich viele Arten mit Leichtigkeit bewerkstelligen: es braucht nur $s_{m_\nu} = 0$ und für $\nu > 1$: $s_{m_\nu} - s_{m_{\nu-1}} = 0$ angenommen zu werden, d. h. die Reihe muss aus lauter Gliedergruppen mit der Summe 0 bestehen, wobei man noch, um durchweg von Null verschie-

---

[1]) Introductio, T. I, § 369.

dene b'_ν zu erhalten, vermeiden wird, dass für irgendwelche Werthe von ν: $q_{\nu-1} + q_\nu = 0$ sich ergiebt. Man setzeze z. B.

$$\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \ldots$$

$$(30) \qquad + \frac{1}{c_{2\nu-1}} + \frac{1}{c_{2\nu}} - \frac{1}{c_{2\nu-1}} - \frac{1}{c_{2\nu}} + \ldots,$$

so wird diese Ruhe stets convergiren, wenn nur $\lim\limits_{\nu=\infty} |c_\nu| = \infty$.

Zugleich hat man für alle möglichen ν: $s_{4\nu} = \frac{A'_{1\nu}}{B'_{4\nu}} = 0$.

Man kann also thatsächlich in unbegrenzter Zahl Kettenbrüche $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ angeben, bei denen für unendlich viele Werthe m_ν die Relation besteht:

$$(31) \qquad 0 = \frac{A'_0}{B'_0} = \frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}}.$$

Aus einer früher gemachten Bemerkung (S. 4, Fussnote 2) geht dann noch hervor, dass in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_2^\infty$ unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche liefert, indem nämlich durchweg $B'_{1,m_\nu} = 0$ wird (der betr. Kettenbruch divergirt also nur „im wesentlichen" nach ∞). Dieses Resultat lässt sich auch ohne weiteres auf einen Kettenbruch mit beliebigem von Null verschiedenen Werthe K übertragen: man braucht nur an irgend einen m-gliedrigen Kettenbruch $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen Kettenbruch der eben betrachteten Art anzuhängen, indem man b_m durch $b_m + \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ ersetzt. Damit ist schliesslich auch der Nachweis erbracht, dass dem oben unter II als möglich angenommenen Falle reale Existenz zukommt.

Digitized by Google

§ 3.

Elementare Convergenz-Kriterien von einiger Allgemeinheit hat man, wie Herr Stolz in seinen „Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik" ausdrücklich hervorhebt,[1]) nur für Kettenbrüche mit reellen, gleichbezeichneten Gliedern, d. h. für solche von der Form $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[-\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$, wo die p_ν, q_ν wesentlich positive reelle Zahlen bedeuten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der ersteren besteht, wie Seidel[2]) und Stern[3]) gezeigt haben, in der Divergenz der Reihe $\sum d_\nu$, wo:

$$(32) \qquad d_{2\nu} = \frac{p_1 p_3 \cdots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \cdots p_{2\nu}} \cdot q_{2\nu}, \quad d_{2\nu+1} = \frac{p_2 p_4 \cdots p_{2\nu}}{p_1 p_3 \cdots p_{2\nu+1}} \cdot \frac{q_{2\nu+1}}{p_{2\nu+1}}.$$

Daraus ergiebt sich dann als eine hinreichende Convergenz-Bedingung von merklich einfacherer Form die Divergenz der Reihe: $\sum \frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_\nu}$.[4])

Was die Kettenbrüche der zweiten Kategorie betrifft, so hat Seidel[5]) für den besonderen Fall $p_\nu = 1$, Stern[6]) für den allgemeineren beliebiger positiver p_ν die hinreichende Convergenz-Bedingung aufgefunden:

$$(33) \qquad q_\nu - p_\nu > 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass diese Convergenz-Bedingung mutatis mutandis für ganz beliebige Kettenbrüche gilt, d. h. dass bei beliebigen reellen oder

---

[1]) A. a. O. S. 280.

[2]) Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Doctor-Dissertation, München 1846.

[3]) Journ. f. Math. Bd. 37 (1848), S. 264. 266.

[4]) Stolz, a. a. O. S. 284.

[5]) Abh. d. Bayr. Ak., 2. Cl., Bd. VII (1855), S. 582.

[6]) Algebr. Analysis, S. 301.

Digitized by Google

complexen a_ν, b_ν der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ allemal convergirt (und zwar unbedingt), wenn:

$$(34) \qquad |a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).^{1)}$$

Zugleich lassen sich aus diesem Convergenz-Kriterium durch passende Transformationen noch andere ableiten, welche nicht als specielle Fälle darin enthalten sind. Ich beweise den fraglichen Hauptsatz zunächst für Kettenbrüche von etwas speciellerer Form, nämlich:

Sind p_ν, q_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ beliebige **positive** Zahlen, welche durchweg der Bedingung genügen:

$$q_\nu - p_\nu \geqq 1,$$

---

[1]) Wie ich nachträglich aus einer kurzen Notiz im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 21 (1892), S. 186 ersehe, hat Herr J. W. Sleschinski die Convergenz-Bedingung aufgestellt:

$$|a_\nu| - |b_\nu| > 1$$

(also, wie es scheint, mit Ausschluss des weiter unten noch besonders vortheilhaft zu verwerthenden Falles der Gleichheit). In dem citirten Referate wird lediglich dieses Factum ohne jeden weiteren Zusatz angeführt, und es ist nicht einmal zu ersehen, ob die a_ν, b_ν nur reelle oder auch complexe Zahlen bedeuten. Die in russischer Sprache geschriebene und in der Moskauer Math. Sammlung publicirte Arbeit selbst ist mir bisher nicht zugänglich gewesen. Das gleiche gilt von einer anderen in dem nämlichen Referate erwähnten Arbeit desselben Verfassers, in welcher für Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ die Convergenz-Bedingung $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu = 0$ angegeben wird. Die letztere ist in dieser Form sicherlich unrichtig. Denn, sieht man von dem besonderen Falle ab, dass der Kettenbruch lauter positive Theilzähler und Theilnenner besitzt, so üben ja die Anfangsglieder, wie aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen des näheren hervorgeht, einen ganz wesentlichen Einfluss auf die Convergenz des Kettenbruches. Aus einer Bedingung, die sich nur auf das Verhalten der Kettenbruch-Glieder im Unendlichen bezieht, kann also höchstens auf die Convergenz des Kettenbruches von einer gewissen (nicht einmal angebbaren) Stelle geschlossen werden. Im übrigen stellt die obige Bedingung (mit der angemessenen Correctur) nur einen sehr speciellen Fall der weiter unten (Ungl. (78)) von mir aufgestellten: $|c_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ dar.

$\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ reelle oder complexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent. Setzt man sodann: $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = K$, so ist $K = \varepsilon_1$, wenn die Reihe $\sum p_1 p_2 \ldots p_\nu$ **divergirt** und ausserdem für jedes $\nu \geqq 1$:

$$q_\nu - p_\nu = 1, \qquad \varepsilon_{\nu+1} = -1;$$

dagegen hat man in **jedem** anderen Falle: $0 < |K| < 1$.

Beweis. Bezeichnet man mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches, so wird zunächst:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$$

also:

$$(35) \qquad |Q_0| = 1 \qquad |Q_1| = q_1 \geqq 1 + p_1$$

und daher:

$$(36) \qquad |Q_1| - |Q_0| \geqq p_1 > 0.$$

Da sodann für $\nu \geqq 2$ die Beziehung besteht:

$$(37) \qquad Q_\nu = q_\nu \cdot Q_{\nu-1} + \varepsilon_\nu p_\nu Q_{\nu-2},$$

so folgt:

$$|Q_\nu| \geqq (1 + p_\nu) \cdot |Q_{\nu-1}| - p_\nu |Q_{\nu-2}|$$

oder:

$$(38) \qquad |Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| \geqq p_\nu \{|Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}|\}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Substitution von $(\nu - 1)$, $(\nu - 2)$, $\ldots 2$ an Stelle von ν:

$$(39) \quad \begin{cases} |Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}| \geqq p_{\nu-1} \{|Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}|\} \\ |Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}| \geqq p_{\nu-2} \{|Q_{\nu-3}| - |Q_{\nu-4}|\} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ |Q_2| - |Q_1| \geqq p_2 \{|Q_1| - |Q_0|\} \geqq p_2 p_1. \end{cases}$$

Digitized by Google

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass sämmtliche Differenzen von der Form $|Q_\nu| - |Q_{\nu-1}|$ wesentlich positiv sind, d. h. die $|Q_\nu|$ nehmen mit ν monoton zu. Durch successive Einführung der Gleichungen (39) in (38) findet man alsdann:

$$(40) \qquad |Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| \geqq p_1 p_2 \ldots p_\nu.$$

Wird hier nochmals für ν der Reihe nach $(\nu-1), (\nu-2) \ldots 2$ gesetzt, so folgt durch Addition der sämmtlichen resultirenden Ungleichungen zu Ungl. (40):

$$(41) \qquad |Q_\nu| - |Q_1| \geqq p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_\nu,$$

und hieraus schliesslich mit Berücksichtigung von (35):

$$(42) \qquad |Q_\nu| \geqq 1 + p_1 + p_1 p_2 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.$$

Man bemerke, dass in dieser Relation das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn in den sämmtlichen zu ihrer Herleitung benützten Relationen (35), (38) ebenfalls das Gleichheitszeichen steht. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass erstens:

$$(43) \qquad q_\nu = 1 + p_\nu \text{ für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und zweitens:

$$(44) \qquad \varepsilon_\nu = -1 \text{ für alle } \nu = 2, 3, 4, \ldots$$

(s. den Uebergang von Gl. (37) zu der darauf folgenden Ungleichung). Nur in diesem Falle wird also:

$$(42a) \qquad |Q_\nu| = 1 + p_1 + p_1 p_2 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu$$

in jedem anderen:

$$(42b) \qquad |Q_\nu| > 1 + p_1 + p_1 p_2 + \ldots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.^{1)}$$

Nun ist bekanntlich:

$$(45) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu}$$

[1]) Das Zeichen $>$ gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für $\lim \nu = \infty$.

Digitized by Google

oder, wenn man:

$$p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}, \qquad p_1 = s_1 - 1$$

substituirt:

$$(46) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \cdot \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_\nu \cdot \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

und somit:

$$(47) \qquad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| \leqq \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}_\nu \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu}.$$

Sieht man zunächst von dem durch Gl. (43), (44) charakterisirten Specialfalle ab, so ergiebt sich mit Benützung von Ungl. (42b):

$$(48) \quad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right) = 1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}$$

(mit Ausschluss der Gleichheit). Hieraus folgt, dass die Reihe (46) absolut convergirt; es convergirt also auch der Kettenbruch und wie Ungl. (48) lehrt, ist sein absoluter Werth < 1 (gleichgültig ob $\lim \frac{1}{s_\nu} = 0$ oder > 0).

Sind dagegen die Special-Bedingungen (43), (44) erfüllt, so geht durch Einführung von Gl. (44) und (42b) die Beziehung (46) in die folgende über:

$$(49) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left\{1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty{}_\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right)\right\} = \varepsilon_1 \left(1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}\right).$$

Ist also die Reihe $1 + p_1 + \sum_2^\infty{}_\nu p_1 p_2 \ldots p_\nu = \lim_{\nu=\infty} s_\nu$ convergent, etwa $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = s$ (wo: $s > 1$), so wird:

$$(50) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{1}{s}\right), \text{ also wiederum: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1.$$

Ist dagegen die obige Reihe divergent, d. h. $\lim\limits_{\nu=\infty} s_\nu = \infty$, so wird:

$$(51)\quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right] = \varepsilon_1, \text{ d. h. in diesem einzigen Falle: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Da die vorstehenden Betrachtungen auch gültig bleiben, wenn man den Kettenbruch statt mit dem Gliede $\frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$ mit einem beliebigen späteren Gliede beginnen lässt, so ergiebt sich, dass seine Convergenz eine unbedingte ist. Daraus folgt schliesslich noch, dass sein Werth K stets von Null verschieden ausfällt. Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

Ist jetzt der Kettenbruch in der Form vorgelegt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo a_ν, b_ν beliebige reelle oder complexe Zahlen, so werde gesetzt:

$$(52)\quad \begin{cases} a_\nu = \alpha_\nu \cdot |a_\nu| & \text{wo also: } |\alpha_\nu| = 1 \\ b_\nu = \beta_\nu \cdot |b_\nu| & \quad \text{„} \quad \text{„} \quad |\beta_\nu| = 1. \end{cases}$$

Alsdann hat man:

$$(53)\quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{\alpha_\nu \cdot |a_\nu|}{\beta_\nu \cdot |b_\nu|}\right]_1^\infty = \left[\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot |a_1|}{|b_1|}, \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} \cdot |a_\nu|}{|b_\nu|}\right]_2^\infty.$$

Damit ist der vorgelegte Kettenbruch auf die zuvor betrachtete Form gebracht und der oben bewiesene Satz kann daher jetzt auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Bedeuten a_ν, b_ν reelle oder complexe Zahlen mit den Charakteristiken[1]) α_ν, β_ν, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent, wenn:

---

[1]) Ich pflege die Zahl $\frac{a}{|a|}$ als die Charakteristik von a zu bezeichnen. (Math. Ann. Bd. 33 (1889), S. 124).

Digitized by Google

(54) $$|a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sein absoluter Werth ist stets < 1, ausser wenn durchweg:

(55) $$|a_\nu| - |b_\nu| = 1, \qquad \beta_\nu \beta_{\nu+1} = -a_{\nu+1} \quad (\nu \geqq 1),$$

und $\sum |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ divergirt. In diesem einen Falle wird:

(56) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{\beta_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Es ist leicht ersichtlich, in welcher Weise dieser Satz zu modificiren ist, falls die Convergenz-Bedingung (54) erst für $\nu \geqq m$ (wo $m > 1$ erfüllt ist.

---

§ 4.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes lässt sich der bekannte Legendre'sche Irrationalitäts-Satz folgendermaassen formuliren:[1])

Sind g_ν, h_ν positive ganze Zahlen, welche der Bedingung genügen:[2])

(57) $$h_\nu - g_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

und bedeutet ε_ν für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ganz nach Belieben die positive oder negative Einheit, so con-

---

[1]) Genau genommen ist dies im wesentlichen diejenige Form, in welcher Legendre den fraglichen Satz schon ausgesprochen, aber in der Hauptsache nicht bewiesen hat. Vgl. die bezüglichen Bemerkungen in der folgenden Mittheilung: „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π", p. 336.

[2]) Hat man durchweg $\varepsilon_\nu = +1$, so genügt bekanntlich für die Convergenz des Kettenbruches und die Irrationalität seines Werthes schon die Bedingung: $h_\nu - g_\nu \geqq 0$. Vgl. Stolz, a. a. O. S. 297.

Digitized by Google

vergirt der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty$ stets gegen einen **irrationalen** Werth, sofern nicht durchweg:

(58) $h_\nu - g_\nu = 1,\ \varepsilon_{\nu+1} = -1$ für $\mu \geqq m$ (wo: $m \geqq 1$).

Im letzteren Falle wird: $\varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty = 1$ bezw. ein rationaler ächter Bruch, je nachdem $m = 1$ bezw. $m > 1$.

Beweis. Da der Kettenbruch nach dem Satze des § 3 unbedingt convergirt, so kann gesetzt werden:

$$(59) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_{m+1}^\infty = K_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo die K_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ bestimmte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass im allgemeinen $|K_m| < 1$, nur in dem durch die Gleichungen (58) charakterisirten Specialfalle $K_m = \varepsilon_m$.[1]) Daraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptungen, soweit sie sich auf den genannten Specialfall beziehen.

Sind nun die fraglichen Special-Bedingungen nicht erfüllt, so hat man für jeden Werth von m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$: $|K_m| < 1$ (mit Ausschluss der Gleichheit). Aus der Annahme: $K_0 = \frac{p}{q}$, wo $p \leqq q - 1$ sein müsste, würde dann folgen:

$$(60) \qquad \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 g_1}{h_1 + K_1}$$

also:

$$(61) \qquad K_1 = \frac{\varepsilon_1 g_1 q - h_1 p}{p} \text{ und zugleich: } 0 < |K_1| < 1,$$

d. h. K_1 wäre ein ächter Bruch, dessen Nenner höchstens $= q - 1$ sein könnte. Durch Uebertragung dieser Schlussweise auf $K_2, K_3, \ldots$ gelangt man also zu dem Resultate, dass K_m, wo m höchstens $= q - 1$ sein könnte, ein ächter

[1]) Die für die Existenz dieser letzteren Beziehung noch erforderliche Bedingung, dass $\sum g_1 g_2 \ldots g_\nu$ divergirt, ist hier wegen $g_\nu \geqq 1$ eo ipso erfüllt.

Digitized by Google

Bruch mit dem Nenner 1 sein müsste, was absurd ist. Somit kann in dem betrachteten Falle K_0 nur eine Irrationalzahl (wie leicht zu sehen, mit dem Vorzeichen ε_1) sein.

Es hat wiederum keine Schwierigkeit, den vorstehenden Satz auf den Fall zu übertragen, dass die Haupt-Bedingung (57) erst für $\nu \geqq m$, wo $m > 1$, erfüllt ist.

---

§ 5.

Ich wende jetzt das in § 3 aufgestellte Convergenz-Kriterium auf die besonders häufig vorkommenden Kettenbruch-Formen $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an. Die unmittelbare Anwendung desselben auf den ersten dieser beiden Typen liefert die Convergenz-Bedingung:

$$|b_\nu| \geqq 2. \tag{62}$$

Auf den zweiten Typus lässt sich das fragliche Kriterium überhaupt nicht direct, sondern erst durch Vermittelung der Transformation in einen aequivalenten Kettenbruch anwenden. Das nämliche Hülfsmittel giebt auch für den ersten Typus eine Convergenz-Bedingung von etwas grösserer Allgemeinheit als die direct abgeleitete Bedingung (62).

Bezeichnet man mit c_ν ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) beliebige von Null verschiedene Zahlen, so hat man bekanntlich:

$$\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[+\frac{c_1}{c_1 b_1}, \pm\frac{c_{\nu-1}c_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty \tag{63}$$

und, wenn man speciell $c_{2\nu} = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) setzt:

$$\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \pm\frac{c_1}{|c_1 b_1} \pm\frac{c_1}{|b_2} \pm \ldots \pm\frac{c_{2\nu-1}}{|c_{2\nu-1} b_{2\nu-1}} \pm\frac{c_{2\nu-1}}{|b_{2\nu}} \pm \ldots \tag{64}$$

Nimmt man sodann die $c_{2\nu-1}$ als reell und positiv an, so folgt, dass der Kettenbruch convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{cases} c_{2\nu-1} \cdot |b_{2\nu-1}| - c_{2\nu-1} \geqq 1 \\ \qquad\quad |b_{2\nu}| - c_{2\nu-1} = 1. \end{cases} \tag{65}$$

Digitized by Google

Aus der zweiten dieser Bedingungen findet man:

$$c_{2\nu-1} = |b_{2\nu}| - 1, \tag{66}$$

so dass die erste in die folgende übergeht:

$$\{|b_{2\nu-1}| - 1\} \cdot \{|b_{2\nu}| - 1\} \geqq 1 \tag{67}$$

oder anders geschrieben:

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{68}$$

Die Form dieser Bedingung zeigt unmittelbar, dass dann mit dem Kettenbruche $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auch alle diejenigen von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergiren. Da aber der absolute Werth eines jeden dieser Kettenbrüche nach dem Satze des § 3 die Einheit nicht übersteigt und andererseits die Bedingung (68) allemal die folgende involvirt: $|b_{2n}| > 1$, so ist $\left[b_{2n};\ \pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}^\infty$ stets von Null verschieden, also auch jeder Kettenbruch von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n}^\infty$ convergent. Somit gewinnt man den Satz:

Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen b_ν der Bedingung (68), so ist der Kettenbruch $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent.

Die ursprünglich aufgefundene Convergenz-Bedingung (62) ist offenbar als specieller Fall in (68) enthalten.[1])

---

[1]) Eine noch etwas speciellere, nämlich: $|b_\nu| > 2 + \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, hat Herr S. Pincherle angegeben: Rendiconti Accad. dei Lincei, Serie 4, Vol. V (1889), p. 640.

Digitized by Google

Nach Analogie von Gl. (63) hat man ferner:

$$\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \left[\pm\frac{c_1 a_1}{c_1}, \pm\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu}\right]_2^\infty. \tag{69}$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass sich hier die Wahl $c_{2\nu} = 2$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) als zweckmässig erweist. Alsdann wird zunächst, wenn man der Symmetrie halber den Kettenbruch noch mit 2 multiplicirt:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty &= \pm\frac{2 c_1 a_1|}{|c_1} \pm\frac{2 c_1 a_2|}{|2} \pm \ldots \\ &\pm\frac{2 c_{2\nu-1} a_{2\nu-1}|}{|c_{2\nu-1}} \pm\frac{2 c_{2\nu-1} a_{2\nu}|}{|2} \pm \ldots, \end{aligned} \tag{70}$$

so dass bei reellen positiven Werthen der $c_{2\nu-1}$ der Kettenbruch sicher convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{cases} c_{2\nu-1} - 2 c_{2\nu-1} \cdot |a_{2\nu-1}| \geqq 1 \\ 2 - 2 c_{2\nu-1} \cdot |a_{2\nu}| = 1. \end{cases} \tag{71}$$

Aus der zweiten dieser Bedingungen folgt sodann:

$$c_{2\nu-1} = \frac{1}{2|a_{2\nu}|}, \tag{72}$$

wodurch sich die erste auf die folgende reducirt:

$$\frac{1}{2|a_{2\nu}|} \cdot \{1 - 2 \cdot |a_{2\nu-1}|\} \geqq 1,$$

d. h.

$$|a_{2\nu-1}| + |a_{2\nu}| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{73}$$

Auch hier ergiebt sich wiederum aus der Form dieser Bedingung, dass gleichzeitig mit dem Kettenbruche: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ auch alle möglichen: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^\infty$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) convergiren. Da aber, wie Gl. (70) lehrt (wenn man darin den Index 1 durch $2n + 1$ ersetzt), hier das Doppelte jedes solchen

Digitized by Google

Kettenbruches der Convergenz-Bedingung des § 3 genügt und daher, absolut genommen, die Einheit nicht übersteigt, so ist $\left[1; \pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^{\infty}$ stets von Null verschieden, folglich $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n}^{\infty}$ convergent und daher $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Dabei lässt sich schliesslich die Anfangs-Bedingung der Serie (73), d. h.

$$(74) \qquad |a_1| + |a_2| \leq \tfrac{1}{2}$$

noch vereinfachen. Da nämlich die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn man denselben mit einem beliebigen von Null verschiedenen Factor multiplicirt, so kann man in der Bedingung (74) $|a_1|$ ohne weiteres auch durch $\varepsilon \cdot |a_1|$ ersetzen. Nimmt man hier für ε eine hinlänglich kleine positive Zahl, so wird die Bedingung

$$(75) \qquad \varepsilon \cdot |a_1| + |a_2| \leq \tfrac{1}{2}$$

immer erfüllt sein, sofern nur:

$$(76) \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2} \text{ (mit Auschluss der Gleichheit).}$$

Somit ergiebt sich der folgende Satz:

Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen a_ν den Bedingungen:

$$(77) \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leq \tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist der Kettenbruch $\left[+\frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Als einfachere, aber offenbar weniger allgemeine Form der Convergenz-Bedingung ergiebt sich dann aus (77) noch unmittelbar die folgende:

$$(78) \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_\nu| < \tfrac{1}{4} \quad (\nu > 3).$$

Digitized by Google

Der zuletzt gewonnene Satz kann benützt werden, um eine neue Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der allgemeinen Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ abzuleiten. Transformirt man nämlich diesen Kettenbruch in einen aequivalenten von dem eben betrachteten Typus, so wird:

$$(79) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_1 : b_1}{1}, \frac{a_\nu : b_{\nu-1} b_\nu}{1}\right]_2^\infty.$$

Der letztere Kettenbruch und somit auch der vorgelegte convergirt aber unbedingt,[1]) wenn (Ungl. (77)):

$$(80) \qquad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leq \tfrac{1}{2} \quad (\nu \geq 1)$$

oder auch, etwas weniger allgemein (Ungl. (78)):

$$(81) \qquad \left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leq \tfrac{1}{4} \quad (\nu \geq 3).$$

Die vorstehenden Convergenz-Bedingungen tragen offenbar einen wesentlich anderen Charakter als die früher aufgestellte (Ungl. (54)), da hier nicht mehr die Differenzen der einzelnen $|a_\nu|$, $|b_\nu|$, sondern lediglich die Verhältnisse $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|$ in Betracht kommen. Dieselben gestatten mancherlei functionen-

[1]) Convergirt der eine von zwei aequivalenten Kettenbrüchen unbedingt, so gilt dies offenbar auch von dem anderen. Denn aus:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{c_1 a_1}{b_1}, \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$$

folgt für $n \geq 1$:

$$c_n \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty = \left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty,$$

so dass also gleichzeitig mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ auch $\left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ convergirt — vice versa.

Digitized by Google

theoretische Anwendungen, auf die ich bei anderer Gelegenheit einzugehen gedenke. Hier sei nur noch erwähnt, dass die folgende Convergenz-Bedingung:

$$(82) \qquad \sum_1^\infty{}^\nu \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} \right| < \tfrac{1}{2},$$

welche Herr Helge von Koch mit Hülfe von unendlichen Kettenbruch-Determinanten zu functionentheoretischen Zwecken abgeleitet hat,[1]) offenbar als ein sehr specieller Fall der Bedingung (80) erscheint.

---

[1]) Comptes rendus, T. 120 (1895), p. 145.

Digitized by Google

Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von e und π.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 1. August.*)

So viel mir bekannt ist, hat sich ganz allgemein die Ansicht herausgebildet, dass der erste Beweis für die Irrationalität von e und π, e^x und tang x (wo x ein für allemal eine rationale Zahl bedeuten soll) von Lambert herrühre, dass indessen dieser Beweis erst durch Legendre die nöthige Vollständigkeit und Strenge erhalten habe.[1]) Ein genaueres Studium der betreffenden Literatur hat mich indessen zu der Ueberzeugung geführt, dass diese Ansicht in mehrfacher Beziehung einer Modification bedarf, nämlich:

1. Die Irrationalität von e und e^2 ist schon von Euler im Jahre 1737, d. h. 30 Jahre vor Lambert, im wesentlichen bewiesen worden. Zugleich giebt auch Euler schon diejenigen allgemeinen Kettenbruch-Entwickelungen, auf denen der Lambert'sche bezw. Legendre'sche Irrationalitäts-Beweis für e^x, tang x und π beruht.

2. Lambert hat, ohne diese Euler'schen Entwickelungen zu kennen, die Irrationalität von e^x, tang x und π vollständig

---

[1]) Vgl. z. B. Stolz, Vorl. über Allg. Arithmetik, Bd. II (1886), S. 325, Note 16. — Bachmann, Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen (1892), S. 53. — Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. (1892), S. 55. 56. — F. Klein, Vortr. über ausgew. Fragen der Elem.-Geometrie (1895), S. 46.

und mit einer für die damalige Zeit (1767) geradezu exceptionellen Strenge bewiesen.

3. Das Verdienst Legendre's beschränkt sich auf einen allerdings sehr glücklichen und an sich werthvollen, aber bei Legendre auf durchaus unbewiesener Grundlage ruhenden Gedanken, welcher keineswegs eine Vervollständigung des angeblich unzulänglichen Lambert'schen Beweises, sondern lediglich eine mässige Abkürzung desselben liefert und ausserdem auch gestattet, den Irrationalitäts-Beweis auf π^2 auszudehnen. Im übrigen ist Legendre von der klaren und tiefen Einsicht Lambert's, dass Betrachtungen der fraglichen Art ohne die nöthigen Convergenz-Beweise eigentlich werthlos sind, sehr weit entfernt.

Im folgenden will ich nun versuchen, die vorstehenden Behauptungen näher zu begründen.

Dass sich bereits in Euler's „Introductio" (1753) die Kettenbruch-Entwickelung findet:[1])

$$(1) \qquad \frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \frac{1|}{|22} + \cdots$$

d. h. nach der in der vorangehenden Mittheilung von mir benützten Schreibweise:

$$(2) \qquad \frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty,$$

ist wohl allgemein bekannt. Als weniger bekannt hebt Herr Rudio in seiner anregenden und lehrreichen Abhandlung über die Geschichte der Kreis-Quadratur mit Recht hervor,[2]) dass Euler schon in seiner grundlegenden Abhandlung über die Lehre von den Kettenbrüchen[3]) noch verschiedene andere mit

[1]) A. a. O. p. 319.

[2]) S. die oben citirte Schrift, p. 51.

[3]) De fractionibus continuis dissertatio. Comment. Acad. Petrop. T. IX (ad annum 1737), p. 98—137.

der Zahl e zusammenhängende Kettenbruch-Entwickelungen, z. B. solche für e, $\sqrt{e}$ angegeben hat.[1]) Die grössere Mannigfaltigkeit der an dieser Stelle mitgetheilten Kettenbruch-Entwickelungen scheint mir indessen von secundärer Bedeutung: wesentlich erscheint mir dagegen die Methode, welche hier zur endgültigen Herleitung der fraglichen Entwickelungen dient und von deren Existenz in der Introductio sich lediglich eine kurze und leicht gänzlich zu übersehende Andeutung findet. Dort werden lediglich durch numerische Rechnung aus dem der Reihe $e = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}$ entnommenen Decimalbruche $e = 2,718281828459$ die oben (Gl. (1)) angeschriebenen 6 Anfangsglieder des Kettenbruches bestimmt, im übrigen heisst es: „*cujus fractionis ratio ex calculo infinitesimali dari potest.*" In der citirten Abhandlung findet nun Euler die genannten Kettenbrüche für e, $\sqrt{e}$ (ausserdem noch solche für $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$, $\frac{1}{2}(e^2-1)$, $\frac{e+1}{e-1}$) zunächst gleichfalls durch eine rein numerische Induction, welche vermuthen lässt, dass die betreffenden Theilnehmer arithmetische Reihen bilden. Dann aber fährt er folgendermaassen fort:[2]) „*Cum autem in praecedentibus, ubi numerum* **e** *ejusque potestates in fractiones continuas converti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum observaverim, neque praeter probilitatem de hujus progressionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potissimum incubui, ut in hujus progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem.*" Und nun folgt die Angabe einer wirklich analytischen Methode, welche zur definitiven Herleitung jener Kettenbrüche — sogar in merklich verallgemeinerter Form — sich als brauchbar erweist. Dieselbe beruht auf einer zwiefachen Integration der Riccati'schen Differential-Gleichung, einmal mit Hülfe eines unendlichen Kettenbruches, sodann in geschlossener Form mit

---

[1]) L. c. p. 120. 121.

[2]) L. c. p. 129.

Hülfe von Exponential-Functionen.[1]) Die erste Art der Integration ist immer möglich, die zweite, wenn die in der Gleichung auftretenden Exponenten gewissen Bedingungen genügen. Im letzteren Falle ergiebt sich dann auf Grund der Eindeutigkeit des betreffenden Integrals eine Kettenbruch-Darstellung des aus der Integration resultirenden Exponential-Ausdruckes. Von den auf diese Weise von Euler abgeleiteten Kettenbrüchen hebe ich hier die folgenden hervor:[2])

$$(3) \qquad e^{\frac{1}{s}} = \left[1;\ \frac{2}{2s-1},\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^\infty,$$

$$(4) \qquad \frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1} = \left[2s;\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^\infty,$$

deren zweiter für $\frac{1}{s} = 2x$ bezw. $\frac{1}{s} = 2xi$ im wesentlichen diejenigen Entwickelungen giebt, welche von Lambert und Legendre zu den fraglichen Irrationalitäts-Beweisen benützt worden sind; während der erste für $s = 1$ bezw. $s = \frac{1}{2}$ unmittelbar die volle Bestätigung der zunächst auf rein inductivem Wege gefundenen regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen für $\frac{e-1}{2}$, $\frac{e^2-1}{2}$ liefert. Da nun den Ausgangspunkt jener Euler'schen Betrachtungen die ausdrück-

[1]) Euler hat diese Methode, die an der betreffenden Stelle ziemlich kurz behandelt ist, später in einer eigenen Abhandlung („Summatio fractionis continuae, cujus indices progressionem arithmeticam constituunt etc.") ausführlich entwickelt: Opusc. analyt. T. II, p. 217—239. Eine hierauf beruhende gedrängtere Darstellung giebt Stern in seiner Theorie der Kettenbrüche: Journ. f. Math. Bd. 11 (1834), S. 60 ff. — Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass auch Lagrange („Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral", Mém. Acad. de Berlin, 1776) ähnliche Kettenbruch-Entwickelungen, wie die hier in Frage kommenden, gleichfalls durch zwiefache Integration gewisser Differential-Gleichungen abgeleitet hat: Oeuvres, T. IV, p. 319—323.

[2]) L. c. p. 131. 132.

Digitized by Google

liche Bemerkung bildet, dass jeder rationalen Zahl immer nur ein endlicher regelmässiger[1]) Kettenbruch entspricht, dass also ein unendlicher Kettenbruch dieser Art nur einen irrationalen Werth besitzen könne,[2]) so darf man sagen, dass Euler durch die Aufstellung jener regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen den Beweis für die Irrationalität von e und e^2 nicht etwa nur implicite geleistet habe,[3]) sondern dass er sich dieser Thatsache auch vollkommen bewusst gewesen sei.

Von den beiden Arbeiten, welche Lambert dem vorliegenden Gegenstande gewidmet hat, nämlich:

1. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. (Abgedruckt 1768 in demjenigen Bande der „Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres" (Berlin), welcher sonderbarer Weise die Bezeichnung: „Année 1761" trägt, S. 265—322.)
2. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Theil II, Abschnitt I, S. 140—169)

giebt die zweite lediglich ein ganz allgemein gehaltenes, orientirendes Referat über die von Lambert gefundenen

---

[1]) D. h. ein solcher von der Form: $\left[b_0; \frac{1}{b_\nu}\right]$, wo die b_ν natürliche Zahlen sind.

[2]) L. c. p. 108. — Dass ein solcher unendlicher Kettenbruch überhaupt einen bestimmten Grenzwerth besitze, wird — natürlich nicht mit der heute üblichen Strenge, aber doch in der Hauptsache richtig — aus dem Gange der Näherungsbrüche geschlossen.

[3]) Natürlich mit Ausschluss der nach heutigen Begriffen erforderlichen Convergenz-Betrachtungen: diese letzteren fehlen aber nicht minder bei den für streng ausgegebenen Legendre'schen Beweisen.

Digitized by Google

Resultate.[1]) Sie enthält überhaupt keine analytischen Entwickelungen, einige wenige Formeln ohne Beweis und zur Erläuterung dienende numerische Beispiele, im übrigen Raisonnements, welche keineswegs dazu dienen sollen, die daran geknüpften Schlüsse streng mathematisch zu beweisen, sondern nur dazu, dem Leser den Gang des Beweises verständlich zu machen. Die ganze Arbeit kann als ein glänzendes Muster populär-anschaulicher Darstellung gelten, von der wirklich wissenschaftlichen Bedeutung und dem specifisch analytischen Scharfsinne ihres Verfassers giebt sie eine äusserst unzureichende Vorstellung. Und nur dadurch, dass man diesem populären Aufsatze Lambert's eine allzugrosse, dem streng wissenschaftlichen „Mémoire" dagegen bei weitem nicht genügende Beachtung geschenkt haben mag, erscheint mir überhaupt jene Auffassung einigermassen erklärlich, wonach die dem Lambert'schen Beweise angeblich fehlende Vollständigkeit und Strenge erst durch Legendre nachgeholt worden sein soll. In Wahrheit verhält sich die Sache genau umgekehrt: Lambert's Untersuchungen sind von so musterhafter Strenge, dass sie dem völlig in der Luft schwebenden Legendre'schen Satze erst eine brauchbare Grundlage verliehen und es dadurch ermöglicht haben, denselben auf die vorliegende Frage anzuwenden. Um dies nachzuweisen, muss ich vor allem etwas näher auf den Inhalt jener Lambert'schen Haupt-Abhandlung eingehen.

Da Lambert nur den Euler'schen Kettenbruch für $\frac{1}{2}(e-1)$ aus der Introductio kennt,[2]) nicht aber die unmittel-

---

[1]) Dieselbe ist zwar, wie Lambert in der Vorrede (zweite Seite) selbst angiebt, schon im Jahre 1766 und unmittelbar vor der definitiven Ausarbeitung des oben erwähnten Mémoire geschrieben worden. Lambert muss aber die jenen Resultaten zu Grunde liegenden und im Mémoire verwertheten analytischen Entwickelungen im wesentlichen damals schon besessen haben: zum mindesten hat er die in dieser Hinsicht etwa noch bestehenden Lücken bei der Abfassung des Mémoire vollständig ausgefüllt.

[2]) In dem citirten populären Aufsatze S. 162 (Abdruck bei Rudio: S. 150) sagt er ausdrücklich: Die Veranlassung aber, diese Formeln (nämlich

Digitized by Google

bar zuvor besprochenen allgemeineren Entwickelungen, so transformirt er zunächst $\operatorname{tang} v = \frac{\sin v}{\cos v}$ rein formal in einen Kettenbruch, indem er auf die beiden zur Darstellung von $\sin v$, $\cos v$ dienenden Potenzreihen das bekannte Euklidische Divisions-Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers anwendet. Schon hierbei zeigt sich ein merklicher Fortschritt, wenn man Lambert's Darstellungsweise mit derjenigen zeitgenössischer Autoren vergleicht: während diese sich in analogen Fällen begnügen, einige wenige Anfangsglieder zu bestimmen und das übrige der Induction überlassen, wobei noch überdies die Wahl einer ganzen Folge verschiedener Buchstaben für die in Betracht kommenden Grössen zumeist gar nicht gestattet, das allgemeine Gesetz mit genügender Deutlichkeit zu übersehen und zu formuliren, so bedient sich Lambert zur Bezeichnung der fraglichen Quotienten und Reste in ganz moderner Weise nur zweier Buchstaben Q, R mit laufenden Indices,[1]) findet Q', R', Q'', R'' durch direkte Rechnung und bestimmt sodann das allgemeine Bildungsgesetz durch den Schluss von n auf $n+1$. Das ist freilich nur eine Aeusserlichkeit: ich glaubte sie aber erwähnen zu müssen, weil sie mir bei einer Arbeit aus dem Jahre 1767 für die analytische Genauigkeit und Schärfe des Verfassers charakteristisch erscheint. In dieser Weise wird also zunächst der Kettenbruch für $\operatorname{tang} v$ mit aller irgend wünschenswerthen Praecision formal hergeleitet.

Nun aber stellt Lambert eine Betrachtung an, die mir — immer mit Rücksicht auf die Jahreszahl 1767 — geradezu erstaunlich dünkt. Während nämlich jeder seiner Zeitgenossen sich mit dieser formalen Ableitung sicherlich begnügt

---

die Kettenbrüche für $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $\operatorname{tang} x$) zu suchen, gab mir Herrn Euler's Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \ldots$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beispieles vorkommt."

[1]) Dieser Kunstgriff rührt von Leibniz her. Vgl. Gerhardt, Gesch. d. Math. p. 183.

Digitized by Google

hätte, ja während auch noch spätere und sogar weit grössere Mathematiker sich thatsächlich mit dergleichen begnügt haben, so stellt Lambert mit minutiöser Genauigkeit das Gesetz für die Bildung der Näherungsbrüche $\frac{A_n}{B_n}$ fest und beweist ganz direkt, dass nun auch wirklich: $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = \operatorname{tang} v$ wird. Jedem, der in derartigen Dingen einigermaassen versirt ist, wird dieser Schritt heutzutage ebenso nothwendig, wie natürlich erscheinen. Denn man weiss jetzt zur genüge, dass eine durch solche formale Operationen gewonnene „unendliche", d. h. allemal auf der Vernachlässigung irgend eines Restgliedes beruhende Entwickelung überhaupt gar nicht zu convergiren und, selbst wenn sie convergirt, noch keineswegs mit der erzeugenden Function überein zu stimmen braucht. Dass nun aber schon Lambert einen ausdrücklichen Convergenz- und Gültigkeits-Beweis für seine Kettenbruch-Entwickelung durchgeführt hat, muss um so bemerkenswerther erscheinen, wenn man bedenkt, dass Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) bezüglich der dort gegebenen Kettenbruch-Entwickelungen noch vollständig auf dem alten formalistischen Standpunkte steht: die Convergenz- und Gültigkeitsfrage wird mit keinem einzigen Worte berührt,[1]) dieselbe ist in der That erst in sehr viel späterer Zeit, insbesondere durch die mühsamen und eingehenden Untersuchungen von Heine[2]) und W. Thomé[3]) erledigt worden.[4])

Die Lambert'sche Arbeit giebt also das **erste** und auf längere Zeit hinaus auch **einzige** Beispiel einer nach heutigen Begriffen wirklich **strengen** Entwicke-

---

[1]) Werke, Bd. III, p. 134.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 34 (1847), p. 301; Bd. 57 (1860), p. 231.

[3]) Ibid. Bd. 66 (1866), p. 322. — Bd. 67 (1867), p. 299.

[4]) Die Skizze eines anderen, auf complexer Integration beruhenden Beweises hat sich bekanntlich in Riemann's Nachlass vorgefunden: Werke, p. 400.

Digitized by Google

lung gewisser Functionen in convergirende Kettenbrüche, insbesondere:

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{tang} v = \left[\frac{1}{1:v}, -\frac{1}{(2\nu+1):v}\right]_1^\infty$$

$\left(\text{und entsprechend für } \dfrac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$.

Der an Gl. (3) anknüpfende Irrationalitäts-Beweis für den Fall eines rationalen v nimmt sodann ungefähr folgenden Gang. Bezeichnet man mit φ, ω irgend zwei natürliche, relativ prime Zahlen und setzt:

$$\text{(4)} \qquad \sin\frac{\varphi}{\omega} = M, \qquad \cos\frac{\varphi}{\omega} = P,$$

so wird:

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P} = \left[\frac{\varphi}{\omega}, -\frac{\varphi^2}{(2\nu+1)\omega}\right]_1^\infty.$$

Alsdann lässt sich, wie unmittelbar zu sehen, dieser Kettenbruch durch das folgende unbegrenzte System von recurrenten linearen Gleichungen ersetzen:

$$\begin{array}{rcll}
\varphi P & = & \omega M & - R' \\
\varphi^2 M & = & 3\omega R' & - R'' \\
\varphi^2 R' & = & 5\omega R'' & - R''' \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\varphi^2 R^{(n-2)} & = & (2n-1) R^{(n-1)} & - R^{(n)}
\end{array}$$

oder, anders geschrieben:

$$\text{(6)} \qquad \left\{\begin{array}{llll}
1) & R' & = \omega M & - \varphi P \\
2) & R'' & = 3\omega R' & - \varphi^2 M \\
3) & R''' & = 5\omega R'' & - \varphi^2 R' \\
 & \cdot & \cdot & \cdot \\
n) & R^{(n)} & = (2n-1)\omega R^{(n-1)} & - \varphi^2 R^{(n-2)}.
\end{array}\right.$$

Die $R^{(n)}$ genügen also — abgesehen von den beiden Anfangsgleichungen (6_1), (6_2) genau derselben Recursionsformel (6_n),

Digitized by Google

wie die Zähler und Nenner der zum Kettenbruche (5) gehörigen Näherungsbrüche. Werden diese also etwa wieder mit A_n, B_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnet, so ergiebt sich mit Berücksichtigung jener Anfangsgleichungen (6_1), (6_2) die Beziehung:

$$(7) \qquad R^{(n)} = MB_n - PA_n = PB_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right).$$

Hieraus folgt, dass die $R^{(n)}$ durchweg von Null verschieden sind und mit unbegrenzt wachsendem n beliebig klein werden; die bei Gelegenheit des vorausgehenden Convergenz-Beweises durchgeführte Untersuchung der Näherungsbrüche zeigt nämlich, dass nicht nur $\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}$, sondern auch $B_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right)$ mit $\lim n = \infty$ gegen Null convergirt.

Angenommen nun, es wäre $\frac{M}{P}$ rational, also etwa:

$$(8) \qquad \frac{M}{P} = \frac{m}{p},$$

wo m, p natürliche, relativ prime Zahlen. Alsdann kann man setzen:

$$(9) \qquad \frac{M}{m} = \frac{P}{p} = D, \quad \text{also: } M = m \cdot D, \quad P = p \cdot D,$$

wo D eine ganz bestimmte Irrationalzahl bedeutet (da von den Zahlen $M = \sin\frac{\varphi}{\omega}$, $P = \cos\frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{1 - M^2}$ unter allen Umständen mindestens eine irrational sein muss. Multiplicirt man nun die Gleichungen (6) mit $\frac{1}{D}$, so gehen sie in die folgenden über:

Digitized by Google

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{R'}{D} = \omega m - \varphi p \\ \dfrac{R''}{D} = 3\omega \dfrac{R'}{D} - \varphi^2 m \\ \dfrac{R'''}{D} = 5\omega \dfrac{R''}{D} - \varphi^2 \cdot \dfrac{R'}{D} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{R^{(n)}}{D} = (2n-1)\omega \dfrac{R^{(n-1)}}{D} - \varphi^2 \dfrac{R^{(n-2)}}{D} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

welche zeigen, dass $\frac{R'}{D}$, also auch $\frac{R''}{D}, \ldots \frac{R^{(n)}}{D} \ldots$ durchweg ganze Zahlen sein müssten. Man hätte also ein unbegrenztes System von Null verschiedener und schliesslich beliebig klein werdender ganzer Zahlen, was unmöglich ist. Somit muss tang $\frac{\varphi}{\omega}$ irrational sein.

Dies also ist den Hauptzügen der angeblich so unzulängliche Lambert'sche Beweis: mir erscheint er ausserordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei.

Ich komme nun schliesslich auf den Antheil Legendre's an dem fraglichen Irrationalitäts-Beweise su sprechen. Legendre leitet in der bekannten Note IV seiner Élements de géométrie zunächst die erforderlichen Kettenbruch-Entwickelungen von neuem ab.[1]) Sein recursorisches Verfahren ist merklich, einfacher und eleganter als die etwas schwerfällige Divisions-Methode Lambert's. Aber, da jeglicher Convergenz- und Gültigkeitsbeweis fehlt, so bleibt Legendre in Bezug auf Strenge hinter Lambert weit zurück. — Nun folgt jener Hülfssatz, welcher den eigentlichen Kern des Legendre'schen Irrationalitäts-Beweises bildet, nämlich:

[1]) Rudio, p. 159 ff.

Digitized by Google

Bedeuten m, n, m', n' etc. ganze positive oder negative Zahlen von der Art, dass $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, etc. ächte Brüche sind, so hat der Kettenbruch: $\frac{m|}{|n} + \frac{m'|}{|n'} + \frac{m''|}{|n''} + \ldots$ einen irrationalen Werth.

Hier muss gesagt werden, dass das von Legendre angewendete Beweis-Princip, welches auf der völlig unbewiesenen Supposition beruht, dass der Kettenbruch selbst und jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehende ohne weiteres einer bestimmten Zahl gleich gesetzt werden dürfe, direkt unrichtig ist. Thatsächlich lässt sich nach dieser Methode alles mögliche, richtiges und falsches beweisen. Man könnte z. B. mit genau demselben Maasse von Strenge, welches dem fraglichen Legendre'schen Beweise innewohnt, zeigen, dass unter den periodischen Kettenbrüchen mit lauter reellen Gliedern unendlich viele mit complexen Grenzwerthen vorkommen. Mit anderen Worten: der Legendre'sche Beweis hat überhaupt erst einen Sinn, wenn die Convergenz und sogar (nach der in der vorangehenden Mittheilung benützten Terminologie) die unbedingte Convergenz jener Kettenbrüche wirklich feststeht. Die entsprechenden Convergenz-Beweise und zwar zunächst nur für die besonderen Fälle, dass alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ positiv oder alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ negativ, sind aber erst um die Mitte unseres Jahrhunderts geliefert worden,[1]) und consequenter Weise findet man auch in den Lehrbüchern der Analysis die Gültigkeit des obigen Satzes auf diese besonderen Fälle eingeschränkt.[2]) Dass dieser letztere sogar in dem von Legendre ausgesprochenen weiteren Umfange d. h. bei ganz beliebigen Vorzeichen der $m^{(\nu)}$, $n^{(\nu)}$

---

[1]) Vgl. die vorige Mittheilung, p. 311.

[2]) Stern, Algebr. Anal. p. 482. 484. Schlömilch, Algebr. Anal. p. 303. Stolz, Allgem. Arithm. Bd. II, p. 297.

Digitized by Google

gilt, habe ich in dem eben citirten Aufsatze gezeigt. Aber alles dies ist doch bis zu einem gewissen Grade ein reiner Glücksfall: auf Grund des Legendre'schen Beweises allein brauchte der Satz für keinen einzigen Fall richtig zu sein. Er gewinnt überhaupt erst in dem Augenblicke eine reale Existenz, wo die nöthigen Convergenz-Beweise erbracht sind. Und wenn er speziell auf den Kettenbruch für tang x anwendbar erscheint, so ist das doch schliesslich nur deshalb der Fall, weil Lambert dessen Convergenz wirklich bewiesen hat.[1]) Dabei kann dann aber immer nur von einer (nicht einmal allzu erheblichen) Abkürzung, dagegen in keiner Beziehung von einer wirklichen Ergänzung des Lambert'schen Beweises die Rede sein. Da mir dieser letztere weit öfter abfällig beurtheilt,[2]) als gründlich studirt worden zu sein scheint, so hielt ich es im Interesse der historischen Gerechtigkeit für geboten, seine Vorzüge, sowie die Mängel der nach meiner Ansicht über Gebühr gepriesenen Legendre'schen Beweisführung in ein etwas helleres Licht zu setzen.

---

[1]) Vgl. p. 332. — Dass diese Convergenz eine unbedingte ist, kann dann leicht erschlossen werden.

[2]) Vgl. z. B. Bachmann, a. a. O.

Digitized by Google

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1898.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XX, part 2. 1897. 8⁰.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Rad. Vol. 132. 133. 1897. 8⁰.
Monumenta spectantia historiam Slavorum merid. Vol. XXIX. 1897. 8⁰.
Djela. Vol. XVIII. 1897. 4⁰.
Natko Nodilo, Znanstvena djela. Knjiga I. 1898. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik. Svezak 2. 1897. 8⁰.

Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:

Mittheilungen. Band XI, Heft 1. 1898. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Mémoires Documents inédits. Tome XIV, fasc. 1. 1897. 4⁰.
Album archéologique. Fasc. 12. 1897. fol.
Notice historique sur le canton de Bernaville (Somme) par Theodose Lefèvre. 1897. 8⁰.
Bulletin. Année 1896 No. 2—4; 1897 No. 1. 2. 8⁰.

Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:

Zeitschrift. Band XXIV. 1897. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Studies in Historical and Political Science. Ser. XV, No. 6—12. 1897. 8⁰.
Circulars. Vol. XVII, No. 134. 135. 1898. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIX, 4; XX, 1. 1897/98. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XVIII, 1—3. 1897. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. XIX, No. 5—10; Vol. XX, No. 1. 1897/98. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. VIII, No. 81, 1897, Vol. IX, No. 82—86. 1898. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VI. 1897. 4⁰.

Maryland Geological Survey in Baltimore:

Survey. Vol. I. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Kgl. Bibliothek in Bamberg:
Katalog der Handschriften. Bd. I, Abth. 1, Lfg. 2. 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Bamberg:
58. Bericht für das Jahr 1897. 1898. 8⁰.

R. Academia de ciencias in Barcelona:
Boletín. Año I, Vol. 1, No. 1. 1892. 4⁰.

Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:
22. Jahresbericht 1896/97. 1897. 8⁰.

Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:
Tijdschrift. Deel 40, afl. 1 en 2. 1897. 8⁰.
Notulen. Deel 35, afl. 1. 2. 1897. 8⁰.
Verhandelingen. Deel 49, stuk 3. 1897. 4⁰.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek. Deel XVI. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in Bayreuth:
Archiv. Band XX, 2. 1897. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:
Glas. No. LIII. 1898. 8⁰.
Spomenik. No. XXXI. 1898. 4⁰.
Godischnijak X, 1897. 1898. 8⁰.
M. Tsch. Militschewitsch Manastir Kalenitsch 1898. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):
G. O. Sars, An Account of the Crustacea. Vol. II, part 9. 10. 1898. 4⁰.
Aarbog for 1897. 1898. 8⁰.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:
Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXIV. 1897. 8⁰.
Acta borussica. Bd. II der Behördenorganisation. 1898. 8⁰.
Abhandlungen aus dem Jahre 1897. 4⁰.
Sitzungsberichte. 1897, No. XL—LIII; 1898, No. I—XXIII. 4⁰.
Corpus inscriptionum latinarum. Vol. IV, Supplementum. 1898. fol.

K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:
Abhandlungen. N. F. Heft 26—28. 1897. 4⁰.

Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:
Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Dez. 1897 v. Th. Albrecht. 1898. 4⁰.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:
Berichte. 30. Jahrg., No. 19. 20; 31. Jahrg., No. 1—10. 1898. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:
Zeitschrift. Band 49, Heft 3. 4. 1897. 8⁰.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:
Verhandlungen 1897. Band 28. 1898. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:
Die Fortschritte der Physik im Jahre 1892, 3 Bände. Braunschweig 1898. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 16, 1897, No. 11. 12; Jahrg. 17, 1898, No. 1—6. 8⁰.
Namenregister zu Bd. 21—43. II. Hälfte. 1898. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:
Centralblatt für Physiologie. Bd. XI, No. 20—26; Bd. XII, No. 1—7. 1897/98. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1897—98, No. 1—4. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

K. technische Hochschule in Berlin:

Otto N. Witt, Die Lebensbedingungen der modernen chemischen Industrie. Rede. 1898. 4⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XII, 4; XIII, 1. 1898. 4⁰. Ergänzungsband IV Alterthümer von Hierapolis.

Mittheilungen (römische Abtheilung). Bd. XIII, fasc. 1. Rom 1898. 8⁰.

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Die Feier des 50jährigen Bestehens des k. meteorologischen Instituts am 16. Oktober 1897. 1898. 4⁰.

Veröffentlichungen 1896. Heft 2. 1898. 4⁰.

Ergebnisse der meteorolog Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896. 1898. 4⁰.

Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1895 u. 96. 1898. 4⁰.

Verhandlungen der Konferenz der Vorstände deutscher meteorologischer Zentralstellen, Oktober 1897. 8⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band XXVI, Heft 4. 1898. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Katalog der Bibliothek, VI. Auflage. 1897. 8⁰.

Gartenflora. Jahrg. 1898, Heft 1—13. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XI, 1. Hälfte. Leipzig 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XIII, Heft 1—6. 1898. 4⁰.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 18. Jahrg., 1898, Heft 1—6. 4⁰.

Société d'Émulation du Doubs in Besançon:

Mémoires. VI. Série, Vol. 10. 1895. 1896. 8⁰. VII. Série, Vol. 1. 1896. 1897. 8⁰.

Gewerbeschule in Bistritz:

XXII. Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

Observatorio in Bogota:

Latitud del Observatorio de Bogota. Por Julio Garavito 1897. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto Bologna:

Memorie. Ser. V, Tom. 5, fasc. 1—4. 1895—96. 4⁰.

Renticonto. Nuova Serie, Vol. 1, 1896—97. 1897. 8⁰.

R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:

Atti e Memorie. Serie III, Vol. XV, 1—3. 1897. 4⁰.

Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:

Sitzungsberichte 1897, II. Hälfte. 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 102. 1898. 4⁰.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:

Verhandlungen. 54. Jahrg., II. Hälfte. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Procès-verbaux des séances 1894/95, 1895/96 et 1896/97. 8⁰.
Esquisse d'une carte géologique des environs de Bordeaux par E. Fallot. (1 Blatt.) 1895.
Mémoires. V. Série, Tome 1, cahier 1. 2; Tome 2, cahier 1. 2. 1895/96. 8⁰.
Observations pluviométriques 1894/95, 1895/96. 1896/97. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 50. 1896. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1897, No. 23. 24; 1898, No. 1—12. 1897/98. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 33, No. 5—12. 1897/98. 8⁰.

American Philological Association in Boston:

Transactions. Vol. 28. 1897. 8⁰.

Geschäftsführung der 69. Plenarversammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Braunschweig:

Festschrift der herzogl. technischen Hochschule. 1897. 8⁰.
Die medicin. Festschrift: Beiträge zur wissenschaftl. Medicin. 1897. 8⁰.
Festgruss des Vereins für Naturwissenschaft. 1897. 8⁰.
Tageblatt der Versammlung. 1897. 4⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:

Abhandlungen. Band XIV, 3. 1898. 8⁰.
Beiträge z. nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. Heft 2. 1897. 8⁰.

Queensland Museum in Brisbane:

Annals No. 4. 1897. 8⁰.

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 2. Jahrg., 1. u. 2. Heft. 1898. 8⁰.

Naturforschender Verein in Brünn:

Verhandlungen. Band 35, 1896. 1897. 8⁰.
XV. Bericht der meteorol. Commission, 1895. 1897. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Mémoires couronnés. Tome XV, fasc. 2. 3. 1898. 8⁰.
Bulletin. IV. Série, Tome XI, No. 11. 1897. Tome XII, No. 1—5. 1898. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série, Tome 34, No. 12, 1897; Tome 35, No. 1—5. 1898. 8⁰.
Annuaire 1898. 64ᵉ année. 8⁰.
Programme du concours 1898 et 1899. 1898. 8⁰.
Classe des lettres. Concours pour les années 1897—99. 1897. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 16, fasc. 4. 1897. Tome 17, fasc. 1. 2. 1898. 8⁰.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 41. 1897. 8⁰.
Mémoires. Tome 6. 1897. 8⁰.

Société belge de géologie in Brüssel:

Bulletin. Tome X, 2. 3. XI. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Observatoire Royale in Brüssel:

Annales. Nouv. Sér.
Annales astronomique. Tome 7.
Annales météorologique. Tome 3. 4. 1895—96. 4⁰.
Annuaire. Année 56—64. 1889—97. 8⁰.
Bibliographie générale de l'astronomie par J. C. Houzeau et A. Lancaster. Tome I, 2. 1889. 4⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Mittheilungen. Band XI, 6—8. 1897. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 37, 10—12. 1897. Bd. 38, 1—4. 1898. 4⁰.
Jahresbericht für 1895. 1898. 4⁰.

K. ungarisches Ackerbauministerium in Budapest:

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. II. III. 1897. 4⁰.

Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:

Anales. Tomo XI. 1897. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen. No. XXII—XXIV. 1898. 4⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Ser. II. Vol. XV, Sect. istor; Vol. XVI, Sect. istor. sciintif.; Vol. XVII, Partea administrat. Sect. istor. 1895. 4⁰.
Actes et Documents rel. à l'histoire de la régénération de la Roumanie. Vol. I, 2; II—V; VI, 1; VII. 1888—92. 8⁰.
N. Manolescu, Igiena tĕranŭlŭi. 1895. 8⁰.
G. Crăiniceanu, Igiena tĕranŭlŭi Român. 1895. 8⁰.

Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:

Analele. Tom. XII, 1896. 1898. 4⁰.
Buletinul. Anul VI, 1897. 1898. 4⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 4e Sér., Vol. 10, fasc. 3. 4; 5e Sér., Vol. 1, fasc. 1. 1897. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review. August-Dezember 1897. Januar 1898. fol.
Rainfall of India 5th year 1895. 1896. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 901—909. 1897. 8⁰.
Journal. No. 362—369. 1897/98. 8⁰.
Proceedings. 1897, No. V—XI. 1898, No. I—IV. 8⁰.
The Kaçmīraçabdāmrta, a Kāçmīrī grammar by Içvara-Kaula. Ed. by G. A. Grierson. Part I. 1897. 4⁰.

Geological Survey of India in Calcutta:

Memoirs. Vol. 25. 26. 1895—96. 27, part 2. 1898. 4⁰.
Palaeontologica Indica. Ser. XV, Vol. I, 4, Vol. II, 1, Ser. XVI, Vol. I, part 1—3. 1895/97. fol.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:

Annals. Vol. 41, No. 5. 1898. Vol. 42, part 1. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. IX, 7. 8. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, 3. 4. 1898. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. 28, No. 4. 5; Vol. 31, No. 5—7; Vol. 32, No. 1—5. 1897/98. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:

Atti. Serie IV, Vol. 10. Anno 74. 1897. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 50—52. 1898. 8⁰.

Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1897. Berlin 1898. 4⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch. XIII. Jahrg. 1895, II. Hälfte; XIV. Jahrg. 1896, Abth. 1. 2. 1896/97. 4⁰.

Société des sciences naturelles in Cherbourg:

Mémoires. Tome 30. Paris 1896—97. 8⁰.

John Crerar Library in Chicago:

3d annual Report for 1897.

Field Columbian Museum in Chicago:

Publications. No. 22. 24. 25. 1897. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:

The Monist. Vol. 8, No. 2—4. 1898. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:

The Open Court. Vol. XII, No. 1—7. 1898. 4⁰.

Norsk Folkemuseum in Christiania:

Aarsberetning 1897. 1898. 4⁰.

Chemiker-Zeitung in Cöthen:

Chemiker-Zeitung 1898. No. 1—42. 45—52. fol.

Academia nacional de ciencias in Córdoba (Republ. Argent.):

Boletin. Tom. 14, No. 2. 1894. 15, No. 4. Buenos Aires 1898. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors am 4. Oktober 1897. 1898. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:

Quartalblätter. N. F., 1896, No. 1—4. 1897, No. 1—4. 8⁰.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tome VIII, 3. 4. Leiden 1897. 4⁰.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:

The Proceedings. Vol. 5. 1894—96. 8⁰.
Bulletin. No. 10 and 11 of 1897; No. 1 of 1898. 8⁰.

Académie des Sciences in Dijon:

Mémoires. IV. Série. Tome 5. 1896. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Vol. 18, trimestre 4. 1897. Vol. 19, trimestre 1. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Royal Irish Academy in Dublin:

Proceedings. Ser. III. Vol. IV, 4, 5. 1897/98 8⁰.
Transactions. Vol. 31, part 1—6. 1896—98. 4⁰.
List of the Members. 1898. 8⁰.

Royal Dublin Society in Dublin:

The Scientific Proceedings. N. S. Vol. VIII, part 5. 1897. 8⁰.
The Scientific Transactions. Series II. Vol. V, No. 13; Vol. VI, No. 2—13. 1896—97. 4⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:

The Journal. Vol. XX, No. 1—7. 1898. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. XXI, p. 473—549. 1897. Vol. XXII, No. 1. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. 28, part III, IV; Vol. 29, part I. 1896—98. 4⁰.

Geological Society in Edinburgh:

Transactions. Vol. VII, 3. 1897. 8⁰.
Rolland Lans of the Edinburgh Geological Society. 1897. 8⁰.

Scottish Microscopical Society in Edinburgh:

Proceedings. Vol. 2, No. 2. 1897. 8⁰.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1896—97. 1897. 8⁰.

Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:

Jahresbericht f. d. J. 1897—98. 1898. 4⁰.

K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:

Jahrbücher. N. F. Heft 24. 1898. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Band XXI, 1; XXIV, 1. 2. 1897. 4⁰.
Katalog der Reptilien-Sammlung, Theil II. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:

Helios. Band XV. Berlin 1898. 8⁰.
Societatum Litterae. Jahrg. XI, 1897, No. 7—12; XII, 1898, 1—4. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i/Br.:

Berichte. Bd. X, Heft 1—3. 1897—98. 8⁰.

Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i/Br.:

Freiburger Diöcesan-Archiv. 26. Band. 1898. 8⁰.

Universität Freiburg in der Schweiz:

Index lectionum per menses aestivos anni 1898. 8⁰.
Behörden, Lehrer und Studirende. Sommer-Semester 1898. 8⁰.

K. Gymnasium in Fürth:

Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

Société d'histoire et d'archéologie in Genf:

Bulletin. Tome II, livr. 1. 1898. 8⁰.

Museo civico di storia naturale in Genua:

Annali. Serie II. Vol. XVIII. 1897. 8⁰.

Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:

Mittheilungen. N. F. 7. Band. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:

Neues Lausitzisches Magazin. Band 73, Heft 2. 1897. Band 74, Heft 1. 1898. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1898. No. I—VII. Berlin. 4⁰.
Nachrichten. a) Mathem.-phys. Classe. 1897, Heft 3. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.
b) Philol.-hist. Classe. 1897, Heft 3. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.
c) Philos.-hist. Classe. Geschäftliche Mittheilungen. 1897, Heft 2. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.
Abhandlungen. N. F. Bd. I, No. 1 u. 2. N. F. Bd. II, No. 4—6. Berlin 1898. 4⁰. Mathem.-physikal. Classe.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):

The Journal. Vol. VII, No. 3. 4. 1898. 8⁰.

Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:

Bulletin. Vol. IX, part 2. 1897. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:

Mittheilungen. 29. Jahrgang 1897. Berlin 1898. 8⁰.

Fürsten- und Landesschule in Grimma:

Jahresbericht von 1897—98. 1898. 4⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:

Bijdragen. VI. Reeks. Deel V, aflev. 1. 2. 1898. 8⁰.
Naamlijst der leden. 1898. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Sér. II. Tome 1, livr. 4. 5. La Haye 1898. 8⁰.

Nova Scotian Institute of Science in Halifax:

The Proceedings and Transactions. Vol. IX, part 3. 1897. 8⁰.

K. K. Obergymnasium zu Hall in Tirol:

Programm für das Jahr 1897/98. Innsbruck 1898. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 33, No. 12. 1897. Heft 34, No. 1—6. 1898. 4⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 51, Heft 4. 1897. Band 52, Heft 1. 1898. Leipzig. 8⁰.
Indische Studien. Bd. XVIII. Leipzig 1898. 8⁰.

Universität in Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Halbjahr 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 70, Heft 3—6. Leipzig 1898. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Neue Mittheilungen. Band 19, Heft 1. 1898. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Hamburg:

Mitteilungen. Band III, 8. Leipzig 1898. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Mitteilungen. 18. Jahrgang 1896/97. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Verhandlungen. 1897. IV. Folge. V. 1898. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:

Festschrift zur Feier des 100jährigen Bestehens. 1897. 8⁰.
Flora der Provinz Hannover von W. Brandes. 1897. 8⁰.
Verzeichnis der im Provinzialmuseum zu Hannover vorhandenen Säugetiere. 1897. 8⁰.
Katalog der Vogelsammlung aus der Provinz Hannover. 1897. 8⁰.
Katalog der systematischen Vogelsammlung des Provinzialmuseums in Hannover. 1897. 8⁰.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Zeitschrift. Jahrgang 1897. 8⁰.

Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. VIII, Heft 1. 1898. 8⁰.

Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:

Der Obergermanisch-Raetische Limes. Lfg. I—VIII. 1894—97. 4⁰.
Limesblatt. No. 1—28. Trier 1892—98. 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Observations de l'Institut météorologique central. Vol. XV, livr. 1 und Résumé des années 1881—90. 1897. fol.

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:

Archiv. N. F. Band XXVIII, Heft 1. 1898. 8⁰.
Urkundenbuch zur Geschichte der Deutschen in Siebenbürgen. Band II. 1897. gr.-8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:

Schriften. 28. u. 29. Heft. 1897/98. 8⁰.

Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:

Jahrbuch. XXV. Jahrg. 1898. 8⁰.

Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:

Iswestija. Bd. 28, No. 4. 1897. Bd. 29, No. 1. 1898. 8⁰.
Sapiski. Tom. I, Heft 1. 3; II, Heft 1. 3; III, Heft 1. 1889—96. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:

The Journal. Vol. I, No. 12. 1897. Vol. II, No. 1—3. 5—6. 1898. 8⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band XXXI, Heft 3 u. 4. Band XXXII. 1898. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):

Sitzungsberichte. Band XI. Jurjew 1898. 8⁰.

Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:

Jahresbericht des Centralbureaus f. d. J. 1897. 1898. 4⁰.

Société physico-mathématique in Kasan:

Bulletin. II. Série. Tome VII, No. 4; VIII, No. 1. 1898. 8⁰.

Universität Kasan:

Utschenia Sapiski. Bd. 64, Heft 12. 1897. Bd. 65, Heft 1—4. 1898. 8⁰.
7 medicinische Dissertationen von 1897/98.

Digitized by Google

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Band XXII. 1897. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrgang 1896. 1897. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:
Abhandlungen und Bericht XLII. 1897. 8⁰.

Société mathématique in Kharkow:
Communications. 2e Série, Tome VI, No. 2. 3. 1897. 4⁰.

Société de médecine in Kharkow:
Travaux 1896. No. 1. 1897. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
Sapiski 1898. Band 1—3. 8⁰.
Annales 1897. Heft 4. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Band 37, No. 11. 12. 1897. Band 38, No. 1—5. 1898. 8⁰.

Medic.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:
Értesitö. 2 Hefte. 1897. 8⁰.

Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:
Schriften. 38. Jahrgang. 1897. 4⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:
Oversigt. 1897, No. 6; 1898, No. 1—3. 8⁰.
Mémoires. 6e Série. Section des Lettres, Tome IV, 4; Section des Sciences, Tome VIII, 6. 1898. 4⁰.

Nordiska Museet in Kopenhagen:
Samfundet för Nordiska Museets främjande 1895 och 1896. 1897. 8⁰ nebst 5 kleineren Schriften.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:
Aarböger. II. Raekke, 12. Bind, 4. Heft und Tillaeg. 1897. 13. Bind, 1. Heft. 1898. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1897. 1898. 8⁰.

Genealogisk Institut in Kopenhagen:
Etatsraad Knud Nicolai Knudsens Ungdomserindringer. I uddrag meddelte af Sofus Elvius. 1898. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:
Anzeiger. 1897, December; 1898, Januar—Mai. 8⁰.
Rozprawy. Ser. II. Tom. 11. 1897. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 34. 35. 1897. 8⁰.
Rocznik. Rok 1896/97. 1897. 8⁰.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 16. 1897. 8⁰.
Acta Rectoralia. Tom. 1, fasc. 4. 1897. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyograf. Tom. 32. 1897. 8⁰.
M. Federowski, Lud Biatoruski. Tom. 1. 1897. 8⁰.
F. Kiekosiński, Rycerstwo Polskie. Tom. 1. 2. 1896. 8⁰.

Botanischer Verein in Landshut:
15. Bericht über d. J. 1896—97. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:
Bulletin. IV. Série, Vol. 33, No. 126. 127. 1897/98. 8⁰.

Digitized by Google

Kansas Academy of Science in Lawrence, Kansas:
Transactions. Vol. XV. Topeka 1898. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:
The Kansas University Quarterly. Vol. VI, No. 4, Series A u. B. 1897. Vol. VII, Serie A, No. 1. 1898. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:
Tijdschrift. N. Serie. Deel XVII, 1. 2. 1898. 8⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:
Archiv. II. Reihe. Band 16, Heft 2. 1898. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIV, No. 2. 3. 1898. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 50, No. 2.
Berichte der mathem.-physik. Classe. 1897, V, VI. 1898, I. II. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:
Journal. N. F. Bd. 56, Heft 10—12; Bd. 57, Heft 1—9. 1897/98. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Leipzig:
Mittheilungen 1897. 1898. 8⁰.

Anthropologischer Verein in Lemberg:
Lud. Organ des anthropologischen Vereins in Lemberg. Tom. IV, Heft 1. 2. 1898. 8⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:
Boletin. 16. Serie, No. 7. 8. 1897. 8⁰.

Université Catholique in Loewen:
Annuaire 1898. 8⁰.
Schriften der Universität a. d. J. 1891—97. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:
La Cellule. Tome XIII, 2. 1897. Tome XIV, 1. 4⁰.

Royal Institution of Great Britain in London:
Proceedings. Vol. XV, part 2. 1898. 8⁰.

The English Historical Review in London:
Historical Review. Vol. XIII, No. 49. 50. 1898. 8⁰.

Royal Society in London:
Year-Book 1897—8. 8⁰.
Proceedings. Vol. 62, No. 382—388. Vol. 63, No. 389—398. 1898. 8⁰.

R. Astronomical Society in London:
Monthly Notices. Vol. 58, No. 2—7. 1897/98. 8⁰.

Chemical Society in London:
Journal. No. 422—427 (January—June 1898). 8⁰.
Proceedings. No. 187—197. Session 1897/98. 8⁰.

Geological Society in London:
The quarterly Journal. Vol. 53, part 1—4. 1897. 8⁰.
Geological Literature 1896. 1897. 8⁰.

Royal Microscopical Society in London:
Journal. 1898, part 1—3. 8⁰.

Digitized by Google

Zoological Society in London:

Proceedings. 1897. Part IV. 1898. Part I. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. XIV, part 5. 6. 4⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. No. 1472—1495. 1898. 4⁰.

Missouri Botanical Garden in St. Louis:

3d and 9th annual Report. 1892 u. 1898. 8⁰.

Société géologique de Belgique in Lüttich:

Annales. Tome 22, livr. 3; Tome 23, livr. 3; Tome 24, livr. 2; Tome 25, livr. 1. 1894—98. 8⁰.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. II. Série, Tome 20. Bruxelles 1898. 8⁰.

Universität in Lund:

Acta Universitatis Lundensis. Tom. 33, afdel. 1. 2. 1897. 4⁰.

Société botanique in Luxemburg:

Récueil des mémoires et des travaux. No. XIII. 1890—96. 1897. 8⁰.

Académie des sciences in Lyon:

Mémoires. Sciences et Lettres. IIIe Série. Tome 4. Paris 1896. gr.-8⁰.

Société d'agriculture science et industrie in Lyon:

Annales. VII. Série. Tome 4. 1896. 1897. gr.-8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:

Annales. Tome 43. 1896. gr.-8⁰.

R. Academia de ciencias exactas in Madrid:

Memorias. Tomo XVII. 1897. 4⁰.
Discursos leidos en la recepción pública de Pr. M. Sagasta. 1897. 4⁰.
Anuario 1898. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:

Boletin. Tomo 32, cuad. 1—6. 1898. 8⁰.

Biblioteca Nazionale di Brera in Mailand:

Lud. Frati, I Codici Morbio della R. Biblioteca di Brera. Forli 1897. 4⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:

Memorie. Vol. XVIII, fasc. 5. 1898. 4⁰.

R. Osservatorio astronomico in Mailand:

Osservazioni meteorologiche eseguite nell' anno 1897. 1898. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:

Atti. Vol. 37, fasc. 2. 1898. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 24, fasc. 16. 1897. Anno 25, fasc. 17. 18. 1898. 8⁰.

Ortsausschuss für deutsche Nationalfeste in Mainz:

Die Reichsfeststätte bei Mainz. Denkschrift. 1897. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:

Memoirs and Proceedings. Vol. 42, part I. II. 1898. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:

Annales. Tome VIII, fasc. 5—10 et tables. 1898. 4⁰.

Digitized by Google

Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:
Jahresbericht für das Jahr 1897/98. 1898. 4⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:
Transactions and Proceedings. Vol. XXII, XXIII, XXIV, part I. II. New Series. Vol. I—IX, X, part I. 1888—97. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:
Rivista. Anno III, fasc. 1. 1898. 8⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:
Boletin mensual. Octubre—Diciembre 1897. Enero, Febrero 1898. 4⁰.
Resumenes mensuales de 1891 y 1892. 1897. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:
Memorias. Tomo 10, No. 5—10. 1897. Tomo 11, No. 1—4. 1898. 8⁰.

Amministrazione delle Pubblicazioni Cassinesi in Montecassino (Caserta):
Spicilegium Casinense. Tomus III, pars prior. 1897. 4⁰.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Anuario estadístico de l'Uruguay. Año 1896. 1898. 4⁰.

Académie de sciences et lettres in Montpellier:
Mémoires. Section des lettres. 2ᵉ Série. Tome 1, No. 5—7. Tome 2, No. 1.
Section des sciences. 2ᵉ Sér. Tome 2, No. 2—4. 1895—97. 8⁰.

Numismatic and Antiquarian Society in Montreal:
The Canadian Antiquarian. IIIᵈ Series. Vol. I, No. 2. 1898. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1897, No. 2—4. 1897/98. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau:
Matematitscheskij Sbornik. Band I—XX. 1866—97. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:
Münchener Jahresübersichten für 1896 (Mitteilungen XVI, 1). 1898. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt. Jahrg. 28, No. 11. 12. 1897. Jahrg. 29, No. 1—6. 1898. 4⁰.

K. Armeebibliothek in München:
I. Nachtrag zum Bücherkatalog der k. Armeebibliothek vom Jahr 1885. 1898. 8⁰.

K. bayer. technische Hochschule in München:
Personalstand. Sommer-Semester 1898. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1898. 8⁰.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1898, No. 1—18. 8⁰.

K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:
Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Heft V. Berlin 1898. fol.

Universität in München:
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Sommer-Semester 1898. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. Winter-Semester 1898/99. 4⁰.

Digitized by Google

Aerztlicher Verein in München:

Sitzungsberichte. Vol. VII, 1897. 1898. 8⁰.

Historischer Verein in München:

Monatsschrift. 1898, No. 1—4. 8⁰.

K. Oberbergamt in München:

Geognostische Jahreshefte. IX. Jahrgang 1896. Cassel 1897. 4⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:

Hochschul-Nachrichten. 1898, No. 88—93 (Januar—Juni). 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. 19. Jahrgang, Heft 1—3. 1897/98. 4⁰.

Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. 1897, November—December. 1898, Januar—Mai. fol.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:

25. Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:

Mémoires. 5e Série. Tome 14. 1897. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Série II. Tome 14, fasc. 31, 1896. 1897. 8⁰.

Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:

Atti. Vol. 29. 1898. 8⁰.

Rendiconto. Anno 36. 1897. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:

Rendiconto. Serie 3. Vol. 3, fasc. 12. 1897. Vol. 4, fasc. 1—5. 1898. 4⁰.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. 13. Band, Heft 1 u. 2. Berlin 1898. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):

Transactions. Vol. 46, part 6; Vol. 47, part 2. 3. 1898. 8⁰.

An Account of the Strata of Northumberland U—Z. 1897. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:

Journal. IV. Series. Vol. V, No. 25—29. Vol. VI, No. 31. 1898. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:

Bulletin. Vol. IX. 1897. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. 29, No. 4. 1897. Vol. 30, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

Archaeological Institute of America in New-York:

American Journal of Archaeology. Vol. XI, No. 4. (Oct.—Dec. 1896.) II. Series. Vol. I, No. 1. 2. 4. 5. 1897/98. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:

Jahresbericht 1895, 1896 u. 1897. 1896—98. 8⁰.

Mittheilungen. Heft XII, Abth. 1. 2. 1896—98. 8⁰.

Des Hieronymus Braun Prospekt der Stadt Nürnberg vom Jahre 1608. 1896. fol.

Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:

Anzeiger. Jahrgang 1897. 8⁰.

Mittheilungen. Jahrgang 1897. 8⁰.

Katalog der Gewebesammlung. Th. I. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:

Sapiski. Tom. XVIII, XXI, 2; XXII, 1. 1897—98. 8⁰.

Historischer Verein in Osnabrück:

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band III, Heft 1. 1898. 8⁰.

Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:

Mittheilungen. 22. Band, 1897. 1898. 8⁰.

Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Paderborn:

Zeitschrift für vaterländische Geschichte. Bd. 55 und Ergänzungsheft I, Liefg. 4. Münster 1897. 8⁰.

R. Accademia di scienze in Padua:

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. XIII. 1897. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tomo XII, fasc. 1—4. 1898. 4⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno 1897, Agosto—Dicembre. 1898, Gennaio—Aprile. 1897—98. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapport sur les vaccinations pendant l'année 1894 et 1895. Melun 1896. 4⁰.
Rapports annuels de la Commission permanente de l'hygiène de l'enfance pour l'année 1895 et 1896. 1895/96. 8⁰.
Memoires. Tome 36, fasc. 1. 2; Tome 37, fasc. 1. 2. 1891—95. 4⁰.
Bulletin. 1898, No. 1—27. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Série I. Tome 9. 10. 1896/97. Série II. Tome 3. 1897. 4⁰.
Comptes rendus. Tome 126, No. 1—26. 1898. 4⁰.

Bibliothèque nationale in Paris:

Notice sur les manuscrits syriaques acquis depuis 1874. Par J. B. Chabot. 1896. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. II. Série. 2ᵉ cahier. 1897. 4⁰.

Comité international des poids et mesures in Paris:

Procès-verbaux des séances de 1897. 8⁰.

Ministère de l'instruction publique in Paris:

Bibliographie des travaux scientifiques des sociétés savantes de la France par J. Deniker. Tome 1, livr. 2. 1897. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 671 (Nov. 1897), Livr. 674—679 (Février-Juillet 1898). 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Petit Guide illustré, par L. de Milloué. Nouv. récension. 1894. 8⁰.
Annales in 4⁰. Tome XXVI, part 2. 3. 1897.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 33, No. 3; Tome 34, No. 1—3; Tome 35, No. 1—3; Tome 36, No. 1. 2. 1896/97. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1896, No. 7. 8. Année 1897, No. 1—8. 8⁰.
Nouvelles Archives. Sér. III. Tome VIII, fasc. 1. 2. 1896. Tome IX, fasc. 1. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série, Tome VII, 5. 6. 1896. Tome VIII, 1—4. 1897. 8⁰.

Société des études historiques in Paris:

Revue. 63e année 1897, No. 4, 64e année 1898, No. 1—3. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1897, No. 18—20; 1898, No. 1—5. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome 17, 4e trimestre; Tome 18, 3e trimestre; Tome 19, 1e trimestre. 1896/98. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 25, No. 8. 9 et dernier. 1897. Tome 26, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

Mémoires. VIIIe Série. 1. Classe historico-philologique, Vol. I, No. 7, Vol. II, No. 1. 2. 2. Classe physico-mathématique, Tome 5, No. 6—13. Tom. 6, No. 1—3. 5. 1897—98. 4⁰.
Byzantina Chronika. Tom. IV, 3 u. 4. 1897. 4⁰.
Bulletin. V. Série, Tome VII, No. 2.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. 1897, XVI, 3—9. 8⁰.

Kaiserlich russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:

Sapiski. Orientalische Abtheilung. Bd. 10, Heft 1—4. 1897. 4⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 35, Lfg. 1. 1897. 8⁰.
Sach- und Namenregister der II. Serie 1885—1895. 1898. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. 29, No. 9, 1897; Tom. 30, No. 1 u. 2. 3. 1898. 8⁰.

Musée zoologique de l'Académie Impériale in St. Petersburg:

Annuaire 1897. No. 4. 8⁰.

Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:

Annalen. Jahrg. 1896, partie I. II. 1897. 4⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Godischni Akt (Jahrbuch). 1898. 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1897, part II. III. 8⁰.

American pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 45th Meeting at Lake Minnetonka, August 1897. 8⁰.

Geographical Society in Philadelphia:

Charter, By-Laws, List of Members. 1898. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 34, No. 1—5. 1898. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 36, No. 156. 1897. 8⁰.

R. Scuola normale superiore di Pisa:

Annali. Vol. XIX. 1897. 8⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. X, p. 243—292; Vol. XI, p. 1—10. 1897—98. 4⁰.

Digitized by Google

K. Gymnasium in Plauen:

Jahresbericht für 1897/98 nebst Programm. 1898. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. 12. Jahrg., Heft 2—4. 1897. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Die Polhöhe von Potsdam, Heft I. Berlin 1898. 4⁰.
Bestimmungen von Azimuten im Harzgebiete. Berlin 1898. 4⁰.

Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:

Publicationen. Bd. XI. 1898. 4⁰.

Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. I, 3; II, 1. 1898. 8⁰.
Mittheilung. No. VIII. 1898. 8⁰.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1897. 1898. 8⁰.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Památník na oslavu stých narozenin Františka Palackeko. 1898. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1897. 1898. 8⁰.
Sitzungsberichte 1897. a) Classe für Philosophie, 1897. b) Mathem.-naturw. Classe, 1897. I. II. 1898. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Bd. 26, No. 4; Bd. 27, No. 3 u. 5. 1898. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Bericht über das Jahr 1897. 1898. 8⁰.

Museum des Königreichs Böhmen in Prag:

Památky. Vol. 17, sešit 4—8; Vol. 18, sešit 1. 2. 1896—98. 4⁰.
Časopis. Bd. 71, Heft 1—6. 1897. 8⁰.

K. K. Sternwarte in Prag:

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1897. 58. Jahrgang. 1898. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1897/98. 1897. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. 8⁰.

Zeitschrift „Krok" in Prag:

„Krok". Bd. XII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:

Verhandlungen. Jahrg. 1894—96, N. Folge, Heft 9. 1897. 8⁰.

Archaeological Institute of America in Princeton (New-Jersey):

American Journal of Archaeology. Vol. XI, No. 1—4; XII, No. 1—4. 1895—96. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. VI, Semestre 2, fasc. 12; Vol. VII, Semestre 1, fasc. 1—11. 1897—98. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. 4, parte 1. Memorie. Vol. 5, parte 2. Notizie degli scavi. Novembre-Decembre 1897. Gennaio-Marzo 1898. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. VI, fasc. 11. 12. 1897. Vol. VII, fasc. 1—4. 1898. 8⁰.
Annuario 295 (1898). 8⁰.

Digitized by Google

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:
Atti. Anno 51, Sessione I—III. 1897/98. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:
Bollettino. Anno 1897, No. 3. 4. 8⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:
Mittheilungen. Band XII, fasc. 3. 4. 1898. 8⁰.

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:
Indici e cataloghi IV. I. codici Palatini. Vol. 2, fasc. 5. 1897. 8⁰.
Le opere di Galileo Galilei. Vol. VII. Firenze 1897. 4⁰.

R. Corpo delle miniere, Ufficio geologico in Rom:
Carta geologica delle Alpi Apuane in 4 fogli e 3 tavole di sezioni. 1897. fol.

Service de la carte géologique d'Italie in Rom:
Carte géologique d'Italie feuilles 236—238, 241—243, 245—247, 255, 263, 264 et Table 1. 2. 1897. fol.

R. Società Romana di storia patria in Rom:
Archivio. Vol. XX, fasc. 3. 4. 1897. 8⁰.

Société Batave de philosophie experimentale in Rotterdam:
Programme 1897. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:
Précis analytique des travaux. Année 1895—96. 1897. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:
Atti. Serie III, Vol. 3, fasc. 4. 8⁰.

Essex Institute in Salem:
Bulletin. Vol. 26, p. 65—202; Vol. 27, p. 1—147; Vol. 28, p. 1—56; Vol. 29, p. 1—49. 1894/97. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:
Mittheilungen. 37. Vereinsjahr. 1897. 8⁰.

Historischer Verein in St. Gallen:
Die Vadianische Briefsammlung der Stadtbibliothek St. Gallen. III. Herausg. v. Emil Arbenz. 1897. 8⁰.
Ferdinand Fürchtegott Huber v. Karl Nef. 1898. 4⁰.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:
Bericht über das Jahr 1895—96. 1897. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):
Almanaque naútico 1899. 1897. 8⁰.

Californio Academy of Sciences in San Francisco:
Contributions to Biology. No. X, XI. 1897. 8⁰.
Proceedings. III^d Series, Zoology, Vol. I, No. 5; Botany, Vol. 1, No. 2; Geology, Vol. 1, No. 3. 1897. 4⁰.

Museu Paulista in S. Paulo:
Revista do Museu Paulista. Vol. 2. 1897. 8⁰.

Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung in Sarajevo:
Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1896. Wien 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band 17. 18. 1897. 4⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XX, 1897, No. 12; XXI, 1898, No. 1—3. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthümer in Stade:

Geschichte der Stadt Stade, v. M. Bahrfeldt. 1897. 8⁰.

Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Stettin:

Baltische Studien. Neue Folge, Band 1. 1897. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Handlingar. N. F. Band 29. 1896—97. 4⁰.

K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:

Månadsblad. 23. Jahrg. 1894. 1897—98. 8⁰.
Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Bd. XVI. 4. 1895—98. 8⁰.

K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:

Register 1886—95. 1896—98. 8⁰.
Sveriges offentliga bibliotek Accessions-Katalog 12. 1897. 1898. 8⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band XIX, Heft 7; Band XX, Heft 1—4. 1898. 8⁰.

Institut Royal géologique in Stockholm:

Sveriges geologiska undersökning. Series C, No. 161. 163—171. 173—175. 1896—97. 8⁰.

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. Bd. 31, No. 8—10. 1897. Bd. 32, No. 1—4. 1898. 8⁰.

K. Württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:

Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1897. 1898. 4⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Records. Vol. 5, part 4. 1898. 4⁰.
Mineral Resources, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletín. Tomo 2, No. 3. Mexico 1898. 4⁰.
Anuario. Año XVIII. Año de 1898. 1897. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. III, No. 3. 1897. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. Vol. I, parts 4 and 5. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. V, part 2. 1898. 8⁰.

Faculté des sciences in Toulouse:

Annales. Tome 11, Année 1897; 12, Année 1898. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 33, disp. 1—13. 1897—98. 8⁰.

Digitized by Google

Gesellschaft „Eranos" in Upsala:

Eranos. Acta philologica Luecana. Vol. II, fasc. 3. 4; Vol. III, fasc. 1. 2. 1897—98. 8⁰.

Humanistika Vetenkaposamfund in Upsala:

Skrifter. Band V. 1897. 8⁰.

Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. XXIX, Année 1897. 1897—98. fol.

Historisch Genootschap in Utrecht:

Werken. Ser. III, No. 8, 1897; N. Ser., No. 60, 1898. s'Gravenhage. 8⁰.

Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:

Aanteekeningen 1897. 8⁰.
Verslag. 1897. 8⁰.

Bureau of American Ethnology in Washington:

XVIth annual Report for 1894—95. 1897. 4⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Yearbook 1897. 1898. 8⁰.

American Jewish Historical Society in Washington:

Publications. No. 6. 1897. 8⁰.

U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:

Report for 1896. 1897. 4⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Miscellaneous Collections. No. 1084. 1087. 1898. 8⁰.
History of the first half Century of the Smithsonian Institution 1846—96. 1897. 4⁰.

Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:

Index-Catalogue. II. Series. Vol. 2. 1897. 4⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletin. No. 87. 127. 130. 135—148. 1897. 8⁰.
Monographs. No. XXV—XXVIII und 1 Atlas in fol. 1896—97. 4⁰.
XVIIth annual Report for 1895—96. Part I. II. 1896. 4⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Jahrg. 1897. Band 47, Heft 2. 1897. 4⁰.
Verhandlungen. 1897, No. 14—18; 1898, No. 1—8. 4⁰.
Abhandlungen. Band XVII, Heft 4. 1897. fol.

Geographische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band 40. 1897. 8⁰.

K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:

Astronomische Arbeiten. Band IX. 1897. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1898, No. 1—26. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXVII, 6. 1897. Band XXVIII, 1—3. 1898. 4⁰.

Digitized by Google

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 47, Heft 10; Band 48, Heft 1—5. 1898. 8⁰.

K. K. militär-geographisches Institut in Wien:

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Band X u. XI. 1897. 4⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band XII, 2—4. 1897. 4⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Mittheilungen. 1898, No. 3 u. 4. 4⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Vol. 26, No. 12; Vol. 27, No. 1—6. 1897/98. 8⁰.

Ortsverein für Geschichte und Alterthumskunde in Wolfenbüttel:

Braunschweigisches Magazin. 3. Band, 1897. Braunschweig 1897. 4⁰.

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Band XXXI, No. 8. 1898. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1897, No. 3—9. 8⁰.

Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:

Archiv. 39. Jahrgang. 1897. 8⁰.
Jahresbericht für 1896. 1897. 8⁰.

Antiquarische Gesellschaft in Zürich:

Mittheilungen. Band XXIV, 5. 1898. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 42. Jahrg., 1897, Heft 3 u. 4; 43. Jahrg., 1898, Heft 1. 1898. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Zürich:

9. Jahresbericht. 1896 u. 1897. Uster-Zürich 1898. 8⁰.

Sternwarte in Zürich:

Astronomische Mitteilungen. No. 89. 1898. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften a. d. J. 1897—98 in 4⁰ u. 8⁰.

Schweizerische meteorologische Zentralstation in Zürich:

Annalen. 32. Jahrgang, 1895. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Von folgenden Privatpersonen:

Prinz Albert I. von Monaco:

Sur la quatrième campagne scientifique de la „Princesse Alice". Paris 1898. 4⁰.

Sur les observations météorologiques de l'Océan Atlantique. Paris 1898. 4⁰.

Robert Ball in Dublin:

The XIIth and concluding Memoir on the Theorie of Screws. Dublin 1898. 4⁰.

Antonio Cabreira in Lissabon:

Sur l'aire des polygones. Lisbonne 1897. 8⁰.

Sur les vitesses sur la spirale. Lisbonne 1898. 8⁰.

Auguste Daubrée's Relicten in Paris:

Auguste Daubrée 25. Juin 1814 bis 29. Mai 1896. Paris 1897. 4⁰.

Ja. Denisov in Kharkow:

Die Dochmien bei Aeschylus (russ.). Kharkow 1898. 8⁰.

Alexander Dietz in Frankfurt a/M.:

Frankfurter Bürgerbuch. Frankfurt 1897. 4⁰.

Charles Janet in Bauvais (Oise):

Études sur les fourmis No. 14—16; Limoges, Paris, Lille 1897. 8⁰.

Notice sur les travaux scientifiques de M. Charles Janet. Lille 1896. 8⁰.

Friedrich Keinz in München:

Ein vergessener bayerischer Dichter des XV. Jahrhunderts aus Passau. München 1898. 8⁰.

A. Lacroix in Paris:

A. des Cloizeaux 1817—1897. Paris 1897. 4⁰.

Vito La Mantia in Palermo:

Consuetudini di Trapani. Trapani 1895—97. 8⁰.

Consolato del mare e dei mercanti. Palermo 1897. 8⁰.

Privilegi inediti di Messina. Palermo 1897. 8⁰.

Auguste Le Jolis in Cherbourg:

Remarques sur la Nomenclature algologique. Paris 1896. 8⁰.

Tito Martini in Venedig:

Intorno al calore che si sviluppa nel bagnare le polveri nuove ricerche. Venezia 1898. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tome 66, No. I. II; Tome 67, No. I. II. Paris 1898. 8⁰.

Giovanni Omboni in Padua:

Il gabinetto di geologia della R. Università di Padova. Padova 1898. 8⁰.

Ed. Piette in Rumigny, Ardennes:

Études d'ethnographie préhistorique. Paris 1897. 8⁰.

Dietrich Reimer in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 3. Jahrgang 1897, Heft 3 u. 4. Berlin. 4⁰.

Digitized by Google

Hugo Schuchardt in Graz:

Tchèques et Allemands. Paris 1898. 8⁰.

Jr. Skwortzow in Kharkow:

Soleil, terre et électricité. Kharkow 1898. 8⁰ (in französischer und in russischer Sprache).

Jerge Socolow in Moskau:

Nouvelles recherches astronomiques. Moscou 1896. 8⁰.
Des planètes se trouvant vraisemblablement au delà de Mercure et de Neptune. Moscou 1897. 8⁰.

Béla Szentesy in Budapest:

Die geistige Ueberanstrengung des Kindes. Budapest 1898. 8⁰.

A. Thieullen in Paris:

Les véritables instruments usuels de l'âge de la pierre. Paris 1897. 4⁰.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. I, pars 4, Electra. Lips. 1898. 8⁰.

Melchior Weiss in Freising:

Ueber mariologische Schriften des seligen Albertus. Paris 1898. 8⁰.
Primordi novae bibliographiae Alberti Magni. Parisiis 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 2. Juli 1898.

1. Herr H. Seeliger hält den in der Juni-Sitzung zurückgestellten, für die Denkschriften bestimmten Vortrag: „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne.“

2. Herr Gustav Bauer beantragt eine in dem Nachlasse des verstorbenen ordentlichen Mitgliedes der Classe, Ludwig v. Seidel, gefundene Abhandlung: „Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objekts von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat“, welche in der Classen-Sitzung vom 6. März 1880 vorgetragen und zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmt worden war, aber nicht zur Publikation gelangte, in den Sitzungsberichten zu veröffentlichen; Herr Professor Dr. Sebastian Finsterwalder hatte die Güte, dieselbe durchzusehen und eine Einleitung dazu zu schreiben.

Digitized by Google

3. Herr Eugen v. Lommel überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Ludwig Fomm, Assistenten am physikalischen Institut der Universität: „Ueber eine neue Erscheinung bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen."

4. Herr Walter Dyck legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Eduard v. Weber, Privatdozenten an der Universität: „Ueber Schaaren von Bilinearformen", vor.

Digitized by Google

Ueber eine neue Erscheinung bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen.

Von Dr. **Ludwig Fomm.**

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Legt man um eine Glasröhre zwei Ringe von dünnem Drahte und verbindet dieselben mit den Polen eines Induktoriums, so zeigen sich beim Evakuieren der Röhre folgende Erscheinungen:

Die Glasröhre hatte eine Länge von 20 cm, einen Durchmesser von 3 cm und war mittelst eines seitlich angeblasenen Rohres mit einer Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Die Ringe aus 0,5 mm starkem Aluminiumdrahte waren in gegenseitiger Entfernung von 15 cm angebracht und mit den Polen eines Induktoriums von 15 cm Maximal-Funkenlänge in Verbindung.

Bei den ersten Pumpenzügen hat man ganz ähnliche Erscheinungen, wie bei den gewöhnlichen Geissler-Röhren. Zuerst funkenartige Entladung, dann Auftreten von positivem und negativem Licht, Bildung eines dunklen Raumes und Schichtung des positiven Lichtes.

In Röhren mit äusseren Elektroden treten nur oscillatorische Entladungen auf, da die Elektroden, in unserem Falle die Ringe, die eine Belegung, das leitende Gas die andere Belegung eines Kondensators darstellen, während das Glas die Rolle des Dielektrikums übernimmt.

Digitized by Google

Bei solchen Entladungen erscheinen beide Elektroden für das Auge gleichzeitig als Anode und Kathode. Mit Hülfe eines Magneten, dessen Kraftlinien senkrecht zur Röhrenaxe verlaufen, lassen sich jedoch leicht die übereinander gelagerten Erscheinungen trennen.

Bei weiterem Evakuieren bildet sich konzentrisch zu den Ringen an der inneren Glaswand ein blauer Ring und aus der Mitte desselben quillt scheinbar positives Licht, den ganzen Querschnitt der Röhre erfüllend und sich allmählich schichtend.

Das blaue Licht unter den Ringen wächst dann sowohl seitlich als gegen die Röhrenaxe hin, bis es den Querschnitt ganz ausfüllt, während das positive Licht allmählich verschwindet.

Jetzt tritt eine merkwürdige Erscheinung auf. Während das Vakuum höher wird, löst sich das blaue Licht unter den Ringen von den Glaswänden los und schnürt sich in der Ringebene gegen deren Mittelpunkt zusammen, so dass ein Doppelkegel entsteht, dessen Spitze im Mittelpunkt des Ringes sitzt.

Der vordere Theil verwandelt sich dann in einen langgestreckten graublauen Strahl, während der hintere Kegel, d. h. der der anderen Elektrode abgewandte Kegel, zu einem wulstartigen Gebilde wird.

Diese blaugrauen Strahlen zeigen nun alle Eigenschaften von Kathodenstrahlen. Sie breiten sich unbekümmert um die Stellung des zweiten Ringes aus, stehen in ihrer Hauptmasse senkrecht zur Ringebene, gleichgültig, welche Neigung dieselbe zur Axe der Glasröhre haben mag, erwecken, wo sie an die Glaswand treffen, lebhafte Phosphorescenz, setzen ein in ihren Weg gestelltes Rädchen in Bewegung und werden vom Magneten abgelenkt, wobei sie sich um den Mittelpunkt des Ringes als Ausgangspunkt drehen. Der Wulst dagegen, der als rückwärtige Fortsetzung dieser Strahlen zu betrachten ist, unterliegt dem Einfluss des Magneten weniger und erregt die Glaswand zu rothgelber Phosphorescenz.

Bei Anwendung von zwei Ringen als Elektroden entstehen diese blaugrauen Strahlen nur in dem Raume zwischen den beiden Elektroden. Verbindet man dagegen nur einen

Digitized by Google

Ring mit dem Induktorium, während man den freien Pol des Letzteren zur Erde ableitet, so treten diese Strahlen auf beiden Seiten des Ringes auf.

Ist das Vakuum hoch genug, so werden diese Strahlen allmählich unsichtbar und sind nur mehr an ihrer phosphorescenzerregenden Wirkung zu erkennen; zugleich bildet sich zu beiden Seiten der Ringe ein dunkler Streifen auf dem Glase, dem ein breiter phosphorescierender sich anschliesst.

Schaltet man zwischen die Ringe eine metallische Platte, welche die Röhre ziemlich gut abschliesst, so verhält sich diese wie eine metallische Trennungsfläche in einem Elektrolyten. Die Platte wird zur Elektrode und sendet intensive Strahlen aus senkrecht zu ihrer Oberfläche und zwar aus ihrem Mittelpunkte, welche lebhafte Phosphorescenz und Röntgenstrahlen erzeugen. Dasselbe findet auch statt, wenn die Platte in ihrer Mitte durchbohrt ist.

Was für eine Metallplatte gilt, findet auch bei mehreren statt; sobald dieselben als Trennungsflächen auftreten, übernehmen sie die Rolle von Elektroden.

Digitized by Google

Ueber Schaaren von Bilinearformen.

Von **E. von Weber.**

(*Eingelaufen 11. Juli.*)

In der vorliegenden Mitteilung soll die Invariantentheorie einer Schaar von Bilinearformen

$$(1) \qquad u \cdot \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta + v \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \quad (\alpha\beta = 1, 2 \ldots n)$$

für den Fall entwickelt werden, dass die Formen (1) schiefsymmetrisch sind, d. h. den Relationen

$$(2) \qquad a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}; \; b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha}$$

unterliegen, und dass nur congruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen x und y in Betracht gezogen werden. Dieser Fall, dem u. a. in der allgemeinen Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen eine hervorragende Wichtigkeit zukommt, erscheint umsomehr einer besonderen Untersuchung bedürftig, als auf ihn die von Weierstrass[1]) und Kronecker[2]) angegebenen Reductionsmethoden nicht ohne wesentliche Modificationen anwendbar sind.

I.

1. Es sei τ der Rang der Matrix

$$(3) \qquad \| u p_{ik} + v q_{ik} \| \quad (i = 1, \ldots r; \; k = 1 \ldots s),$$

d. h. es mögen alle $\tau + 1$-reihigen, nicht aber alle τ-reihigen Determinanten dieser Matrix für beliebige Werte u, v ver-

---

[1]) Berl. Monatsber. 1868 = Werke II p. 19.

[2]) Sitzungsber. Berl. Ak. 1890 p. 1225.

Digitized by Google

schwinden. Ist ferner $a = uv' - vu'$ ein gemeinsamer Linearfaktor aller τ-reihigen Determinanten von (3), so werde für $h = \tau, \tau - 1, \ldots 2, 1$ die höchste Potenz von a, die in den grössten gemeinschaftlichen Divisor aller h-reihigen Determinanten von (3) aufgeht, mit a^{τ_h} bezeichnet.

Nennt man dann eine h-reihige Determinante von (3) hinsichtlich a „regulär", falls sie a genau in der τ_h^{ten} Potenz enthält, so gilt nach Herrn Frobenius[1]) der Satz, dass jede reguläre h-reihige Determinante von (3) eine reguläre $h-1$-reihige Determinante als Unterdeterminante enthält.

2. Dies vorausgeschickt, sei 2ϱ der Rang der schiefsymmetrischen Matrix

$$(4) \qquad \begin{Vmatrix} 0, & ua_{12} + vb_{12} & \ldots & ua_{1n} + vb_{1n} \\ ua_{21} + vb_{21}, & 0 & \ldots & ua_{2n} + vb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ua_{n1} + vb_{n1}, & ua_{n2} + vb_{n2} & \ldots & 0 \end{Vmatrix};$$

wir setzen

$$(ik) = -(ki) = ua \quad + vb_{ik}$$

und definieren den Ausdruck $(i_1, i_2 \ldots i_{2k})$ in bekannter Weise durch die Recursionsformel

$$(5) \qquad (i_1 i_2 \ldots i_{2k}) \equiv \sum^{(c)} (i_1 i_2)(i_3 \ldots i_{2k});$$

darin bedeuten $i_1, i_2 \ldots$ irgend $2k$ Zahlen der Reihe 1 bis n, und $\sum^{(c)}$ ist eine Summe von $2k-1$ Gliedern, die alle aus dem ersten Glied durch einmalige, zweimalige $\ldots$ $2k-2$-malige cyclische Vertauschung der Zahlen $i_2, i_3 \ldots i_{2k}$ entstehen. Der Ausdruck (5) werde ein „Pfaff'sches Aggregat" der Ordnung $2k$ genannt; er ist eine binäre Form vom Grade k in den Variabeln u, v und sein Quadrat ist eine $2k$-reihige Hauptunterdeterminante der Matrix (4). Es gilt nun der Satz:

„Ist d_ϱ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form

$$(i_1 i_2 \ldots i_{2\varrho}),$$

[1]) Sitzungsber. Berl. Ak. 1894 p. 31.

Digitized by Google

also d_ϱ^2 der grösste gemeinschaftliche Divisor aller 2ϱ-reihigen Hauptunterdeterminanten von (4), so ist d_ϱ^2 auch der grösste gemeinschaftliche Divisor aller 2ϱ-reihigen Unterdeterminanten von (4).“

In der That, ist A eine 2ϱ-reihige Unterdeterminante von (4), und sind D bezw. D' diejenigen 2ϱ-reihigen Hauptunterdeterminanten, die aus denselben Horizontalreihen bezw. Vertikalreihen entnommen sind, wie A, ferner A' die 2ϱ-reihige Determinante, deren Elemente zu denen von A symmetrisch liegen, so hat man, da 2ϱ der Rang von (4)[1]:

$$DD' \equiv AA' \equiv A^2.$$

Darnach ist A^2 durch d_ϱ^4, also A durch d_ϱ^2 teilbar, und da auch umgekehrt der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten A in d_ϱ^2 aufgeht, so ist unsere Behauptung erwiesen.

3. Es enthalte nun d_ϱ den Linearfaktor α in der Potenz λ_ϱ. Wir können dann, um die Ideen zu fixieren, annehmen, dass insbesondere das Aggregat

$$(1, 2 \ldots 2\varrho)$$

keine höhere Potenz von α enthalte, dass also die Determinante

$$(6) \qquad D_{2\varrho} \equiv |u a_{ik} + v b_{ik}| \quad (i, k = 1, 2 \ldots 2\varrho)$$

hinsichtlich α regulär sei. Der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form:

$$(i_1 i_2 \ldots i_{2k})$$

wo $i_1 \ldots i_{2k}$ irgend $2k$ Zahlen der Reihe $1 \ldots 2\varrho$ bedeuten, enthalte α in der Potenz λ_k.

Es seien nun mit A_{ik} die $2\varrho - 1$-reihigen Minoren der Determinante $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Nach bekannten Sätzen hat man dann:

$$A_{ii} A_{kk} - A_{ik} A_{ki} \equiv A_{ik}^2 \equiv D_{2\varrho} D_{2\varrho-2},$$

wo $D_{2\varrho-2}$ eine $2\varrho - 2$-reihige Hauptunterdeterminante von $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Darnach ist der grösste gemeinschaftliche Divisor

[1]) Frobenius, Crelle's J. 82 p. 240 f.

Digitized by Google

aller A_{ik} durch die Potenz $a^{\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho-1}}$ und durch keine höhere Potenz von a teilbar; wir wissen nach Nr. 1 überdies, dass eine der Determinanten A_{ik} hinsichtlich a regulär ist.

Es seien jetzt $i_1, i_2; k_1, k_2$ irgend welche Zahlen der Reihe $1 \ldots 2\varrho$; dann hat man:

$$A_{i_1 k_1} A_{i_2 k_2} - A_{i_1 k_2} A_{i_2 k_1} \equiv D_{2\varrho} \cdot A',$$

wo A' eine $2\varrho - 2$-reihige Unterdeterminante von $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Alle diese Unterdeterminanten sind darnach durch $a^{2\lambda_{\varrho-1}}$ teilbar, und eine derselben ist nach Nr. 1 regulär. Da aber eine der Hauptunterdeterminanten $D_{2\varrho-2}$ durch keine höhere Potenz von a teilbar ist, als $a^{2\lambda_{\varrho-1}}$, so ergibt sich, dass $D_{2\varrho}$ eine reguläre Hauptunterdeterminante $D_{2\varrho-2}$ enthält.

4. Auf die letztere lassen sich nun offenbar dieselben Schlüsse anwenden, wie auf $D_{2\varrho}$; man findet, dass a in den grössten gemeinsamen Divisor aller $2\varrho - 3$-reihigen Unterdeterminanten von $D_{2\varrho-2}$ in der Potenz $a^{\lambda_{\varrho-1} + \lambda_{\varrho-2}}$ aufgeht, und dass eine dieser Determinanten, also auch eine $2\varrho - 4$-reihige Hauptunterdeterminante von $D_{2\varrho-2}$ regulär ist. Durch Wiederholung dieser Schlussweise erhält man folgende Sätze:

„Ist d_h der grösste gemeinsame Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form:

(7) $\qquad (i_1 i_2 \ldots i_{2h}) \qquad (i_1, i_2 \ldots = 1 \ldots n;\ h \leqq \varrho),$

so ist d_h^2 der grösste gemeinschaftliche Divisor aller $2h$-reihigen Unterdeterminanten, und $d_h \cdot d_{h-1}$[1]) derjenige aller $2h - 1$-reihigen Unterdeterminanten der schiefsymmetrischen Matrix (4).“

„Ist 2ϱ der Rang der Matrix (4), und geht der Linearfaktor a in d_h in der Potenz λ_h auf, so kann man die Zeilen und Colonnen der Matrix (4) so anordnen, dass die ϱ Pfaff'schen Aggregate

$$P^{(i)} = (2i + 1,\ 2i + 2 \ldots 2\varrho) \quad (i = 0,\ 1 \ldots \varrho - 1)$$

bezw. durch $a^{\lambda_\varrho}, a^{\lambda_{\varrho-1}}, \ldots a^{\lambda_1}$ und durch keine höhere Potenz von a teilbar sind.“

---

[1]) $d_0 = 1$.

Digitized by Google

5. Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta; \quad \psi = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

$$f = w\varphi - \psi; \quad w = -\frac{u}{v}.$$

Offenbar lässt sich die Form φ von vorneherein so aus der Schaar (1) auswählen, dass die 2ϱ-reihigen Determinanten der Matrix (4) für $v = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Dann können wir schreiben:

$$d_h = (-v)^{\sum_1^r {}_\nu \lambda_h^{(\nu)}} \cdot (w - w^{(1)})^{\lambda_h^{(1)}} (w - w^{(2)})^{\lambda_h^{(2)}} \ldots (w - w^{(r)})^{\lambda_h^{(r)}},$$

indem wir die Anzahl der verschiedenen Linearfaktoren von d_ϱ mit r bezeichnen. Setzt man

$$\lambda_0^{(\nu)} = 0; \quad \lambda_h^{(\nu)} - \lambda_{h-1}^{(\nu)} = e_{\varrho-h+1}^{(\nu)} \; (h = \varrho, \; \varrho - 1 \ldots 1),$$

so sind nach Nr. 4 die Elementarteiler der Matrix (4) die folgenden:

$$(w - w^{(\nu)})^{e_1^{(\nu)}}, \; (w - w^{(\nu)})^{e_1^{(\nu)}}; \; (w - w^{(\nu)})^{e_2^{(\nu)}}, \; (w - w^{(\nu)})^{e_2^{(\nu)}}; \ldots$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots r),$$

sie sind also paarweise identisch.

6. Ist der Rang 2ϱ der Matrix (4) kleiner als n, und schreiben wir

$$n - 2\varrho = \tilde{\omega};$$

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}; \; \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i}; \; \bar{\varphi}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}; \; \bar{\psi}_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

so bestehen zwischen den Ausdrücken $w\varphi_i - \psi_i$ genau $\tilde{\omega}$ linear unabhängige lineare Identitäten, deren Coefficienten ganze Funktionen von w sind; wir wollen sie in der Form schreiben:

$$(8) \qquad \sum_1^n {}_k \sum_0^{m_s} {}_h c_{hk}^{(s)} w^h (w\varphi_k - \psi_k) \equiv 0 \quad (s = 1, 2, \ldots \tilde{\omega}).$$

Natürlich hat man aus Symmetriegründen ebenso

$$(9) \qquad \sum_1^n {}_k \sum_0^{m_s} {}_h c_{hk}^{(s)} w^h (w\bar{\varphi}_k - \bar{\psi}_k) \equiv 0 \quad (s = 1, 2 \ldots \tilde{\omega}).$$

Digitized by Google

Wir dürfen voraussetzen, dass diese Identitäten von vornherein auf eine solche Form gebracht wurden, dass die Zahlen $m_1 \ldots m_{\bar{\omega}}$ so klein als möglich ausfallen.

Nach den allgemeinen Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker lässt sich daher die Schaar $w\varphi - \psi$ auf die folgende Normalform bringen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_0^{m_s}{}^h \left[\mathfrak{X}_h^{(s)}(w\,\mathfrak{Y}_h^{(s)} - \mathfrak{Y}_{h-1}^{(s)}) - \overline{\mathfrak{Y}}_h^{(s)}(w\,\mathfrak{X}_h^{(s)} - \mathfrak{X}_{h-1}^{(s)})\right] \\ &\qquad + \sum_1^{r}{}^\nu \sum_1^{\varrho}{}^\mu \left[(w - w^{(\nu)})\,\Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}\right]; \end{aligned}$$

dabei ist gesetzt

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\sigma,\tau} (X_{\mu\sigma}^{(\nu)}\,\overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} - \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}\,Y_{\mu\tau}^{(\nu)})$$

$$(\sigma + \tau = e_\mu^{(\nu)} - 1;\ \ \sigma = 0, 1 \ldots e_\mu^{(\nu)} - 1);$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\sigma,\tau} (X_{\mu\sigma}^{(\nu)}\,Y_{\mu\tau}^{(\nu)} - \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}\,Y_{\mu\tau}^{(\nu)})$$

$$(\sigma + \tau = e_\mu^{(\nu)} - 2;\ \ \sigma = 0, 1 \ldots e_\mu^{(\nu)} - 2),$$

und es ist $\Psi_\mu^{(\nu)} = 0$ zu setzen, wenn $e_\mu^{(\nu)} = 1$, ferner $\Phi_\mu^{(\nu)} = \Psi_\mu^{(\nu)} = 0$, falls $e_\mu^{(\nu)} = 0$; auch ist in der ersten Doppelsumme (10) die Summation nur auf diejenigen Indices s zu erstrecken, für die $m_s > 0$ ist.

Die mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$, X, $\overline{X}$ bezeichneten Grössen sind linear unabhängige Linearfunktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$, die $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}$, Y, Y ebenso linear unabhängige Linearfunktionen der y. Ferner hat man:

$$(11)\qquad n = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s (2\,m_s + 1) + 2 \sum_1^{\varrho}{}^\mu \sum_1^{r}{}^\nu e_\mu^{(\nu)},$$

mithin

$$2\,\varrho = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s 2\,m_s + \sum_1^{\varrho}{}^\mu \sum_1^{r}{}^\nu 2\,e_\mu^{(\nu)},$$

also

$$(12)\qquad \varrho = M + \sum e_\mu^{(\nu)},$$

wenn

$$(13)\qquad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_{\bar{\omega}}$$

Digitized by Google

gesetzt wird. Die Normalform (10) hat, wie man sieht, die schiefsymmetrische Form; es ist aber zu zeigen, dass diese Normalform stets durch congruente lineare Transformationen der x und y hergestellt werden kann, d. h. dass die $\mathfrak{X}$, $\bar{\mathfrak{X}}$, X, $\bar{X}$ ebenso von $x_1 \ldots x_n$ abhängen, wie die entsprechenden $\mathfrak{Y}$, $\bar{\mathfrak{Y}}$, Y, $\bar{Y}$ von den Variabeln $y_1 \ldots y_n$.

II.

7. Um die soeben ausgesprochene Behauptung zu erweisen, betrachten wir zunächst den Fall, dass die Determinante

$$D = | w a_{ik} - b_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht für beliebiges w verschwindet, dass also n gerade, und die oben mit 2ϱ bezeichnete Zahl $= n$ ist. Aus den Identitäten

$$w \varphi_\beta - \psi_\beta = \sum_\alpha (w a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) x_\alpha$$

$$w \bar{\varphi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha = \sum_\beta (w a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) y_\beta$$

gewinnen wir, wenn mit

$$(-1)^{\alpha+\beta} D_{\alpha\beta}$$

die aus D durch Streichung der α^{ten} Zeile und der β^{ten} Colonne entstehende Unterdeterminante bezeichnet wird, folgende Formeln:[1])

$$y_\beta = \sum_\alpha \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w \bar{\varphi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha)$$

$$x_\alpha = \sum_\beta \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w \varphi_\beta - \psi_\beta)$$

$$\varphi = \sum_\beta \varphi_\beta y_\beta = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w \varphi_\beta \bar{\varphi}_\alpha - \varphi_\beta \bar{\psi}_\alpha)$$

$$\psi = \sum_\alpha \psi_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w \varphi_\beta \bar{\psi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta)$$

$$w \varphi + \psi = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w^2 \bar{\varphi}_\alpha \varphi_\beta - \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta).$$

---

[1]) Weierstrass, Werke II p. 24.

Digitized by Google

Wir schliessen daraus mit Weierstrass, dass, wenn der Ausdruck

$$F(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) \equiv \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} \eta_\alpha \xi_\beta$$

nach fallenden Potenzen von w in der Form:

$$F = w^{-1} F_1(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) + w^{-2} F_2(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n)$$

entwickelt wird, für φ und ψ sich die folgenden Darstellungen ergeben:

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi \equiv F_1(\varphi_1 \ldots \varphi_n \mid \bar{\varphi}_1 \ldots \bar{\varphi}_n) \\ \psi \equiv F_2(\varphi_1 \ldots \varphi_n \mid \bar{\varphi}_1 \ldots \bar{\varphi}_n). \end{cases}$$

8. Indem wir in den Bezeichnungen der Nr. 2 überall u durch w und v durch -1 ersetzen, können wir schreiben:

$$P = (1, 2, \ldots n); \; D \equiv P^2.$$

Ist ferner $\alpha < \beta$, so verstehen wir unter:

$$(-1)^{\alpha+\beta+1} \cdot P_{\alpha\beta}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $n-2$, das aus P durch Weglassung der Ziffern α und β entsteht; ferner sei allgemein

$$P_{\alpha\beta} = -P_{\beta\alpha}; \; P_{\alpha\alpha} = 0.$$

Dann hat man

$$D_{\alpha\beta} = P \cdot P_{\alpha\beta},$$

und die Funktion F wird

$$F = \sum \frac{P_{\alpha\beta}}{P} \eta_\alpha \xi_\beta.$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun als rationale Funktion von w in Partialbrüche zerlegen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir irgend eine vierreihige Hauptunterdeterminante der zu D adjungierten, schiefsymmetrischen Determinante

$$|D_{\alpha\beta}| \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n.$$

Digitized by Google

Eine solche Hauptunterdeterminante lässt sich dann in den beiden Formen

$$(15) \qquad (D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} + D_{\alpha\gamma} D_{\delta\beta} + D_{\alpha\delta} D_{\beta\gamma})^2 = D \cdot D''$$

darstellen, wo D'' diejenige Hauptunterdeterminante der Ordnung $n-4$ darstellt, die aus D durch Streichung der Zeilen und Colonnen mit den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Wir nehmen an, dass $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ sei, und verstehen unter dem Ausdruck

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat, das aus P durch Weglassung der Ziffern $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Dann folgt aus (15):

$$(16) \qquad P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} + P_{\alpha\gamma} P_{\delta\beta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} = \varepsilon P \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Um dies Zeichen zu bestimmen, bemerken wir, dass der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in der Entwickelung von P mit $P_{\alpha\beta}$ identisch ist. Daraus folgt sofort, dass der Coefficient des Produkts $a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta}$ in der Entwickelung von P mit $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ identisch wird. Der Coefficient dieses Produkts auf der rechten Seite von (16) ist sonach $\varepsilon P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$, und auf der linken $P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$, woraus $\varepsilon = +1$ folgt. Setzt man ausserdem fest, dass der Ausdruck $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sein Zeichen wechsele, wenn zwei seiner Indices vertauscht werden, also null sei, wenn er zwei gleiche Indices enthält, so folgt allgemein:

$$(17) \qquad P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} + P_{\alpha\gamma} P_{\delta\beta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} = P \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

für 4 beliebige Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ der Reihe 1 bis n.

9. Wir verstehen nun unter

$$P^{(\varkappa)}\,^{1)}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $n-2\varkappa$, das aus P durch Weglassung der Ziffern $1, 2 \ldots 2\varkappa$ entsteht, und setzen $P^{(0)} = P^{(\frac{1}{2}n)} = 1$. Ferner bezeichne der Ausdruck

$$(18) \qquad (-1)^{\alpha+\beta+1} P^{(\varkappa)}_{\alpha\beta}$$

---

[1]) $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$ etc.

Digitized by Google

falls $\beta > \alpha > 2\varkappa$ dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $2n - 2\varkappa - 2$, das aus $P^{(\varkappa)}$ durch Weglassung der Ziffern α und β entsteht; allgemein sei

$$P^{(\varkappa)}_{\alpha\beta} = -P^{(\varkappa)}_{\beta\alpha}; \quad P^{(\varkappa)}_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1 \ldots n);$$

endlich wollen wir festsetzen, dass der Ausdruck (18) immer dann verschwinde, wenn eine der Zahlen α, β nicht grösser als $2\varkappa$ ist. Die wiederholte Anwendung des Satzes (17) führt dann auf die folgende Serie von Relationen:

$$P_{12} P_{\alpha\beta} + P_{1\alpha} P_{\beta 2} + P_{1\beta} P_{2\alpha} \equiv P P'_{\alpha\beta},$$
$$P'_{34} P'_{\alpha\beta} + P'_{3\alpha} P'_{\beta 4} + P'_{3\beta} P'_{4\alpha} = P' P''_{\alpha\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(h-1)}_{2h-1,2h} \cdot P^{(h-1)}_{\alpha\beta} + P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha} \cdot P^{(h-1)}_{\beta,2h} + P^{(h-1)}_{2h-1,\beta} \cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha} = P^{(h-1)} \cdot P^{(h)}_{\alpha\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo h die Werte $0, 1 \ldots \varrho$ annehmen kann, wenn $P^{(\varrho)}_{\alpha,\beta}$ null gesetzt wird.

Man findet hieraus:

$$\frac{P^{(h-1)}_{\alpha\beta}}{P^{(h-1)}} = \frac{P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha} \cdot P^{(h-1)}_{2h,\beta} - P^{(h-1)}_{2h-1,\beta} \cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha}}{P^{(h-1)} P^{(h)}} + \frac{P^{(h)}_{\alpha\beta}}{P^{(h)}},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{P_{\alpha\beta}}{P} = \sum_1^{\varrho} \frac{P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha} P^{(h-1)}_{2h,\beta} - P^{(h-1)}_{2h-1,\beta} \cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha}}{P^{(h-1)} P^{(h)}}.$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{X}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\beta} P^{(h)}_{2h+1,\beta} \zeta_\beta; \quad \bar{\mathfrak{X}}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\beta} P^{(h)}_{2h+2,\beta} \zeta_\beta;$$
$$\mathfrak{Y}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\alpha} P^{(h)}_{2h+1,\alpha} \eta_\alpha; \quad \bar{\mathfrak{Y}}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\alpha} P^{(h)}_{2h+2,\alpha} \eta_\alpha$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots \varrho - 1),$$

so erhält man:

$$F(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) = \frac{\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}\bar{\mathfrak{Y}}}{P P'} + \frac{\mathfrak{Y}'\bar{\mathfrak{X}}' - \mathfrak{X}'\bar{\mathfrak{Y}}'}{P' P''} + \ldots;$$

die Summe auf der rechten Seite besteht aus $\frac{1}{2} n$ Gliedern.

Digitized by Google

10. Es sei nun

$$w - w^{(\nu)}$$

irgend einer der r Linearfaktoren von D, und $e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)} \ldots e_\varrho^{(\nu)}$ seien die zu demselben gehörigen, in Nr. 5 definierten Exponenten; ferner sei $e_\mu^{(\nu)} > 0$. Dann ist $P^{(\mu-1)}$ als Pfaff'sches Aggregat der Ordnung $n - 2\mu + 2$ durch die $\lambda_{\varrho-\mu+1}^{(\nu)}{}^{\text{te}}$ Potenz von $w - w^{(\nu)}$, ebenso $P^{(\mu)}$ durch die $\lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)}{}^{\text{te}}$ Potenz von $w - w^{(\nu)}$ teilbar; wir dürfen nach Nr. 4 überdies annehmen, dass $P^{(\mu-1)}$ und $P^{(\mu)}$ durch keine höheren Potenzen von $w - w^{(\nu)}$ teilbar sind. Ferner sind die Ausdrücke $\mathfrak{X}^{(\mu-1)}$, $\bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)}$, $\mathfrak{Y}^{(\mu-1)}$, $\bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}$ sämtlich durch die $\lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)}{}^{\text{te}}$ Potenz von $w - w^{(\nu)}$ teilbar. Erinnern wir noch daran, dass nach Nr. 5

$$\lambda_{\varrho-\mu+1}^{(\nu)} - \lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)} = e_\mu^{(\nu)}$$

zu setzen ist, so erkennt man, dass, wenn man die Ausdrücke

$$P^{(\mu-1)},\ P^{(\mu)},\ \mathfrak{X}^{(\mu-1)},\ \bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)},\ \mathfrak{Y}^{(\mu-1)},\ \bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}$$

nach steigenden Potenzen von $w - w^{(\nu)}$ entwickelt, das Anfangsglied der ersten dieser Entwickelungen um $e_\mu^{(\nu)}$ Einheiten grösser ist, als dasjenige aller übrigen. Hieraus folgt für genügend kleine Werte des absoluten Betrages von $w - w^{(\nu)}$:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} &= (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty{}_\sigma\, X_{\mu\sigma}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\sigma;\\
\frac{\bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} &= (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty{}_\sigma\, \bar{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\sigma;\\
\frac{\mathfrak{Y}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} &= (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty{}_\tau\, Y_{\mu\tau}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\tau;\\
\frac{\bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} &= (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty{}_\tau\, \bar{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\tau;
\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

dabei ist:

$$(20)\begin{cases} X_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[C_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu-1} + C_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu} + \ldots + C_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_n\right]; \\ \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[\overline{C}_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu-1} + \overline{C}_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu} + \ldots + \overline{C}_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_n\right]; \end{cases}$$

$$(21)\begin{cases} Y_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[C_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu-1} + C_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu} + \ldots + C_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_n\right]; \\ \overline{Y}_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[\overline{C}_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu-1} + \overline{C}_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu} + \ldots + \overline{C}_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_n\right]; \end{cases}$$

worin die Constanten C ganze Funktionen der Grössen $w^{(\nu)}$, a_{ik}, b_{ik} bedeuten.

Aus den Identitäten (19) folgt:

$$\frac{\mathfrak{Y}^{(\mu-1)}\overline{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)} - \overline{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}\mathfrak{X}^{(\mu-1)}}{P^{(\mu-1)}P^{(\mu)}} =$$
$$= \sum_{\sigma,\tau}^{0,\ldots\infty}\left(Y_{\mu,\tau}^{(\nu)}\overline{X}_{\mu,\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu,\tau}^{(\nu)}X_{\mu,\sigma}^{(\nu)}\right)(w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_\mu^{(\nu)}}.$$

Bilden wir daher die Summe:

$$\sum_1^{\varrho_\mu}\sum_{\sigma,\tau}^{0\ldots\infty}\left(Y_{\mu\tau}^{(\nu)}\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)}X_{\mu\sigma}^{(\nu)}\right)(w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_\mu^{(\nu)}},$$

worin sich die Summation hinsichtlich μ nur auf diejenigen Werte zu erstrecken hat, für die $e_\mu^{(\nu)} > 0$ ist, so stimmt diese Reihe mit der Reihenentwickelung von F in allen Gliedern überein, die für $w = w^{(\nu)}$ unendlich werden. Denkt man sich nun für jeden der r verschiedenen Linearfaktoren $w - w^{(\nu)}$ der Determinante D die analoge Entwickelung durchgeführt, wobei natürlich für jede einzelne Wurzel $w^{(\nu)}$ die Determinante durch congruente Vertauschungen der Zeilen und Colonnen nötigenfalls erst so umgeformt werden muss, dass die Pfaff'schen Aggregate P, P' . . . der Bedingung der Nr. 4 genügen, so ergibt sich, da F für $w = \infty$ verschwindet:

Digitized by Google

$$F(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) =$$
$$= \sum_1^r{}^{\nu} \sum_1^{\varrho}{}^{\mu} \sum_{\sigma,\tau} (Y_{\mu\tau}^{(\nu)} \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}) (w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_\mu^{(\nu)}}$$
$$(\sigma + \tau < e_\mu^{(\nu)};\ \mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots e_\mu^{(\nu)} - 1),$$

wobei die Summation hinsichtlich μ auf alle Werte zu erstrecken ist, für die $e_\mu^{(\nu)} > 0$.

11. Verstehen wir jetzt unter $X_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ diejenigen linearen homogenen Ausdrücke der ursprünglichen Variabeln $x_1 \ldots x_n$, die sich aus (20) ergeben, wenn man darin $\xi_1 \ldots \xi_n$ bezw. durch $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots \varphi_n$ ersetzt, dagegen unter $Y_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{Y}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ die Linearfunktionen der $y_1 \ldots y_n$, in welche die Ausdrücke (21) übergehen, wenn man $\eta_1 \ldots \eta_n$ bezw. durch $-\overline{\varphi}_1, -\overline{\varphi}_2 \ldots -\overline{\varphi}_n$ ersetzt, so werden die X, $\overline{X}$ in der gleichen Weise von den x abhängen, wie die entsprechenden Y, $\overline{Y}$ von den y. Mittels der Identitäten (14) erhält man nunmehr für die Schaar $w\varphi - \psi$ die Darstellung:

$$\sum_1^r{}^{\nu} \sum_1^{\varrho}{}^{\mu} \left[(w - w^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}\right],$$

wo die Φ, Ψ aus Nr. 6 zu entnehmen sind. Da sich jetzt hinterher leicht zeigen lässt, dass die Variabeln $X_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ genau η linear unabhängige Linearformen der x darstellen,[1]) und analoges für die $Y_{\mu\tau}^{(\nu)}$, $\overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)}$ gilt, so haben wir den Satz bewiesen:

„Jede schiefsymmetrische Schaar von Bilinearformen $w\varphi - \psi$ mit nicht verschwindender Determinante lässt sich durch congruente lineare Transformationen der x und y in eine Summe von „elementaren" schiefsymmetrischen Schaaren

$$(w - w^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}$$

überführen."

Eine solche Formenschaar bezeichnen wir als „elementar", weil sie nur zwei (identische) Elementarteiler besitzt, und weil

[1]) Weierstrass, Werke II p. 29.

Digitized by Google

dies nach Nr. 5 die Minimalzahl von Elementarteilern ist, die bei einer schiefsymmetrischen Schaar auftreten kann.

Wir wollen noch die für das folgende wichtige Bemerkung hinzufügen, dass alle Formen der Schaar (1), falls die Determinante (4) nicht null ist, durch $\frac{1}{2}n$ congruente lineare Gleichungspaare, in der x_i und y_i zum Verschwinden gebracht werden können; z. B. dadurch, dass man alle Ausdrücke $X_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $Y_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ null setzt.

III.

12. Indem wir uns nunmehr zu der Betrachtung des allgemeineren Falles wenden,[1]) dass der Rang 2ϱ der Matrix (4) kleiner als n ist, und die Bezeichnungen der Nr. 6 beibehalten, bemerken wir zunächst, dass die $M + \tilde{\omega}$ Grössensysteme

$$c_{h1}^{(s)}\, c_{h2}^{(s)} \ldots c_{hn}^{(s)} \quad (h = 0, 1 \ldots m_s;\ s = 1, 2, \ldots \tilde{\omega})$$

linear unabhängig sind. Andernfalls könnte man nämlich das System der Identitäten (8) durch ein anderes ersetzen, in welchem die Summe der Gradzahlen $< M$ wäre,[2]) was mit der über die Zahlen m_s gemachten Annahme in Widerspruch steht.

Darnach können wir durch die congruenten Transformationen

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_0^{m_1}{}^h c_{hi}^{(1)} X_h^{(1)} + \ldots + \sum_0^{m_{\tilde{\omega}}}{}^h c_{hi}^{(\tilde{\omega})} X_h^{(\tilde{\omega})} + \sum_{M+\tilde{\omega}+1}^{n}{}^r C_r X_r \\ y_i &= \sum_0^{m_1}{}^h c_{hi}^{(1)} Y_h^{(1)} + \ldots + \sum_0^{m_{\tilde{\omega}}}{}^h c_{hi}^{(\tilde{\omega})} Y_h^{(\tilde{\omega})} + \sum_{M+\tilde{\omega}+1}^{n}{}^r C_r' Y_r \end{aligned} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

statt der x, y die neuen Variabeln

$$X_h^{(s)},\ X_r,\ Y_h^{(s)},\ Y_r$$

---

[1]) Wir beziehen uns im Folgenden mehrfach auf die Darstellung, die Herr Sauvage (Ec. Norm. 1893) von den pag. 369 citierten Kronecker'schen Untersuchungen über Bilinearformen mit verschwindender Determinante geliefert hat.

[2]) Sauvage, l. c. pag. 12 ff.

Digitized by Google

in die Schaar $w\varphi - \psi$ einführen. Die Constanten C_s sind nur der Bedingung unterworfen, dass die Determinante der obigen Substitution nicht null sei, im übrigen aber willkürlich.

Gehen nun durch diese Substitutionen die Formen φ, ψ und:

$$f \equiv w\varphi - \psi$$

bezw. über in Φ, Ψ, F, so hat man

$$\frac{\partial F}{\partial X_h^{(s)}} = \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{hi}^{(s)}; \quad \frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}} = \sum_1^n{}^i \frac{\partial f}{\partial y_i} c_{hi}^{(s)};$$

also ist nach (8):

$$(22) \qquad \sum_0^{m_s}{}^h w^h \frac{\partial F}{\partial X_h^{(s)}} = 0, \qquad \sum_0^{m_s}{}^h w^h \frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}} = 0 \quad (s = 1, 2 \ldots \tilde{\omega}).$$

Diese Relationen drücken aus, dass F die Variabeln $X_h^{(s)}$, bezw. $Y_h^{(s)}$, für welche $m_s > 0$ ist, nur in den Verbindungen

$$w X_{h-1}^{(s)} - X_h^{(s)} \text{ bezw. } w Y_{h-1}^{(s)} - Y_h^{(s)} \quad (h = 1, 2, \ldots m_s),$$

während die Variabeln $X_0^{(s)}$, $Y_0^{(s)}$, für die $m_s = 0$ ist, in F überhaupt nicht vorkommen. Daraus folgt sofort, dass in F keine der Variabeln $X_h^{(s)}$ mit einer der Variabeln $Y_k^{(t)}$ multipliciert auftreten kann, da andernfalls F in w quadratisch wäre. Mit Rücksicht auf die schiefe Symmetrie von F dürfen wir daher setzen:

$$(23) \qquad \begin{aligned} F = \sum_1^{\tilde{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h \left[X_h^{(s)} (w Y_{h-1}^{(s)} - Y_h^{(s)}) - Y_h^{(s)} (w X_{h-1}^{(s)} - X_h^{(s)}) \right] + \\ + w\Phi' - \Psi', \end{aligned}$$

worin die $\overline{X}_h^{(s)}$, $\overline{Y}_h^{(s)}$ congruente Linearformen der vorhin mit X_r, Y_r bezeichneten Variabeln, ferner Φ', Ψ' schiefsymmetrische Bilinearformen derselben Grössen bezeichnen. Die Summation hinsichtlich s ist in (23) natürlich nur auf diejenigen Zahlen $1 \ldots \tilde{\omega}$ zu erstrecken, für die $m_s > 1$ ist.

13. Wir bemerken vorab, dass die Coefficienten der Linearformen $\overline{X}_h^{(s)}$, $\overline{Y}_h^{(s)}$ von w nicht abhängen können. In der That,

Digitized by Google

es muss zunächst $\overline{X}^{(s)}_{m_s}$ von w frei sein, da sonst F die Grösse w in einer höheren als der ersten Potenz enthielte, ferner können die Ausdrücke:

$$X^{(s)}_{m_s-1}\, w - X^{(s)}_{m_s},\quad X^{(s)}_{m_s-2} \cdot w - X^{(s)}_{m_s-1} \quad \text{etc.}$$

die Grösse w nur in der ersten Potenz enthalten, woraus der Reihe nach folgt, dass die Formen

$$\overline{X}^{(s)}_{m_s-1},\quad \overline{X}^{(s)}_{m_s-2} \quad \text{etc.}$$

von w frei sein müssen.

14. Nach Nr. 6 und 12 enthält der Ausdruck F r Variable $X^{(s)}_h$, X_r und ebenso viele Variable $Y^{(s)}_h$, Y_r, wenn mit $n-r$ die Anzahl der verschwindenden unter den Zahlen m_s bezeichnet wird. Es ist nun leicht zu zeigen, dass auch umgekehrt, wenn die Schaar f durch congruente lineare Substitutionen der x und y auf eine Form mit ν (und nicht weniger) Variabelnpaaren reducierbar sein soll, genau $n-\nu$ der Zahlen m_s verschwinden müssen, oder anders ausgedrückt, dass dann der Rang der Matrix:

$$\begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} & b_{21} & 0 & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & 0 \end{Vmatrix}$$

gleich ν sein muss. In der That, soll vermöge der Substitution

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_1^{\nu}{}^k \gamma_{ik} x'_k + \sum_{\nu+1}^{n}{}^r \gamma_{ir} x'_r \\ y_i &= \sum_1^{\nu}{}^k \gamma_{ik} y'_k + \sum_{\nu+1}^{n}{}^r \gamma_{ir} y'_r \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

die transformirte Schaar f' von $x'_{\nu+1} \dots x'_n$, $y'_{\nu+1} \dots y'_n$ frei werden, so muss man haben:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_r} = \sum_1^{n}{}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \gamma_{ir} = 0, \quad \sum_1^{n}{}^i \frac{\partial f}{\partial y_i} \gamma_{ir} = 0 \quad (r = \nu + 1 \dots n).$$

Digitized by Google

Aus diesen Bedingungen erhält man unmittelbar die folgenden

$$\sum_1^n{}^i a_{ik}\gamma_{ir} = 0, \quad \sum_1^n{}^i b_{ik}\gamma_{ir} = 0 \quad (k = 1 \ldots n;\ r = \nu + 1 \ldots n),$$

woraus die obige Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

Wir schliessen daraus, dass die Zahl der Variabeln in dem Ausdruck (23) durch congruente Transformationen der X und Y nicht vermindert werden kann.

15. Die in (23) auftretenden M Linearformen $\overline{X}_h^{(s)}$ der Variabeln X_r, und ebenso die M Linearformen $\overline{Y}_h^{(s)}$ sind von einander linear unabhängig. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial F}{\partial Y_0^{(s)}} = w\,\overline{X}_1^{(s)}; \quad \frac{\partial F}{\partial Y_{m_s}^{(s)}} = -\,\overline{X}_{m_s}^{(s)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}} = w\,X_{h+1}^{(s)} - \overline{X}_h^{(s)} \quad (h = 1, 2, \ldots m_s - 1),$$

und hieraus:

$$\overline{X}_h^{(s)} = \sum_0^{m_s - h}{}^i (-1)^{i+1} w^i \frac{\partial F}{\partial Y_{h+i}^{(s)}} \quad (h = 1, 2, \ldots m_s).$$

Bestände also eine Relation der Form:

$$\sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h a_h^{(s)} \overline{X}_h^{(s)} = 0 \tag{24}$$

mit constanten Coefficienten $a_h^{(s)}$, so erhielte man daraus zwischen den Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}}$ eine lineare Identität, deren Coefficienten ganze Funktionen von w wären. Diese Identität müsste sich andererseits auch dadurch gewinnen lassen, dass man die linken Seiten der Identitäten (22) mit gewissen Funktionen von w multiplicierte und addierte; dies ist aber unmöglich, da die Identität (24) die Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial Y_0^{(s)}}$ nicht enthält.

Digitized by Google

16. Nach dem soeben Bewiesenen können wir die Ausdrücke $X_h^{(s)}$, $Y_h^{(s)}$ als neue Variable statt ebenso vieler X_r, Y_r einführen, was auf congruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen X_r, Y_r hinaus kommt. Der bequemeren Schreibweise halber wollen wir die Variabeln

$$X_1^{(1)} \ldots X_{m_1}^{(1)},\ X_1^{(2)} \ldots X_{m_2}^{(2)} \ldots X_1^{(\bar{\omega})} \ldots X_{m_{\bar{\omega}}}^{(\bar{\omega})}$$

in dieser Reihenfolge mit

$$\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_M \quad (M = \sum m_s)$$

und ebenso die Variabeln $Y_h^{(s)}$ in derselben Reihenfolge mit:

$$\eta_1\, \eta_2 \ldots \eta_M$$

bezeichnen. Ferner wollen wir die noch übrig bleibenden Variabeln X_r, Y_r mit

$$\begin{matrix} x'_1\, x'_2 \ldots x'_N \\ \text{bezw. } y'_1\, y'_2 \ldots y'_N \end{matrix} \quad \left(N = n - \sum_1^{\bar{\omega}}{}^{i} (2\, m_i + 1) = 2 \sum_{\mu,\nu} e_\mu^{(\nu)}\right)$$

bezeichnen. Die in (23) auftretende Schaar von Bilinearformen

$$F' = w\, \Phi' - \Psi'$$

nimmt dann die Form an

$$(25) \qquad F' = F'(w;\ \xi_1 \ldots \xi_M,\ x'_1 \ldots x'_N \mid \eta_1 \ldots \eta_M,\ y'_1 \ldots y'_N).$$

17. Um den Ausdruck F' weiter zu behandeln, schicken wir folgenden Hülfssatz voraus:

„Ist $\tau < \frac{1}{2} n$, und verschwinden alle Formen einer schiefsymmetrischen Schaar (1) identisch vermöge eines Systems von τ unabhängigen, congruenten Relationenpaaren:

$$U_i = \sum_1^n{}^{k}\, a_{ik}\, x_k = 0,\ \ V_i = \sum_1^n{}^{k}\, a_{ik}\, y_k = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots \tau),$$

so ist der Rang der Matrix (4) höchstens gleich 2τ."

Unter der gemachten Annahme sind nämlich die Formen φ, ψ in folgender Weise darstellbar:

Digitized by Google

$$\varphi = \sum_1^r{}^s (U_s V_{r+s} - V_s U_{r+s})$$

$$\psi = \sum_1^r{}^s (U_s V'_{r+s} - V_s U'_{r+s})$$

worin:

$$U_{r+s} = \beta_{s1} x_1 + \ldots + \beta_{sn} x_n; \quad V_{r+s} = \beta_{s1} y_1 + \ldots + \beta_{sn} y_n;$$
$$U'_{r+s} = \gamma_{s1} x_1 + \ldots + \gamma_{sn} x_n; \quad V'_{r+s} = \gamma_{s1} y_1 + \ldots + \gamma_{sn} y_n$$

gesetzt ist, und die β, γ gewisse Constante bedeuten.

Man hat daher:

$$w a_{ik} - b_{ik} \equiv \sum_1^r{}^s [a_{si}(w\beta_{sk} - \gamma_{sk}) - a_{sk}(w\beta_{si} - \gamma_{si})].$$

Die Matrix (4) entsteht also durch Zeilencomposition der folgenden beiden Matrices:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{21} \cdot a_{r1} & w\beta_{11} - \gamma_{11}, & w\beta_{21} - \gamma_{21} \ldots & w\beta_{r1} - \gamma_{r1} \\ a_{12}\, a_{22} \cdot a_{r2} & w\beta_{12} - \gamma_{12}, & w\beta_{22} - \gamma_{22} \ldots & w\beta_{r2} - \gamma_{r2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}\, a_{2n} \cdot a_{rn} & w\beta_{1n} - \gamma_{1n}, & w\beta_{2n} - \gamma_{2n} \ldots & w\beta_{rn} - \gamma_{rn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} w\beta_{11} - \gamma_{11}, & w\beta_{21} - \gamma_{21} \ldots & w\beta_{r1} - \gamma_{r1}, & -a_{11}, & -a_{21}, \ldots & -a_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ w\beta_{1n} - \gamma_{1n}, & w\beta_{2n} - \gamma_{2n} \ldots & w\beta_{rn} - \gamma_{rn}, & -a_{1n}, & -a_{2n}, \ldots & -a_{rn} \end{vmatrix}$$

woraus obiger Satz sofort folgt.

18. Wir nehmen nun zunächst an, dass in dem Ausdruck F' keine der Variabeln x' mit einer Variabeln y' multipliciert auftritt. Dann treten die Variabeln x', y' in F' überhaupt nicht auf; denn es verschwindet jetzt die Schaar F oder f identisch, wenn man alle Variabeln ξ, η null setzt, was M congruente lineare Relationenpaare in den x, y liefert. Nach dem soeben bewiesenen Satze hat man daher

$$2\varrho < \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s 2 m_s; \tag{26}$$

andererseits aber ist nach Nr. 6:

$$2\varrho \geq \sum 2 m_s.$$

Digitized by Google

Also gilt in (26) das Gleichheitszeichen, und man hat:

$$(27) \qquad n = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^i (2m_i + 1); \; e_\mu^{(r)} = 0;$$

d. h. die Schaar (23) enthält überhaupt nur die Variabeln

$$X_h^{(s)}, \; X_h^{(s)}, \; \overline{Y}_h^{(s)}, \; Y_h^{(s)}.$$

Nun lässt sich die schiefsymmetrische Schaar von Bilinearformen

$$F' = F'(w_1 \zeta_1 \ldots \zeta_M \mid \eta_1 \ldots \eta_M)$$

stets in der Form schreiben:

$$(28) \qquad \sum_1^M{}^i \xi_i (w P_{i-1} - P_i) - \sum_1^M{}^i \eta_i (w Q_i - Q_{i-1})$$

worin:

$$\begin{aligned} P_i &= A_{i1}\eta_1 + A_{i2}\eta_2 + \ldots + A_{in}\eta_n \\ Q_i &= A_{i1}\xi_1 + A_{i2}\xi_2 + \ldots + A_{in}\xi_n \end{aligned} \quad (i = 0, 1 \ldots M)$$

gesetzt ist, und die Constanten A_{ik} von w frei sind. In der That, ist

$$F' = \sum_1^M{}^k \sum_1^M{}^i (w a_{ik} - \beta_{ik}) \xi_i \eta_k,$$

so liefert die Vergleichung der beiden Darstellungen von F' für die Unbekannten A_{ik} die Gleichungen:

$$(29) \qquad \begin{aligned} A_{ik} - A_{ki} &= a_{ik} \\ A_{i-1,k} - A_{k-1,i} &= \beta_{ik} \end{aligned} \quad (i, k = 1, 2, \ldots M),$$

die sich auf $M(M-1)$ unabhängige reducieren. Schreibt man die zweite Gleichung (29) in der Form

$$A_{ik} - A_{k-1,i+1} = \beta_{i+1,k}$$

und subtrahiert von ihr die erste Relation (29), so folgen die Bedingungen

$$A_{ki} - A_{k-1,i+1} = \beta_{i+1,k} - a_{ik} \; (i = 1, \ldots M-1; \; k = 1 \ldots M),$$

die ebenfalls $M(M-1)$ unabhängige Gleichungen darstellen, also mit (29) aequivalent sind. Man kennt sonach in dem Schema

Digitized by Google

$$\begin{matrix} A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0M} \\ A_{11} & & \dots & A_{1M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{matrix}$$

den Unterschied irgend zweier benachbarter Elemente in derselben von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonalreihe, und kann mithin $A_{01} \dots A_{0M}$, $A_{1M} \dots A_{MM}$ willkürlich wählen, worauf die übrigen A_{ik} eindeutig bestimmt sind.

Schreibt man jetzt statt der ξ, η wieder $\overline{X}_h^{(s)}$, $\overline{Y}_h^{(s)}$, und vereinigt man diejenigen Glieder der ersten Doppelsumme von (23) und des Ausdrucks (28), die mit demselben $\overline{X}_h^{(s)}$ bezw. $\overline{Y}_h^{(s)}$ multipliciert sind, so erhält man durch einfache Aenderung der Bezeichnungsweise für die Schaar $w\varphi - \psi$ die folgende Darstellung

$$(30) \qquad \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h \left[\overline{\mathfrak{X}}_h^{(s)} (w\,\mathfrak{Y}_{h-1}^{(s)} - \mathfrak{Y}_h^{(s)}) - \overline{\mathfrak{Y}}_h^{(s)} (w\,\mathfrak{X}_{h-1}^{(s)} - \mathfrak{X}_h^{(s)})\right],$$

worin die $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ unabhängige Linearformen von $x_1 \dots x_n$ und die $\mathfrak{Y}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$ die dazu congruenten Linearformen der y bedeuten. Diese Darstellung gilt natürlich nur für den Fall, dass die Bedingungen (27) erfüllt sind, die Matrix (4) also überhaupt keinen Elementarteiler besitzt.

19. Wir betrachten nun zweitens den Fall, dass der Ausdruck (25) die Variabeln x', y' wirklich enthält; denn zerlegt sich F' in 3 Bestandteile

$$(31) \qquad F_0(w; \zeta_1 \dots \zeta_M | \eta_1 \dots \eta_M) + F_1 + F_2(w; x'_1 \dots x'_N | y'_1 \dots y'_N),$$

worin F_1 die Form hat:

$$F_1 = \sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^k (\mu_{ik} w - \nu_{ik})(\xi_i y'_k - \eta_k x'_i)$$

und die μ_{ik}, ν_{ik} Constante bedeuten; die Ausdrücke F_0, F_1, F_2 sind Schaaren schiefsymmetrischer Bilinearformen.

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass die Determinante der Formenschaar F_2 nicht für jedes w verschwindet. In der

Digitized by Google

That, verschwindet die Determinante von F_2 nicht identisch, so lässt sich nach der Schlussbemerkung von § II die Form F_2 durch $\frac{1}{2}N$ congruente Paare von Gleichungen annullieren, und indem man diesen Gleichungen die Relationen $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$ hinzufügt, kommt man zu dem Resultat, dass sich alle Formen $w\varphi - \psi$ durch

$$M + \tfrac{1}{2}N = \sum m_\varepsilon + \sum_{\mu,\nu} e_\mu^{(\nu)} = \varrho$$

congruente Relationenpaare in x und y annullieren lassen. Verschwände nun aber die Determinante P von F_2, und wäre $2\varrho'$ ($< N$) ihr Rang, so könnte man auf F_2 dieselbe Schlussweise anwenden wie vorher auf die Schaar $f = w\varphi - \psi$; d. h. man könnte F_2 in 4 Bestandteile $\Phi + F_0'' + F_1'' + F_2''$ zerlegen, wo Φ die Form (30) besässe, während F_0'', F_1'', F_2'' den vorhin mit F_0, F_1, F_2 bezeichneten Formenschaaren analog wären. Wäre dann F_2'' identisch null, so könnte man nach Nr. 18 die Formenschaar F_2 durch ϱ' congruente Relationenpaare annullieren; das Gleiche wäre der Fall, wenn die Determinante von F_2'' nicht null wäre. Unter der Annahme endlich, dass die Determinante von F_2'' identisch null wäre, konnte man auf F_2'' die gleiche Ueberlegung anwenden wie auf F_2, etc. In allen Fällen käme man zu dem Resultate, dass F_2 durch ϱ' oder weniger congruente Relationenpaare zum Verschwinden gebracht werden könnte; dann aber wäre die Schaar $w\varphi - \psi$ vermöge weniger als ϱ congruenter Relationenpaare identisch null, was nach Nr. 17 mit der Voraussetzung, dass 2ϱ der Rang der Matrix (4) sei, in Widerspruch steht. Setzt man also

$$F_2 = \sum_1^N{}^i \sum_1^N{}^k (w p_{ik} - q_{ik}) x_i' y_k', \tag{32}$$

so ist die Determinante

$$| w p_{ik} - q_{ik} | \quad (i, k = 1 \ldots N) \tag{33}$$

nicht für jedes w null.

Beiläufig ergibt sich hieraus noch der Satz: „Damit alle Formen der Schaar $w\varphi - \psi$ durch ϱ und nicht weniger

Digitized by Google

unabhängige, lineare, congruente Paare von Gleichungen zwischen den x und den y zum Verschwinden gebracht werden können, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dass der Rang der Matrix (4) gleich 2ϱ sei."

20. Es sei jetzt:

$$(34)\qquad x_i = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_0^{m_s}{}^h c_{hi}^{(s)} X_h^{(s)} + \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h \bar{c}_{hi}^{(s)} \bar{X}_h^{(s)} + \sum_1^{N}{}^k c'_{ki} x'_k$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

die lineare Substitution, welche den Uebergang von den ursprünglichen x zu den neuen Variabeln $X_h^{(s)}$, $\bar{X}_h^{(s)}$, x'_k vermittelt. Die Constanten $c_{hi}^{(s)}$ sind dabei dieselben, wie diejenigen, die in den Identitäten (8), (9) auftreten. Ersetzt man nun in der Schaar f den Parameter w durch $w + w_0$, wo w_0 eine Constante bedeutet, so verwandeln sich die Identitäten (8) in die folgenden:

$$\sum_0^{m_s}{}^h \sum_1^{n}{}^k C_{hk}^{(s)} w^h [w q_k - (q_k - w_0 q_k)] \equiv 0,$$

worin

$$C_{hk}^{(s)} = \sum_h^{m_s}{}^i \binom{i}{h} c_{ik}^{(s)} w_0^{i-h}$$

gesetzt ist. Die Linearformen

$$\bar{X}_h^{(s)} \equiv \sum_1^{n}{}^k c_{hk}^{(s)} \bar{\psi}_k \quad (h = 1, 2, \ldots m_s)$$

verwandeln sich hierdurch in die folgenden:

$$\bar{\mathfrak{X}}_h^{(s)} \equiv \sum_1^{n}{}^k C_{hk}^{(s)} \bar{\psi}_k \equiv \sum_h^{m_s}{}^i \binom{i}{h} w_0^{i-h} \bar{X}_i^{(s)};$$

hieraus folgt ohne weiteres: die Ersetzung des Parameters w durch $w + w_0$ kommt darauf hinaus, in der n-reihigen Determinante der linearen Substitution (34) jede der Colonnen:

$$(35)\qquad c_{h1}^{(s)}\, c_{h2}^{(s)} \ldots c_{hn}^{(s)}$$

Digitized by Google

bezw. durch die Colonnen

$$C_{h1}^{(s)}\, C_{h2}^{(s)} \ldots C_{hn}^{(s)},$$

und ebenso jede der Colonnen

$$\bar{C}_{h1}^{(s)}\, \bar{C}_{h2}^{(s)} \ldots \bar{C}_{hn}^{(s)} \tag{36}$$

durch eine lineare Combination der mit demselben Index s versehenen Colonnen (36) zu ersetzen. Hierdurch erfahren aber die aus (34) zu berechnenden Ausdrücke der x' keine Aenderung. Ersetzt man in der Schaar f die Grösse w durch $\frac{1}{w}$, so kommt dies nach (8) offenbar darauf hinaus, in der Determinante von (34) die Colonnen (35), (36) in gewisser Weise zu vertauschen. Schreibt man endlich in der Schaar (1) aw statt w, so werden die Colonnen (35) und (36) mit gewissen Potenzen von a multipliciert. Beide Substitutionen aber lassen die aus (34) folgenden Darstellungen der Variabeln $x'_1 \ldots x'_N$ vollkommen ungeändert. Da nun jede lineargebrochene Substitution des Parameters w sich aus den drei genannten zusammensetzen lässt, so haben wir den Satz:

Eine lineargebrochene Transformation des Parameters w unserer Schaar (1) ist aequivalent mit einer gewissen linearen Transformation der Variabeln $X_h^{(s)}$, $\bar{X}_h^{(s)}$ unter sich, wobei die Variabeln $Y_h^{(s)}$, $\bar{Y}_h^{(s)}$ die congruente Substitution erleiden, während die Veränderlichen x', y' völlig ungeändert bleiben.

Wir dürfen in Folge davon annehmen, dass keine der beiden Determinanten

$$|p_{ik}|;\ |q_{ik}| \quad (i, k = 1, 2 \ldots N)$$

verschwinde. In der That, wäre eine dieser Determinanten (oder beide) null, so könnten wir nach Nr. 19 zwei Zahlen w_0 und w_1 so wählen, dass die Determinante (33) weder für $w = w_0$ noch für $w = w_1$ verschwindet. Ersetzt man dann in der Formenschaar f den Parameter w durch

$$\frac{w_0 w - w_1}{w - 1}$$

Digitized by Google

und führt man in den Coefficienten der Substitution (34) die dieser Substitution entsprechenden Aenderungen aus, so verwandelt sich F_2' in eine Formenschaar, die den gestellten Anforderungen genügt.

21. Dies vorausgesetzt, wollen wir nun durch congruente lineare Transformationen der x' und y' aus dem Ausdruck (31) die Terme F_0 und F_1 wegschaffen. Wir setzen zu diesem Zwecke:[1])

$$x_i' = x_i'' + H_i; \quad y_i' = y_i'' + K_i \quad (i = 1 \ldots N)$$

$$H_i = \lambda_{i1}\,\xi_1 + \lambda_{i2}\,\xi_2 + \ldots + \lambda_{iM}\,\xi_M$$

$$K_i = \lambda_{i1}\,\eta_1 + \lambda_{i2}\,\eta_2 + \ldots + \lambda_{iM}\,\eta_M,$$

wodurch der Ausdruck (31) in die Summe der drei folgenden übergeht:

1. $F_0 + \sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^\alpha (\mu_{i\alpha} w - \nu_{i\alpha})(\xi_i K_\alpha - \eta_i H_\alpha) + \sum_1^N{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta}) H_\alpha K_\beta$

2. $\sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^\alpha (\mu_{i\alpha} w - \nu_{i\alpha})(\xi_i y_\alpha'' - \eta_i x_\alpha'') + \sum_1^M{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta})(x_\alpha'' K_\beta + y_\alpha'' H_\beta)$

3. $\sum_1^N{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta})\, x_\alpha'' y_\beta''$.

Wir wollen nun die Unbekannten λ_{ik} so bestimmen, dass der Ausdruck (2) die Form annimmt:

$$\sum \xi_i (w P_{i-1} - P_i) - \sum \eta_i (w Q_{i-1} - Q_i) \tag{37}$$

wo die P, Q congruente Linearformen der y'' bezw. x'' bedeuten, oder also, dass der Coefficient von $\xi_i \cdot w$ in dem Ausdruck (2) mit demjenigen von $-\xi_{i-1}$ und ebenso natürlich der Coefficient von $\eta_i w$ mit demjenigen von $-\eta_{i-1}$ identisch sei. Dies liefert die Bedingungen:

$$\mu_{is} + \sum_1^N{}^k p_{sk}\,\lambda_{ki} = \nu_{i-1,s} + \sum_1^N{}^k q_{sk}\,\lambda_{k,i-1} \tag{38}$$

$$(s = 1, 2, \ldots N; \; i = 2, 3 \ldots M).$$

---

[1]) Sauvage l. c. p. 20 f.

Digitized by Google

Da nun die Determinante der q_{sk} nicht null ist, kann man hieraus die Unbekannten $\lambda_{1,i-1} \ldots \lambda_{N,i-1}$ berechnen, wenn $\lambda_{1i} \ldots \lambda_{Ni}$ bekannt sind. Wir können also $\lambda_{1M} \ldots \lambda_{NM}$ willkürlich annehmen, worauf alle andern λ_{ik} durch (38) eindeutig bestimmt sind. Nunmehr lassen sich die Terme (37) mit den entsprechenden Termen der Doppelsumme in (23) vereinigen (vgl. Nr. 18). Ferner können wir jetzt auch den Ausdruck (1) als Schaar von Bilinearformen der Variabeln ξ, η wie in Nr. 18 in der Form (37) darstellen und mit der Doppelsumme in (23) vereinigen, worauf die Schaar $w\varphi - \psi$ dargestellt ist als eine Summe zweier Ausdrücke, von denen der erste die Form (30) besitzt, während der zweite mit der Formenschaar 3. pag. 393 identisch ist. Da nun die Determinante der $p_{\alpha\beta}$ nicht null ist, lassen sich auf diese letztere Formenschaar unmittelbar die Entwickelungen des § II anwenden, und wir kommen schliesslich zu dem Resultat:

„Jede Schaar $w\varphi - \psi$ von schiefsymmetrischen Bilinearformen lässt sich durch congruente lineare Transformationen der beiden Variabelnsysteme x und y als eine Summe (10) von elementaren schiefsymmetrischen Schaaren darstellen."

Man schliesst daraus in bekannter Weise,[1]) dass das volle Invariantensystem einer schiefsymmetrischen Schaar $u\varphi - v\psi$ gegenüber congruenten Transformationen der x und y und linearen Transformationen von u, v durch die ganzen Zahlen m_s und $e_\mu^{(\nu)}$, sowie durch die $r-3$ unabhängigen Doppelverhältnisse der Zahlen $w^{(1)}, w^{(2)} \ldots w^{(r)}$ dargestellt wird.

[1]) Kronecker l. c. pag. 1233.

Digitized by Google

Ueber die Bedingungen möglichst präziser Abbildung eines Objekts von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat.

Von **L. v. Seidel.**

Aus dem Nachlasse herausgegeben von **S. Finsterwalder.**

(*Eingelaufen 4. Oktober.*)

Vorbemerkung des Herausgebers.

Die vorliegende Arbeit fand sich im Nachlasse Ludwig v. Seidel's in nahezu druckfertiger Form (redigiert im Jahre 1881) vor. Ihr Inhalt wurde bereits in der Akademie-Sitzung vom 6. März 1880 vorgetragen. Sie bot zur Zeit ihrer Entstehung entschieden viel Neues und, wenn auch in den 18 Jahren, während welcher sie im Schreibtische geruht hat, das Meiste davon wieder entdeckt wurde, so ist sie doch für die Stellung des Verfassers in der Dioptrik so charakteristisch, dass sich ihre Veröffentlichung auch jetzt noch verlohnt. Seidel's Verdienste um die rechnende Dioptrik liegen nach zwei Richtungen; er hat einerseits praktische Formeln nebst Controlen zur strengen trigonometrischen Durchrechnung einzelner Strahlen in und ausser der Axenebene eines zentrierten Systems angegeben, welche gegenwärtig allgemein benützt werden; andrerseits hat er aber auch Näherungsformeln (Reihenentwicklungen) aufgestellt, welche mit für viele Fälle ausreichender Genauigkeit die Gesamtheit des Strahlengangs in seiner Abhängigkeit von den Componenten des Linsensystemes darstellen und Schlüsse allgemeiner Natur gestatten. Im Bereiche der letzteren Näherungsformeln bewegt sich die vorliegende Untersuchung, die

Digitized by Google

durch den Abbe'schen Sinussatz angeregt war und zunächst das Ziel verfolgt, dessen Uebereinstimmung mit der sogenannten Fraunhoferbedingung zu zeigen. Nebenher wurden die bereits früher aus den Formeln gezogenen Resultate zusammengefasst und ergänzt; offenbar in der Absicht, die Brauchbarkeit der Formeln, die, trotzdem sie bereits vor einem Vierteljahrhundert veröffentlicht waren, kaum Beachtung gefunden hatten, aufs neue zu zeigen. Zu dieser Inslichtstellung seiner Erfolge hatte v. Seidel allen Grund, denn das in seinen Formeln längst gelöste Problem ist von verschiedenen Seiten wiederholt aufgegriffen worden, ohne dass die von ihm von Anfang an gewollte und erzielte Vollständigkeit und Eleganz der Resultate wieder erreicht wurde. Keiner von den Späteren hat an Seidel's Untersuchungen angeknüpft, ja sie auch nur genannt und dem Verfasser dieser Bemerkungen blieb es vorbehalten, nach 35 Jahren auf dem von Seidel gelegten Grunde weiter zu bauen.[1]) Indessen hat auch Seidel einen ihm unbekannt gebliebenen Vorgänger auf dem Gebiete der Dioptrik gehabt, dessen Leistungen auf diesem Gebiete allerdings selbst heute noch gar nicht gewürdigt werden und dessen Unbekanntheit bei Seidel um so weniger ins Gewicht fällt, als er über seine Leistungen nur einen vorläufigen, in seiner Kürze schwer verständlichen Bericht der Oeffentlichkeit übergeben hat. Der Genannte ist kein Geringerer als William R. Hamilton, der Entdecker des nach ihm benannten mechanischen Princips. Der erwähnte Bericht findet sich im Report of the third meeting of the British Association held at Cambridge in 1833. London 1834, S. 360—370 (On some Results of the View of a Characteristic Function in Optics). Herr F. Klein in Göttingen hat in einem Vortrage gelegentlich der Naturforscher-Versammlung in Halle 1891 die Fäden aufgedeckt, welche die wohlbekannten allgemeinen Untersuchungen Hamil-

[1]) Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf grund der Seidel'schen Formeln untersucht von S. Finsterwalder. Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss., II. Cl., XVII. Bd., III. Abth. 1891.

Digitized by Google

ton's über Strahlensysteme mit seiner Integrationstheorie der mechanischen Differentialgleichungen verknüpfen, und dargethan, wie erstere rein analytisch betrachtet einen speciellen Fall der letzteren betreffen. Ihm verdanke ich auch den Hinweis auf den oben erwähnten Bericht. Das Studium dieses Berichtes überzeugte mich, dass Hamilton in der Theorie der Aberrationen eines dioptrischen Apparates nicht nur weiter vorgedrungen war, als Seidel in seinen bereits früher veröffentlichten Untersuchungen, sondern auch in der hier vorliegenden. Von den Resultaten, die ich selber im Jahre 1891 auf grund der Seidel'schen Formeln entwickelt habe, sind fast alle, die sich nicht auf die Verteilung der Helligkeit des Lichtfleckes und die Aenderung desselben bei veränderter Abblendung beziehen, angedeutet. Die Hamilton'sche Methode zur Herleitung der Formeln ist bei weitem umfassender als die Seidel'sche, obschon letztere im Gegensatz zur ersteren die Formeln in unmittelbar praktisch verwendbarer Gestalt liefert; sie ist von Herrn Thiesen[1]) im Jahre 1890 von neuem entdeckt worden. In jüngster Zeit wurde sie noch übertroffen durch die Theorie des Eikonals[2]) von Herrn H. Bruns, der Lie's Lehre von den Berührungstransformationen für die Dioptrik fruchtbar gemacht hat.

Hiernach stellt sich die Geschichte der Entdeckung der Aberrationen 3. Ordnung kurz folgendermassen. Nachdem Euler in den Jahren 1757—61 die Aberration in der Axe systematisch berechnen gelehrt hatte, erkannte Fraunhofer etwa im Jahre 1825 den Einfluss des in der Praxis erheblichsten Gliedes der Aberrationen ausser der Axe und verstand es, ihn praktisch zu beseitigen. Im Jahre 1833 fand Hamilton, weit seiner Zeit vorauseilend, die allgemeine Gestalt der Formeln, welche sämmtliche 5 Aberrationen in und ausser der Axe darstellen, mittels der ihm eigentümlichen Methode der

---

[1]) Beiträge zur Dioptrik. Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1890.

[2]) Das Eikonal von Heinrich Bruns. Abhandl. der math.-phys. Classe der k. sächs. Akad. d. Wiss., 21. Bd. Leipzig 1895.

Digitized by Google

Variation einer charakteristischen Funktion (in diesem Falle der Zeit, die das Licht braucht, um von einem Punkte des Weges zu einem andern zu kommen). Doch hat er vermutlich den Zusammenhang der Constanten seiner Formeln mit den Bestimmungsstücken des dioptrischen Apparates nicht abgeleitet, wie er überhaupt seinen diesbezüglichen Untersuchungen mehr theoretisches als praktisches Interesse beimisst. Bewundernswert bleibt die uns im Detail allerdings unbekannte vollständige Diskussion der Formeln, die auf nichts weniger als die Bestimmung der Gestalt der Centrafläche einer Fläche 2. Grades hinauskommt. Unter dem Einflusse von Gauss' dioptrischen Untersuchungen 1838—43 hat Seidel die Reihenentwicklung der Bestimmungsstücke eines Strahles, die dort beim 2. Gliede abbricht, auf Glieder 3. Ordnung ausgedehnt und die zur numerischen Berechnung aufs beste vorbereiteten Formeln im Jahre 1855 publiciert. Auf ähnlichem Wege war seit 1842 bereits Petzval in Wien vorgegangen, aber trotz unendlichen Rechenaufwandes, der allerdings zu dem praktisch höchst bedeutsamen Petzval'schen Porträtobjektiv führte, gelangte er nicht zu sicheren Resultaten allgemeinerer Natur. Ohne von Seidel's Resultaten Kenntnis zu besitzen, hat sich Zinken-Sommer[1]) in Braunschweig im Jahre 1870 das gleiche Ziel gesetzt, dasselbe indessen in ähnlicher Vollkommenheit wie Seidel nicht erreicht. Durch eine Betrachtung von Clausius aus dem Jahre 1864, die sich auf den 2. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie stützt, war ein wichtiger dioptrischer Satz vorbereitet worden, dessen weittragende Bedeutung allerdings erst von Abbe (1873) und Helmholtz (1874) erkannt worden war und der heute den Namen des Abbe'schen Sinussatzes führt. Dieser gibt die Bedingung an, die zu der Vernichtung der Kugelabweichung hinzutreten muss, damit beliebig weit geöffnete Büschel nicht nur einen Punkt der Axe selbst, sondern auch noch benachbarte Punkte scharf abbilden.

---

[1]) Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870.

Digitized by Google

Seine Uebereinstimmung mit der Fraunhoferbedingung auf dem beschränkten Gebiet der Aberrationen 3. Ordnung zeigt Seidel in vorliegender Abhandlung. Aus etwas späterer Zeit dürfte die auf Abbe zurückgehende getrennte Behandlung der einzelnen Aberrationen stammen, welche durch Herrn Czapski 1893 an die Oeffentlichkeit gekommen ist. Ganz unbeeinflusst von Seidel's Arbeiten ist die Wiederentdeckung des Hamilton'schen Weges zur Ableitung der Aberrationen durch Herrn Thiesen 1890, welche durch Helmholtz angeregt war.

Aber auch sie führte nicht zu unmittelbar numerisch verwertbaren Formeln. Die gleiche Bemerkung gilt von der methodisch am höchsten stehenden Arbeit des Herrn H. Bruns vom Jahre 1895. Herr Abbe hat seit Beginn der 70er Jahre die gewöhnliche Näherungstheorie der optischen Instrumente auf grund der Bemerkung entwickelt, dass dieselben eine strahlen- und punktweise Abbildung des Objekt- und Bildraumes vermitteln. Lässt man die Eigenschaft der punktweisen Abbildung fallen und führt man dafür jene ein: Nomalensysteme des Objektraumes in solche des Bildraumes überzuführen, so kommt man zu einer Erweiterung der Abbe'schen Auffassung, welche auch die Theorie der Aberrationen einschliesst. Herr Bruns hat diesen Schritt gemacht und gezeigt, dass sich die Abbildungsformeln, dann immer aus einer erzeugenden Funktion (Eikonal) der Strahlencoordinaten in analoger Weise durch Differentiieren ableiten lassen, wie die Formeln für die Componenten der Kraft aus dem Potential. Er ist sich, wie aus seinen einleitenden Bemerkungen hervorgeht, der nahen Verwandtschaft seiner Methode mit dem mechanischen Principe Hamilton's wohl bewusst, ahnt aber

---

[1]) Aus dem Jahre 1893 nach dem Erscheinen meiner eigenen an Seidel anknüpfenden Untersuchung (1891) ist mir eine Arbeit von Herrn M. L. V. Charlier bekannt geworden, aus welcher hervorgeht, dass derselbe wenigstens die allgemeine Gestalt der Formeln für die Aberrationen 3. Ordnung wieder entwickelt hat, ohne seine Vorgänger zu kennen (Sur la marche de la lumière à travers un système de lentilles sphériques. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 1893, S. 58.

Digitized by Google

nicht, dass der Urheber jenes Princips schon vor 60 Jahren das gleiche Problem mit ähnlichen Mitteln behandelt hat. Auch die Entwicklungen Seidel's, Zinken-Sommer's und Thiesen's finden keine Erwähnung bei Bruns, wenn man nicht annehmen will, dass er sie unter die „in der Literatur gelegentlich vorkommenden langathmigen Entwickelungen, die die Schwierigkeit der numerischen Berechnung überwunden zu haben vorgeben," zählt. Dieses harte Urteil würde am allerwenigsten auf Seidel's Leistungen in der Dioptrik passen.

In einem im November 1879 veröffentlichten Aufsatz[1]) bespricht Herr Abbe in Jena, dessen scharfsinnige Untersuchungen der Vervollkommnung der Optik sowohl auf theoretischem wie auf praktischem Gebiete zugewendet sind, die bekanntlich zuerst von Fraunhofer ins Auge gefasste und der Konstruktion seines Fernrohrobjektivs zu grunde gelegte Bedingung, gemäss welcher die genaue Vereinigung der Lichtstrahlen von mittlerer Brechbarkeit zu einem Bildpunkte, wie sie durch Aufhebung der sogenannten sphärischen Aberration für die Mitte des Gesichtsfeldes erzielt ist, nunmehr auch herbeigeführt wird für die die Mitte zunächst umgebenden Regionen des Sehfeldes. Wenn man sich erlaubt, nach abgekürzter Redeweise, in dem Fall, in welchem die erste Bedingung zur Aufhebung der Kugelabweichung erfüllt ist, zu sagen, dass infolgedessen ein Lichtbüschel von endlicher Oeffnung zur strengen Konvergenz gebracht werde, so darf man in ganz analogem Sinn die Fraunhofer'sche Bedingung als diejenige bezeichnen, durch deren Hinzutritt ein Objekt von endlicher Grösse zur präzisen Abbildung gelangt. Faktisch wird man dabei nicht vergessen, dass, da das Lichtbüschel unendlich viele Strahlen enthält, zur mathematisch strengen Vereinigung aller in einen Konvergenzpunkt unendlich viele

---

[1]) Ueber die Bedingungen des Aplanatismus der Linsensysteme, Sitzungsber. der Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1879 Nov.

Digitized by Google

Bedingungen erfüllt sein müssten, und dass ebenso auch die Ausdehnung der für einen leuchtenden Punkt erst erreichten Genauigkeit auf ein endliches Gesichtsfeld stricte genommen unendlich viele Bedingungen erfordern würde. Unsere dioptrische Theorie, soweit sie einen analytischen Charakter trägt und nicht lediglich Vorschriften zur Zahlenrechnung aufstellt, setzt bekanntlich voraus, dass das anguläre Mass des Gesichtsfeldes und ebenso das entsprechende der Oeffnung des Apparats kleine Grössen sind, nach deren Potenzen die für die Untersuchung massgebenden Grössen in rasch konvergierende Reihen entwickelt werden können. Berücksichtigt man von diesen Reihen nur die Glieder der niedrigsten Ordnung, so ergeben sich bekanntlich die Näherungsformeln, wie sie in vorzüglichster Eleganz in den „dioptrischen Untersuchungen" von Gauss gegeben sind: Formeln, die als eine erste Approximation für jeden Apparat gelten, die aber zugleich das Ideal für den Optiker repräsentieren, weil der Apparat allen Ansprüchen, die man an seine Leistungen stellen kann, dann vollkommen entsprechen würde, wenn seine Wirkung durch jene Näherungsformeln genau dargestellt wäre. Unter den vorhin gemachten Voraussetzungen erscheinen die Dimensionen des auf irgend einer Transversalebene aufgefangenen Bildes von einem endlichen Objekt als kleine Grössen erster Ordnung, welche man aus jenen Näherungsformeln erhält. Die Fehler in diesem Bild, d. h. die Differenzen zwischen den Punkten, in welchen die Transversalebene von den aus dem Apparat hervorgehenden Lichtstrahlen wirklich passiert wird, und den Stellen, an welchen dieser Durchgang stattfinden müsste, um eine präzise Abbildung der leuchtenden Punkte zu erzeugen, sind durch kleine Grössen von der dritten Ordnung dargestellt, da ihre vollständige Reihenentwicklung überhaupt nur Glieder ungerader Dimension enthält, und sonach der Ausdruck dessen, was den Unterschied zwischen der Aberration und der genauen Betrachtung enthält, in der dritten Ordnung, als seiner niedrigsten, und unter den vorausgesetzten Verhältnissen wichtigsten, beginnen muss. Soll die Leistung des optischen Apparats ihrem

Digitized by Google

Ideal möglichst nahe gebracht werden, so handelt es sich zunächst um die Aufhebung dieser Glieder dritter Ordnung als der wichtigsten Bestandteile der Ausdrücke für die im Bild zur Entstehung kommenden Fehler. Ihre Vernichtung, soweit dieselbe mit disponiblen Mitteln erreichbar ist, muss bewirkt werden durch die Disposition über die optischen Elemente des herzustellenden Apparats, d. i. solche Konstanten, welche die Krümmungen und die gegenseitigen Abstände der den Apparat konstituierenden, zentrierten sphärischen Flächen bestimmen.

Die alten Ausdrücke, wie sie zuerst von Euler für die Berechnung und Aufhebung der sog. sphärischen Aberration, als des unter gewöhnlichen Umständen wichtigsten unter den Fehlergliedern dritter Ordnung, aufgestellt worden sind, stellen dieselbe nicht explicite durch die Elemente des optischen Systems dar und sind ausserdem ungenau wegen der Vernachlässigung der Dicke der Glaslinsen. Vermöge dieser Vernachlässigung und durch Einführung von gewissen, sehr sinnreich gewählten, für die Form der Linsen massgebenden Hilfsgrössen (die man, verbunden mit den Brennweiten als die von ihm angewandten Elemente des Systems betrachten kann) hat übrigens Euler zunächst für den Fall des nur aus zwei Linsen bestehenden Doppelobjektivs der Bedingung für die Aufhebung der Kugelabweichung die bekannte, für den Gebrauch hinlänglich bequeme, und viel benutzte Gestalt gegeben. Ich glaube der erste zu sein, der den Ausdruck dieser Grösse vollständig, ohne Vernachlässigung der Dicke der Gläser, und für beliebig viele brechende Flächen gegeben hat,[1]) und zwar explicite durch das ursprünglich zunächst zu diesem Zwecke eingeführte Elementensystem, nämlich durch die von mir mit σ und h bezeichneten Grössen, für welche ich später den Namen der auf eine bestimmte Objektebene bezogenen Elemente des Apparats vorgeschlagen habe.[2])

Mit Hilfe eben dieser Elemente lassen sich in gleicher Weise die sämtlichen Glieder dritter Ordnung explicite in über-

[1]) Astr. Nachr. Nr. 835, Aufsatz vom 24. Aug. 1852.

[2]) Astr. Nachr. Nr. 1027 ff.

Digitized by Google

sichtlichen Ausdrücken darstellen, welche die Fehler in der Abbildung irgend eines Objekts durch den aus sphärischen und gegen einander centrierten Flächen bestehenden Apparat darstellen, und zwar in solcher Weise, dass die Untersuchung in gleicher Weise die in der Theorie früher beiseite gelassenen zur Axe „windschiefen" Strahlen umfasst, wie diejenigen, welche sich in einer durch die optische Axe gelegten Ebene fortpflanzen. Die vollständig entwickelten Ausdrücke habe ich in den Nummern 1027—1029 der Astr. Nachr. in einem Aufsatz vom 6. April 1855 gegeben.[1]) Mit Hilfe dieser Ausdrücke wird also die Lage jedes austretenden Strahls explicite durch die Grössen, welche seine Lage vor dem Eintritt in den Apparat angeben, und durch die Elemente des Systems soweit dargestellt, dass die vernachlässigten Bestandteile in den Fehlern des Bildes nurmehr von der 5. Ordnung sind. Auch gewisse Konsequenzen findet man a. a. O. bereits zur Sprache gebracht in betreff von Hindernissen, die sich vollständiger Aufhebung aller Fehler dritter Ordnung entgegenstellen, ebenso die günstigere Ausnahmestellung, welche einerseits ein Apparat, der zur Abbildung eines Objekts in Naturgrösse zu dienen hat, und andrerseits das Fernrohr, als ein Ganzes betrachtet, in Anspruch nehmen. Zur Bestimmung der ursprünglichen Lage des Strahls, sowie derjenigen, die er nach beliebig vielen Brechungen angenommen hat, erscheint es passend, die Koordinaten der Punkte einzuführen, in welchen zwei verschiedene, auf der Axe stehende Ebenen von ihm durchdrungen werden. Dabei erweist es sich als nützlich, nicht dieselben Ebenenpaare für den einfallenden und den gebrochenen Strahl zu betrachten, sondern die Ebenen, welche für den gebrochenen Strahl dienen, an jene Stellen zu legen, wo durch den Apparat selbst die für den einfallenden Strahl beliebig gewählten Ebenen ihre Abbilder finden würden,

---

[1]) Einen vorläufigen Bericht über diese Arbeit, worin insbesondere die „Fraunhofer'sche Bedingung" zur Sprache kommt, ist schon gegeben in den Sitzungsber. der hies. Akad. v. Jan. 1855, eine weitere Besprechung der abgeleiteten Resultate habe ich gegeben in den Abh. der naturw. techn. Kommission bei der kgl. Akad. d. Wiss., Bd. 1, pag. 227.

Digitized by Google

sodass für das ganze System brechender Flächen und Medien zwei Systeme von Transversalebenen sich ergeben, deren jedes durch seine Grundebenen für jeden bestimmten Apparat bestimmt ist. In den gewöhnlichen Fällen lässt man am passendsten die Grundebene des einen Systems auf das Objekt fallen, die des zweiten aber die erste brechende Fläche in ihrer Mitte berühren. Mit der Einführung dieser beiden Ebenensysteme stellt sich sozusagen von selbst auch der gleichzeitige Gebrauch zweier verschieden gewählten Koordinatensysteme für den Apparat ein, nämlich derjenigen, welche nach dem obigen Sprachgebrauch auf die Grundebene des einen und des andern Systems bezogen sind: Es ist aber ein Hauptvorteil von der Anwendung dieser Art Elemente, dass zwischen ihren Systemen einfache Verbindungsgleichungen bestehen, sodass man (wie ich gethan habe) in den Endformeln alles durch die Grössen des einen Systems allein ausdrücken kann,[1]) wodurch die Zahl der Variabeln auf das notwendige und ausreichende Mass reduziert wird. Gleichfalls in Verbindung mit dem Gebrauch dieser Ebenensysteme steht, zur Bestimmung der Punkte, in welchen die Lichtstrahlen die Transversalebenen durchsetzen, die Einführung eines von Medium zu Medium innerhalb jedes Ebenensystems sich ändernden Massstabs für die linearen Koordinaten jener Punkte, oder die Einführung reduzierter Werte für die Koordinaten, mittels deren bewirkt wird, dass (mit Ausschluss ihrer Korrektionsglieder dritter Ordnung) die erwähnten Koordinaten konstant für alle (den verschiedenen Medien zugehörigen) Ebenen eines jeden der beiden Systeme werden, wobei sie auch endlich bleiben an unendlich entfernten Objekten von endlicher scheinbarer Grösse. Führt man nun diese reduzierten Grössen als Mass für die transversalen (das ist auf der optischen Axe senkrecht stehenden) Koordinaten in den beiden Grundebenen ein, die hier der Kürze wegen als Objektebene

---

[1]) Diese Gleichungen habe ich abgeleitet in Nr. 871 der Astr. Nachr., ihre umfassende Anwendung zu obigem Zweck in dem späteren Aufsatz Nr. 1027 ff. dess. Journ.

Digitized by Google

und als Oeffnungsebene benannt werden mögen, und bezeichnet man in den hiedurch vorgeschriebenen Massen mit R in der Objektebene den Abstand eines bestimmten leuchtenden Punktes von der optischen Axe, dagegen in der Oeffnungsebene mit x die dem R parallel gezählte, oder, wie sie hier heissen soll, radiale, mit y die auf ersterer senkrechte, oder laterale Koordinate des Punktes, in welchem im speziellen der von jenem leuchtenden Punkt kommende Strahl die Oeffnungsebene trifft, so werden zufolge des früher Gesagten R, x, y als kleine Grössen erster Ordnung angesehen im Vergleich mit den der Axe parallel gezählten Längen, welche beim Apparat in Betracht kommen. Wäre nun der ideale Grenzfall genau gegeben, welchen die bekannten Näherungsformeln repräsentieren, so würden alle von dem Punkte R kommenden Strahlen einer gewissen Bildebene, welche zugleich die letzte Ebene unseres ersten Systems ist (und ebenso auch jede einzelne frühere Ebene dieses Systems), in einem und demselben, von x und y ganz unabhängigen Punkt durchstossen und hier das präzise Bild des leuchtenden Punktes erzeugen, dessen radiale Koordinate in dem hier geltenden, reduzierten Mass ausgedrückt gleichfalls R, und dessen laterale Koordinate 0 wäre. In Wirklichkeit aber treten zu diesen beiden Koordinatenwerten die mit Gliedern dritter Ordnung der kleinen Grössen beginnenden Korrekturen hinzu, welche von x und y abhängig, also für die verschiedenen, von dem leuchtenden Punkte kommenden Strahlen verschieden sind, und sonach die Undeutlichkeit des Bildes, sowie auch nach Umständen eine Verzerrung in demselben bedingen. Unsere drei Grössen R, x, y liefern folgende 10 Produkte dritter Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\ & x^2R & & xyR & & y^2R & \\ & & xR^2 & & yR^2 & & \\ & & & R^3 & & & \end{array}$$

und in den Hauptgliedern dritter Ordnung, welche als Korrektionen zur radialen Koordinate R und zur lateralen Ko-

Digitized by Google

ordinate 0 in der Bildebene hinzutreten, hat man also nebeneinander die 10 Produkte zu erwarten, jedes multipliziert mit einem von den Elementen des Apparats abhängenden Koeffizienten. Die Entwicklung dieser verschiedenen Koeffizienten bildet die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe. Aus der Symmetrie, welche beiderseits derjenigen Ebene notwendig stattfindet, die zugleich die optische Axe und den leuchtenden Punkt enthält, und in welche unsere radialen Koordinaten fallen, während die lateralen auf ihr senkrecht stehen, ist übrigens sofort zu erkennen, dass die radialen Fehlerabweichungen im Bilde gerade, die lateralen ungerade Funktionen von y sein müssen, dass also unsere 10 Produkte in der Weise in zwei Hauptgruppen zerfallen müssen, dass nur vorkommen können in dem Ausdruck der radialen Fehler des Bildes die 6 Glieder mit x^3, xy^2, Rx^2, Ry^2, R^2x, R^3, und in dem der lateralen Fehler die 4 Glieder mit x^2y, y^3, Rxy, R^2y. In der That finden sich auch in den ersten Ausdrücken jene 6, in den zweiten die letzteren 4 wirklich alle vor. Die Anzahl von 10 Koeffizienten, welche zur vollständigen Kenntnis der Fehlerbestandteile dritter Ordnung durch die Elemente des optischen Systems demgemäss darzustellen waren, reduziert sich jedoch erheblich. Aus der Erwägung, dass in dem einfachen Hauptfalle $R = o$, wo der leuchtende Punkt sich in der Axe selbst befindet, der Strahl die Ebene nicht verlassen kann, welche die Axe und seine erste Richtung enthält, und dass die absolute Grösse der ganzen Abweichung, die er im Bilde zeigt, hier notwendig proportional wird der dritten Potenz des Abstandes von der Axe, in welchem er die Oeffnungsebene trifft, ergibt sich, dass nachbenannte 4 Glieder alle ein und denselben Koeffizienten haben müssen, nämlich die beiden mit $x \cdot x^2$ und $x \cdot y^2$ im ersten, und die beiden mit $y \cdot x^2$ und $y \cdot y^2$ im zweiten Ausdruck. Mit der Vernichtung des gemeinschaftlichen Koeffizienten dieser 4 Glieder wird für die Mitte des Gesichtsfeldes $R = o$ die Kugelabweichung (genauer gesagt ihr Bestandteil dritter Ordnung) völlig aufgehoben: in der That hat sich die Bedingungsgleichung für die Beseitigung

Digitized by Google

dieses Fehlers aus der auf den Raum ausgedehnten Untersuchung in den Astr. Nachr. No. 1027 ff. genau ebenso ergeben, wie ich sie früher auf wesentlich anderem Wege in No. 835 für sich allein abgeleitet hatte. Durch diese notwendigen Beziehungen vermindert sich die Anzahl der Koeffizienten für unsere $6 + 4$ Produkte von 10 auf 7. Dass diese Anzahl sich noch weiter vermindert, nämlich von 7 auf 5, ist ein Umstand, von welchem es nicht scheint, dass auch er sich als notwendig a priori ohne Rechnung oder eine dieselbe ersetzende Deduktion erkennen lasse. Wirklich verhält es sich so, da die Entwicklung der Werte all dieser Koordinaten dargethan hat, dass in dem Ausdruck der radialen Fehler die beiden Produkte Rx^2 und Ry^2 nur in der Verbindung auftreten $R(3x^2 + y^2)$, und weiter, dass diese Verbindung mit demselben Koeffizienten multipliziert erscheint, welcher in dem Ausdruck der lateralen Fehler das Produkt $2\,R\,x\,y$ enthält.

Sonach treten im ganzen im Ausdruck der radialen Fehler 4 Koeffizienten auf, multipliziert mit den Grössen $x(x^2 + y^2)$, $R(3\,x^2 + y^2)$, $R^2 x$ und R^3, in dem Ausdruck der lateralen Fehler aber drei Koeffizienten, multipliziert mit den Grössen $y(x^2 + y^2)$, $2\,R\,x\,y$, $R^2\,y$, und dabei ist der erste Koeffizient des einen Ausdrucks dem ersten des andern, ebenso der zweite des einen dem zweiten des andern gleich, während die Koeffizienten der beiderseitigen dritten Glieder verschieden sind. Das vierte mit R^3 multiplizierte Glied im Ausdruck der radialen Abweichung steht ebenfalls isoliert. Da dieses Glied für alle von demselben leuchtenden Punkt kommenden (R = const.), an den verschiedenen Stellen der Oeffnungsebene auffallenden Strahlen konstant ist, so bewirkt es nur eine Verschiebung im radialen Sinn des ganzen, in der Bildebene von jenem leuchtenden Punkt herrührenden Lichtphantom, hat aber auf die Ausdehnung desselben keinen Einfluss, oder mit andern Worten, dieses Glied ist nicht für die Schärfe der Abbildung, sondern nur für die Richtigkeit ihrer Perspektive von Einfluss. Bezeichnen wir die 5 Koeffizienten mit $A, B \ldots E$, die radiale Abweichung, welche der durch R, x, y bestimmte Strahl schliess-

Digitized by Google

lich in der Bildebene erleidet, durch ξ, die laterale durch η, so hat man nach dem Gesagten

$$\text{I.}\quad \xi = A\,x\,(x^2 + y^2) + B\,R\,(3\,x^2 + y^2) + C\,R^2\,x + E\,R^3$$
$$\text{II.}\quad \eta = A\,y\,(x^2 + y^2) + 2\,B\,R\,x\,y + D\,R^2\,y.$$

Die Ausdrücke der Koeffizienten A—E durch die Elemente σ, h des optischen Systems findet man entwickelt in der schon zitierten Abh. No. 1027 der Astr. Nachr. Ich habe sie dort in doppelter Form gegeben, — unter gleichzeitiger Anwendung der Elemente σ, h, die sich auf das der Objektebene zugehörige Ebenensystem beziehen, und der Elemente σ', h', welche in ganz gleicher Weise auf das System der Oeffnungsebene Bezug haben (siehe die Formeln I—VII a. a. O.) — sodann aber, weil selbstverständlich die Grössen σ', h' in notwendiger Verbindung mit σ, h stehen, nach Elimination der erstgenannten durch letztere allein (siehe die Ausdrücke VIII und IX a. a. O.). Für die meisten Fälle, aber nicht für alle, ist die letztere Darstellung die bequemere.[1]) In jener Abhandlung habe ich übrigens statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Oeffnungsebene Polarkoordinaten angewendet. Für die Vergleichung ist zu bemerken, dass unser x dem dortigen $R' \cos(\nu' - \nu)$, unser y dem dortigen $R' \sin(\nu' - \nu)$ gleich ist.

Bei Apparaten von sehr kleinem, angulärem Radius des Gesichtsfeldes und verhältnismässig beträchtlicher Oeffnung (d. i. für ganz kleine Werte des Winkels, unter welchem der Halbmesser von ihrem Krümmungsmittelpunkt aus erscheint,) bleibt der extreme Wert von R, der für den Rand des Gesichtsfeldes gilt, sehr wesentlich kleiner als die dem Rand der Oeffnung zugehörigen Werte x, y. In diesem Fall, welcher u. a. derjenige eines Fernrohrs von stärkerer Vergrösserung ist,

---

[1]) Ein paar Fehler, welche sich im Abdruck der erstgenannten Formeln befinden und welche auch bei der Vergleichung mit dem oben Gesagten ohne Belang sind, werden am Schluss des vorliegenden Aufsatzes berichtigt. (Diese Berichtigung hat der Herausgeber in der S. 396 citierten Arbeit bereits vorgenommen.)

Digitized by Google

werden in den Ausdrücken I. und II. die Glieder an Wichtigkeit der Reihe nach abnehmen, wenn in ihnen die Ordnung der Grössen x und y sinkt und dagegen die von R sich erhebt. Seitdem die präzis rechnende Optik sich auch mit der Herstellung von Apparaten von sehr beträchtlichem Gesichtsfeld zu beschäftigen hat (z. B. für photographische Zwecke), kann zwar nicht behauptet werden, dass auch für solche durchaus die Anfangsglieder unserer Ausdrücke, wenn sie nicht aufgehoben sind, die grössten Bestandteile der Fehler im Bilde liefern werden, aber auch, wenn vermöge der Ausdehnung des Gesichtsfeldes, d. h. der Grösse des Maximalwertes von R, in den äusseren Partieen die späteren Glieder die vorwiegenden werden sollten, müssen doch nach bekannten mathematischen Gesetzen für hinlänglich kleine Werte von R die Glieder der Reihen I. und II. stetig abnehmen, und da die mittleren Teile des Gesichtsfeldes, für welche dies gilt, kaum je bei einem Apparat in Wegfall kommen, vielmehr fast immer diejenigen sein werden, auf welche die Aufmerksamkeit zuvörderst zu richten ist, so ist es hiedurch klar, dass man vor allem A, dann B u. s. w. vernichten muss, um das Bild möglichst zu vervollkommnen. Man kann dabei auch dies geltend machen, dass durch die Vernichtung jeder einzelnen der beiden Grössen das Lichtphantom gleichzeitig in der radialen und in der lateralen Dimension verkleinert wird, während $C = o$ nur in der ersteren, $D = o$ nur in der letzteren Richtung einen Vorteil gewährt.

Die Bedingung $A = o$ ist die alte Eulers'che für die Aufhebung der Kugelabweichung. Nur hat Euler bekanntlich bei der Ableitung ihres Ausdrucks sich genötigt gesehen, die Dicke der Glaslinsen zu vernachlässigen, während er der Schwierigkeit, welche bei Anwendung seiner Formel aus dem Umstand entspringt, dass nicht alles explicite durch die Elemente des Apparats ausgedrückt ist, Herr zu werden gewusst hat durch die Einführung gewisser besonderer, gerade auf das Mass der Kugelabweichung bei den einzelnen Linsen bezüglichen Grössen, die man in Verbindung mit den Brennweiten als Euler'sche Elemente des Apparats bezeichnen könnte. Durch

Digitized by Google

die Elemente σ und h habe ich die Gleichung $A = o$ vollkommen explicite zuerst ausgedrückt (No. 835 der Astr. Nachr. Gleichung I), und es war dabei, sowie in den ferner auf diese Elemente basierten Entwicklungen nicht nötig, die Gläserdicken ausser acht zu lassen. Die nächstfolgende Bedingung für die Aufhebung der Fehler ist nach der Reihenfolge die Gleichung $B = o$. Da sie die erste ist, welche dadurch hinzutritt, dass nicht mehr für den Punkt in der Mitte des Gesichtsfeldes ($R = o$) allein vorgesorgt wird, kann man in der anfangs festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass durch ihre Erfüllung die Aufhebung der Kugelabweichung auf ein endliches Gesichtsfeld ausgedehnt wird. Man muss nach den Mitteilungen, die von Utzschneider nach Fraunhofer's Tode gegeben worden sind, annehmen, dass der letztere bei der Ausrechnung seines Fernrohrobjektivs diese Vervollkommnung des Bildes bezweckt habe, und da nach Aufstellung des mathematischen Ausdrucks für dieselbe[1]) sich ergeben hat, dass in der That die Bedingung $B = o$ durch das Fraunhofer'sche Objektiv sehr genau erfüllt ist, so habe ich derselben den Namen „Fraunhofer'sche Bedingung" gegeben. Uebrigens haben bekanntlich theoretische Untersuchungen Verschiedener, welche alle neueren Datums sind als Fraunhofer's Leistung, gezeigt, dass sein Objektiv eine so bedeutende Anzahl wichtiger Vorzüge vereinigt, dass mit den gegebenen Mitteln geradezu ein Maximum des Erfolgs von ihm in so glänzender Weise erreicht worden ist, wie vielleicht niemals sonst in dem Gebiete der höheren Technik. (Vergleiche darüber den Aufsatz von Dr. Adolf Steinheil, welcher zugleich Bezug nimmt auf die einschlägigen Untersuchungen von J. Herschel, von Biot und von mir. Diese Berichte 2. Bd. S. 284, 1867.)

Prof. Abbe hat neuerlich[2]) für die Fraunhofer'sche Bedingung $B = 0$, nach den im Ergebnis übereinstimmenden, wiewohl auf sehr verschiedener Art der Betrachtung beruhen-

[1]) Siehe meine mehrfach citierte Abh. v. 6. April 1855, Astr. Nachr. Nr. 1027.

[2]) Sitzungsber. der Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. v. 28. Nov. 1879.

Digitized by Google

den Untersuchungen von Helmholtz und von ihm selbst, einen Ausdruck gegeben, welcher durch seine elegante Formulierung bemerkenswert ist. Zwar setzt diese Formulierung nur an Stelle des Postulats, dass auch die zunächst seitwärts von der Mitte befindlichen Punkte im Gesichtsfeld ihre Kugelabweichung verlieren sollen, das andere Postulat, dass für alle von der Mitte des Gesichtsfelds ausgehenden Strahlen das Verhältnis der Sinuse ihrer letzten Winkel mit der Axe zum Sinus ihrer ersten Winkel mit derselben ein konstantes sei, ohne dass durch Aufstellung einer zwischen den Elementen des Apparats zu erfüllenden Gleichung ersichtlich wäre, auf welche Art die Forderung erreicht werden soll. Indessen ist, auch abgesehen von der theoretischen Eleganz des Satzes, die neue Formulierung immerhin bequemer für den auf dem Weg der Versuche vorgehenden Rechner, als die ursprüngliche. Besonders interessant ist aus dem Aufsatz des Herrn Abbe auch die Mitteilung, dass die Mikroskopobjektive aus den verschiedensten Bezugsquellen, welche sich die Anerkennung ihrer Güte durch den Erfolg erworben haben, übereinstimmend unserer Bedingung genügen.[1]) Es ist sonach die Wichtigkeit derselben auch schon durch eine umfangreiche Erfahrung, selbst auf dem Felde der praktischen Optik bestätigt, auf welchem dieselbe bis in die neueste Zeit fast nur tatonnierend zu Werke geht. Diejenigen ihrer Produktionen, welche sich ohne Wissen ihrer Verfertiger, die selbst nur nach dem Effekt kombinierten, unserer Bedingung anschlossen, haben vermöge ihrer besseren Leistung in der Konkurrenz die andern aus dem Felde geschlagen.

Es ist von Interesse, die Abbe-Helmholtz'sche Fassung unserer Bedingung, d. i. die Forderung der vorhin erwähnten Proportionalität des Sinus, mit derjenigen Form zu vergleichen, in welcher ich a. o. O. bereits vor 25 Jahren dieselbe Bedingung aufgestellt habe. In dieser älteren Gestalt ist, durch-

[1]) Seidel's Fraunhoferbedingung ist, wie der Herausgeber bereits in der Einleitung hervorhob, specieller als der Abbe'sche Sinussatz und würde bei der Berechnung von Mikroskopobjektiven sehr grosser Oeffnung nicht ausreichen.

Digitized by Google

aus verschieden von der neueren, alles durch die Elemente σ, h des Linsensystems ausgedrückt, so dass die zwischen diesen zu erfüllende Gleichung explicite vorliegt. Nach der abbrevierten Bezeichnung in den Astr. Nachr. Nr. 1028 ist es die Gleichung $S(2) = 0$. Der neue Ausdruck der Bedingung giebt kein Mittel an die Hand, dieselbe durch die Elemente darzustellen — umgekehrt aber ist es leicht, von meinen Gleichungen ausgehend auch das Verhältnis der Sinus zu ermitteln und zu versuchen, ob dasselbe konstant wird, wenn die Bedingung $B = 0$ nach der oben gebrauchten Bezeichnungsweise erfüllt ist. Nach meinen in dem oft zitierten Aufsatz angewendeten Bezeichnungen passiert irgend ein Strahl, der von der Mitte des Gesichtsfeldes ausgeht, in seiner ursprünglichen Lage die optische Axe in dem Punkt, dessen Abszisse ist $h_0 : \sigma_{-1}$; die der Kürze halber hier von uns so genannte Oeffnungsebene hat, vom gleichen Anfangspunkt aus gezählt, die Abszisse $h_0' : \sigma_{-1}'$. Diese Ebene wird von unserm Strahl getroffen in einem Punkt, dessen Abstand von der Axe ist $r_{-1}' = R' \cdot \frac{r_{-1}}{\sigma_{-1}'}$ (wobei R' der „reduzierte Abstand" des Durchschnittspunktes von der Axe ist); daher ist die Tangente des Winkels w_{-1}, den der Strahl ursprünglich mit der Axe bildet:[1])

$$\operatorname{tg} w_{-1} = R' \frac{r_{-1}}{\sigma_{-1}'} : \left(\frac{h_0'}{\sigma_{-1}'} - \frac{h_0}{\sigma_{-1}} \right) = R' \cdot \frac{\sigma_{-1}}{T} .$$

In ganz analoger Weise ist bei dem Strahle, welcher die seine ursprüngliche Richtung und die Axe enthaltende Ebene nicht verlässt, die Abszisse des Punktes, in welchem er nach allen Brechungen die Axe schneidet, gleich $\frac{h_*}{\sigma_*}$ (wenn der Asteriskus als Index der letzten Grösse ihrer Art gebraucht wird) ohne hinzutretendes Korrektionsglied, weil bei dieser

[1]) Eine nähere Feststellung des Sinnes, in welchem die Winkel hier positiv gezählt sind, ist unnötig, da es sich nur um die Prüfung einer Proportionalität handelt. Im übrigen verweise ich wegen der Bedeutung aller hier nicht besonders erwähnten Grössen auf die Astr. Nachr. Nr. 1027.

Digitized by Google

Betrachtung für die Strahlen des in Betracht gezogenen Lichtkegels die Kugelabweichungen als aufgehoben vorausgesetzt sind ($A = 0$). In der gleichen Finallage passiert der Strahl diejenige Ebene, deren Abszisse ist $\frac{h'_*}{\sigma'_*}$ (die das reduzierte Bild der Oeffnungsebene $*$ enthält) in einem Abstand von der Axe

$$r'_* + \Delta r'_* = (R' + \Delta R'_*) \frac{\nu_*}{\sigma'_*},$$

und es findet sich hieraus für den letzten Winkel des Strahles mit der Axe

$$\operatorname{tg} w_* = (R' + \Delta R'_*) \frac{r_*}{\sigma'_*} : \left(\frac{h'_*}{\sigma'_*} - \frac{h_*}{\sigma_*}\right) = \frac{(R' + \Delta R'_*)\sigma_*}{T},$$

weil die Grösse

$$\frac{h\sigma' - h'\sigma}{\nu} = T$$

konstant bleibt bei jedem der analogen Uebergänge, sowohl von dem vor einer bestimmten Fläche (deren Indices die h, h' tragen), liegenden zu einem hinter ihr liegenden Medium, als auch von der vorderen der beiden ein bestimmtes Medium (dessen Index die σ, σ', ν tragen) begrenzenden Fläche zur hinteren, nach einer von mir bereits in den Astr. Nachr. bewiesenen Grundrelation, welche sozusagen das Gegenstück zu dem eben dort gegebenen Satz von der Unveränderlichkeit der Grösse $\frac{r \cdot \sigma}{\nu} = R$ durch alle Medien vorstellt. Dabei enthält die Grösse $\Delta R'_*$ den Bestandteil dritter Ordnung, um welchen radiale Distanz $R' + \Delta R'_*$ sich von dem Näherungswert R' unterscheidet. Man hat nun:

$$\frac{\sin w_*}{\sin w_{-1}} = \frac{\operatorname{tg} w_*}{\operatorname{tg} w_{-1}} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 w_1}{1 + \operatorname{tg}^2 w_*}}.$$

Da hier die betreffenden Winkel kleine Grössen dritter Ordnung sind, so besteht das Verhältnis aus Gliedern 0ter, 2ter, 4ter ... Ordnung derselben. Substituiert man für die Tangenten ihre vorgegebenen Ausdrücke, so lässt sich alles nach R' ordnen, an welchem die Korrektur $\Delta R'_*$ (s. sogleich) eine Funktion dritter Ordnung ist. Man erhält:

Digitized by Google

$$\frac{\sin w_*}{\sin w_{-1}} = \frac{\sigma_*}{\sigma_{-1}} \left\{ 1 + \frac{\Delta R'_*}{R'} + \frac{R'^2}{2\,T^2} (\sigma^2_{-1} - \sigma^2_*) + \ldots \right\},$$

wobei die ausgeschriebenen Glieder die Grösse zweiter Ordnung vollständig enthalten. Soll das Verhältnis dieser Sinus konstant für den ganzen Strahlenbündel, also unabhängig von R' sein, so muss man haben (da auch $\frac{\Delta R'_*}{R'}$ zu den Gliedern zweiter Ordnung nach R' zählt):

$$\text{III.} \qquad 2\,T^2 \frac{\Delta R'_*}{R'^3} + \sigma^2_{-1} - \sigma^2_* = 0$$

und diese Gleichung ist, in den von mir eingeführten Grössen ausgedrückt, die Formulierung der Abbe-Helmholtz'schen Forderung. Sie muss sich also als identisch erweisen mit meiner alten Formulierung der Fraunhofer'schen Bedingung $B = 0$, wenn unsere Ergebnisse unter sich in Einklang stehen.

Dass dies in der That der Fall ist, ergiebt sich, wenn man für das Korrektionsglied dritter Ordnung $\Delta R'_*$ seinen Ausdruck aus meinen Entwicklungen a. a. O. nimmt. Man erhält denselben, wenn man in der Gleichung (Astr. Nachr. 1028, Zeile I—IV) die nicht accentuierten und die accentuierten Grössen R, σ, h gegenseitig vertauscht, bei welcher Vertauschung T in $-T$ übergeht, darnach $R = 0$ setzt (weil der in Betracht gezogene Lichtkegel von der Mitte des Gesichtsfeldes kommt, wodurch sich der ganze Ausdruck auf das in Zeile IV stehende Glied reduziert, und endlich über alle Flächen des Apparats die durch S angedeutete Summation erstreckt. Wenn dabei, wie a. a. O. im allgemeinen Gliede der Summe, bei h der Index der Fläche weggelassen, bei den Grössen σ und ν, wo das der Fläche vorangehende Medium kurz durch —, der des ihr nachfolgenden durch + vertreten wird, so erhält man

$$2\,T^2 \frac{\Delta R'_*}{R'^3} = S \left\{ \frac{h'}{T} \left(\frac{\sigma - \sigma}{\underset{-}{N}\,\underset{+}{}} \right)^2 \left(\begin{matrix} \nu\sigma - \nu\sigma \\ -- \quad ++ \end{matrix} \right) \right\} - S \left\{ \frac{\sigma - \sigma}{\underset{-}{N}\,\underset{+}{}} \left(\begin{matrix} \nu\sigma - \nu\sigma \\ -+ \quad +- \end{matrix} \right) \right\},$$

welcher Ausdruck in Gleichung III. zu substituieren ist. Um das Ergebnis auf die eine oder die andere der beiden Formen zurückzuführen, in welcher ich den Koeffizienten B einerseits

Digitized by Google

in Zeile II des vorhin angeführten Ausdruckes für $\Delta R'_*$, andrerseits in der entsprechenden Zeile von Gleichung VIII a. a. O. aufgestellt habe, ist noch eine Umgestaltung erforderlich, zu welcher die Gleichung 19) daselbst die Mittel enthält. Man erhält die erste der von mir für die Fraunhofer'sche Bedingung aufgestellten Formen (nach welcher Zeile II a. a. O. in der Summe über alle Flächen verschwindet), wenn man im zuletzt gegebenen Ausddruck statt $h'\left(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma}\right)$ schreibt $h\left(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma}\right)-NT$, was nach den zitierten Gleichungen dasselbe ist, und dann das zweite der so erhaltenen Glieder mit dem letzten in dem Ausdrucke von $2T^2\frac{\Delta R'_*}{R'}$ vereinigt, wovon der Effekt ist, dass nach geschehener Summation diese Glieder in Gleichung III. gegen die Glieder $\underset{-}{\sigma^2}-\underset{+}{\sigma^2}$ sich gegen einander aufheben. Dagegen gelangt man von der Form III aus zur zweiten meiner Formen für die Fraunhofer'sche Bedingung (Gleichung VIII l. c.)

$$B=\chi\cdot S(1)+T\cdot S(2)=0$$

oder, da die Gleichung $S_1=0$ für die Aufhebung der Kugelabweichung in der Mitte des Gesichtsfeldes als erfüllt hier angenommen wird, zur Bedingung $S_2=0$, wenn man in dem vorhin mitgeteilten Ausdruck für $\Delta R'_*$ die Grösse $\frac{h'}{T}$ ersetzt durch $h\cdot\frac{\chi}{T}-h\Sigma$ gemäss der letzten der Gleichungen 19) l. c. und auch hier das mit $\nu\sigma-\nu\sigma$ multiplizierte Glied vermöge der Gleichung $-\left(\underset{-+}{\nu\sigma}-\underset{-+}{\nu\sigma}\right)=\underset{--}{\nu\sigma}-\underset{++}{\nu\sigma}-N\left(\underset{-}{\sigma}-\underset{+}{\sigma}\right)$ mit dem andern verschmilzt. Hiernach kommt die linke Seite der Gleichung III nach Ausführung der Summation auf meine Form zurück, welche in den Zeichen der Astr. Nachr. Nr. 1028 Gleichung X und XI einfach so steht:

$$\frac{\chi}{T}S(1)+SU(1),$$

oder man erhält die Fraunhofer'sche Bedingung in der Form $\chi S(1)+TS(2)=0$, was zu beweisen war.

Digitized by Google

Die sachliche Uebereinstimmung zweierlei Formulierungen der Bedingung für die Aufhebung der Kugelgestalt in einem Gesichtsfeld von endlicher Ausdehnung ist also dargethan. Herr Abbe schlägt in dem zitierten Aufsatz für ein Objektiv, welches neben den gewöhnlichen Bedingungen der Aufhebung von Kugelabweichung und Farbenzerstreuung noch diese dritte erfüllt, den Namen eines aplanatischen vor, indem er dem bisher ziemlich unbestimmten Ausdruck, welcher bald weniger, bald auch, wie z. B. beim Steilheilschen „Aplanat" mehr besagen sollte, als hier mit dem Worte gemeint ist, diesen bestimmten Sinn für die Zukunft vindizieren will. Ich habe jedoch für die Bedingung $B = o$ als die „Fraunhofersche" das Recht der Namengebung als der erste, der ihren entsprechenden Ausdruck aufgestellt hat, schon vor 25 Jahren geübt, und wie ich glaube, in der angemessensten Weise zu Ehren dessen, der sie zuerst zu erfüllen verstand, würde es auch nicht für ratsam halten, aus dem Sprachschatz gerade ein Wort von bisher so schwankender Bedeutung für eine nun definitive Sache zu wählen. Ein gutes Objektiv soll übrigens (wie auch das Fraunhofersche bereits thut) ausser jenen drei Bedingungen auch mindestens noch der vierten genügen, die durch das Verhältnis der Dicken seiner Medien erfüllt werden kann, dass die verschiedenen farbigen Bilder gleich gross werden, eine Bedingung, welche zur gewöhnlichen Achromasie in ganz ähnlicher Beziehung steht, wie die Fraunhofersche zur Eulerschen wegen der Aufhebung der Kugelabweichung.[1])

Um die Gestalt derjenigen kleinen Lichtkurven kennen zu lernen, die in der Bildebene verzeichnet werden von solchen Strahlen unseres leuchtenden Punktes, welche die Oeffnungsebene an der Peripherie eines zur Axe zentrischen Kreises vom

[1]) Auch die mathematische Form jener zweiten auf die Farben bezüglichen Bedingung, die ich bereits in den Astr. Nachr. Nr. 871 gegeben habe, zeigt zu derjenigen der ersten genau dieselbe Art von Verwandtschaft, wie der Ausdruck der Fraunhofer'schen Bedingung $B = 0$ zur Euler'schen $A = 0$, wie ich an anderem Orte erweisen werde. Anmerkung vom Jahre 1881. (Ist nicht mehr geschehen. Anm. d. Hrsgb.)

Digitized by Google

Radius R' treffen, hat man in unseren Gleichungen I und II zu setzen $x = R' \cos\varphi \qquad y = R' \sin\varphi$

und R' konstant zu nehmen. Man darf jedoch nicht glauben, dass etwa diejenige Kurve solcher Art, welche dem Werte von R' des Oeffnungsrandes zugehört, in der Bildebene die äussere Umfassung des ganzen von leuchtenden Punkten erzeugten Lichtphantoms vorstellen wird, denn im allgemeinen werden die verschiedenen, R' zugehörigen solchen Kurven nicht nach der Grösse ihrer R' eine die andere ganz umschliessen, sondern vielmehr einander schneiden und die dabei entstehende umhüllende Linie (zugleich Durchschnitt der vom leuchtenden Punkt erzeugten Brennfläche mit der Bildebene und vermöge dieser Qualität hervorstechend durch ihre Helligkeit) wird zum einen Teil, die Extreme unserer Linien $R' =$ const. und zum andern jene Umfassung bilden.[1]) Mit der Substitution

$$x = R' \cos\varphi \qquad y = R' \sin\varphi$$

erhält man aus den Gleichungen I. und II.:

$$\text{IV.}\quad \xi - ER^3 - 2BRR'^2 = (AR'^2 + CR^2)R'\cos\varphi + BRR'^2\cos 2\varphi$$

$$\text{V.}\quad \ldots\ldots\ldots \quad \eta = (AR'^2 + DR^2)R'\sin\varphi + BRR'^2\sin 2\varphi.$$

Man ersieht hieraus, dass die Kurve $R' =$ const. auf folgende Art erzeugt werden kann, welche der Epicykelkonstruktion ganz nahe verwandt ist: Man denke sich eine Ellipse konstruirt, deren Mittelpunkt, in der radialen Axe der ξ ge-

[1]) Die Brennfläche selbst habe ich in den „Gelehrten Anzeigen" dieser Akademie von 1857 Nr. 30 u. 31 besprochen und ihre Gleichungen ausgedrückt durch eine Hilfsvariable, nebst Betrachtungen über ihre Beziehung zur Wellenfläche in einem Briefe an Herrn Kummer, abgedruckt in den Berliner Monatsber. v. 18. Dez. 1862, mitgeteilt. Seitdem hat danach Herr Brill ihr Modell in Gips feststellen lassen und veröffentlicht. In meiner betreffenden Publikation ist übrigens als Hauptaxe statt der optischen Axe der „ausgezeichnete Strahl" eingeführt, um welche her die Brennfläche als symmetrisch sich darstellt. Die auf dieser senkrechten Querschnitte, welche dort zunächst besprochen werden, enthalten also nicht unter sich den im Text in Frage kommenden Schnitt mit der auf der optischen Axe senkrechten Ebene des „idealen Bildes." (Sie weichen aber nur um Grössen 5. O. ab, die hier schon vernachlässigt sind. Anm. d. Hrsgb.)

Digitized by Google

legen, von dem idealen Bild des leuchtenden Punktes den reduzierten Abstand hat: $ER^3 + 2BRR'^2$, und deren erste Halbaxe (radiale) ist $a = (AR'^2 + CR^2)R'$, während die zweite (laterale) $b = (AR'^2 + DR^2)R'$. Den Mittelpunkt eines Kreises vom Radius BRR'^2 führe man auf der Peripherie der Ellipse herum, indem man zugleich die Peripherie des Kreises selbst von einem Punkt P so umlaufen lässt, dass in dem Moment, wo die Koordinaten des Kreismittelpunktes, vom festen Mittelpunkt der Ellipse aus gezählt, $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ sind, der nach P gezogene Radius des Kreises mit der Richtung der Axe a den Winkel 2φ einschliesst. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt P unsere Kurve. Man kann hienach auch eine ziemlich einfache geometrische Konstruktion für beliebig viele Punkte unserer Linie aufstellen, welche mit bekannten Epicykloiden und Konchoiden eine Analogie darbietet.

Die für unsere Anwendung wichtigsten Fälle sind besonderer Besprechung würdig.

1. Wenn man annimmt, dass A nicht gleich Null ist, d. h. dass die Kugelabweichung nicht gehoben ist, und zugleich, dass die durch R' gemessene Grösse der Oeffnung überwiegend ist gegen die durch R gemessene Grösse des Gesichtsfeldes, so zwar, dass die Glieder mit B, C, D ausser acht gelassen werden können gegen diejenigen mit A, so wird unsere Kurve zum Kreis (in welchem die Ellipse der allgemeinen Figur übergeht, während der Epicykel verschwindet) und die zu den verschiedenen R' gehörigen Kreise erscheinen als konzentrisch; man erhält also in diesem Fall die Sterne in der Ebene des idealen Bildes dargestellt als kleine kreisrunde Scheiben, deren Dimensionen unabhängig sind von R, also von den scheinbaren Abständen der verschiedenen Sterne von der Mitte des Gesichtsfeldes. Infolge der Proportionalität der Radien dieser Scheiben mit R'^3 sind dieselben übrigens nicht gleichmässig erleuchtet, sondern das Licht ist in der Mitte am stärksten konzentriert und nimmt nach aussen ab, weshalb für das Auge die Dimensionen der Phantome schwacher Sterne von der Helligkeit abhängig erscheinen werden.

Digitized by Google

2. Nimmt man an, dass die Euler'sche Bedingung $A = o$ für die Aufhebung der Kugelabweichung erfüllt ist, nicht aber auch die Fraunhofer'sche Bedingung $B = o$, und hält man über die extremen Grössen von R und R' die vorigen Voraussetzungen fest, vermöge deren diesmal die Glieder in B allein in betracht gezogen werden, so wird aus I. und II.

$$\text{VI.} \quad \xi - 2\,B\,R\,R'^2 = B\,R\,R'^2 \cos 2\,\varphi$$

$$\text{VII.} \quad \ldots\ldots \quad \eta = B\,R\,R'^2 \sin 2\,\varphi,$$

woraus sich ergibt, dass in der Bildebene die Erleuchtungskurve derjenigen Strahlen, welche in der Oeffnungsebene auf der Peripherie des Kreises $R' = \text{const.}$ aufgefallen sind, ein kleiner Kreis ist vom Radius $B\,R\,R'^2$, welcher zweimal durchlaufen wird, während der Auffallpunkt in der Oeffnungsebene die Peripherie des Kreises einmal durchläuft. Die zu verschiedenen R', d. h. zu konzentrischen Kreisen als Auffallörtern in der Oeffnungsebene gehörigen Erleuchtungskreise sind aber nicht konzentrisch, sondern ihre Mittelpunkte haben von dem festen Anfangspunkt der ξ, nämlich dem idealen Bild des leuchtenden Punktes, Abstände, welche dem Quadrat von R' proportional und für jeden einzelnen unserer Kreise gleich seinem Durchmesser $2\,B\,R\,R'$ sind. Daraus geht hervor, dass alle diese Kreise zu gemeinsamen Berührenden, als zu Umhüllenden, zwei gerade Linien haben, welche durch den Anfangspunkt der ζ gehen und mit der Axe der letzteren nach der einen und der andern Seite Winkel von je 30^0 ($= \arcsin \frac{1}{2}$), miteinander also einen Winkel von 60^0 einschliessen. Das ganze, von dem leuchtenden Punkt in der Bildebene erhellte Lichtphantom erhält daher seine Begrenzung auf zwei Seiten durch diese beiden unter 60^0 zusammenlaufenden Geraden und auf der dritten durch ein Stück der Peripherie des letzten oder zum grössten Wert von R' gehörigen unter unseren vorher beschriebenen Kreisen, nämlich durch diejenigen $\frac{2}{3}$ seiner Peripherie, welche auf der vom Konvergenzpunkt der beiden Geraden abgewendeten Seite vom Berührungspunkt mit der einen Geraden bis zu demjenigen mit der andern sich erstrecken. Die beiden Geraden selbst sind nach der einen Seite nicht über

Digitized by Google

diese Berührungspunkte mit dem ersten Kreis, nach der andern nicht über ihren Konvergenzpunkt hinaus zu verlängern. In der Nähe der beiden umhüllenden Geraden, welche Durchschnitte der Bildebene mit der Brennfläche sind, und ganz besonders in der Gegend ihres Durchschnitts erscheint die Lichtintensität der auf dieser Seite spitzen und der entgegengesetzten abgerundeten Lichtfigur am grössten.[1]) Auch derjenige Teil des letzten unserer Kreise, welcher nicht zur Begrenzung der Figur kontribuirt, sondern ins Innere derselben fällt, muss aus leicht zu erkennenden Gründen Ort einer diskontinuirlichen Abschwächung der Helligkeit in der Figur sein: Je nach dem Vorzeichen, welches die Grösse B vermöge der Anordnung des Apparats hat, werden die Spitzen der durch sie erzeugten Lichtphantome entweder der Mitte des Gesichtsfeldes oder dem Rande zugekehrt sein. Dabei ist es interessant, dass derjenige Strahl, welcher von einem ausser der optischen Axe gelegenen leuchtenden Punkt in der Mitte der Oeffnungsebene $K = o$ auffällt, nicht etwa an irgend eine Stelle im Innern der Lichtfigur gelangt, sondern ganz extrem an ihre Spitze. Eine Verdeckung des mittleren Teils des Apparats durch eine kleine kreisrunde Scheibe würde das Lichtphantom der Spitze und der ihr anliegenden hellsten Partieen berauben und auf dieser Seite eine ähnliche, nach aussen konvexe Abrundung der Figur durch einen an beiden Geraden berührenden Kreis bedingen, wie die entgegengesetzte Begrenzung sie darbietet. In diesen Gleichungen VI. und VII. werden, wie man leicht erkennt, ξ und η zu Koordinaten des Berührungspunktes des kleinen Lichtkreises in den beiden um-

[1]) Für die Gestalt der Brennfläche selbst bildet der hier in Rede stehende Fall, wo $A = 0$ ist, den Ausnahmefall, auf dessen Vorhandensein ich in dem Aufsatz der „Gelehrten Anzeigen" Nr. 18 hingedeutet habe, ohne ihn dort näher zu besprechen. (Der Herausgeber hat in der auf der Anmerkung S. 396 citierten Arbeit diesen Ausnahmefall vollständig diskutiert; vgl. § 3 S. 29 (545), ferner S. 46 (562), S. 52 (568), S. 58 (574). Der Unterschied der Figuren gegenüber der Seidel'schen Beschreibung des Lichtphantoms rührt davon her, dass Seidel die Grössen C, D, E vernachlässigt, der Herausgeber dagegen nicht.)

Digitized by Google

hüllenden Geraden dann, wenn $2\varphi = \pm 120^0$, also $\varphi = \pm 60^0$ ist, und zwar gleichzeitig für alle Werte von R'. Befindet sich daher der leuchtende Punkt gerade über oder auch gerade unter der optischen Axe, so werden diejenigen Stellen der Oeffnungsfläche, an welchen die schliesslich durch unsere Geraden passirenden Strahlen auffallen, Positionswinkel von 60^0 resp. 120^0 nach der einen oder andern Seite gegen die Vertikale haben und man würde von dem Lichtphantom seine beiden Durchschnitte mit der Brennfläche weglöschen, wenn man vor der Oeffnungsfläche zwei sich zentrisch kreuzende, undurchsichtige, schmale Streifen so anbringen würde, dass ihre Enden nach vier Spitzen eines auf der Fläche beschriebenen regulären Sechsecks laufen würden, dessen zwei übrige Spitzen in dem vertikalen Durchmesser der Oeffnungsfläche gelegen wären. Im übrigen sind die von den verschiedenen leuchtenden Punkten herrührenden Lichtphantome alle einander ähnlich und ihre Dimensionen sind proportional dem Abstand R des leuchtenden Punktes von der Mitte des Gesichtsfeldes.

3. Wenn neben der Euler'schen Bedingung auch die Fraunhofer'sche Bedingung $B = o$ erfüllt ist, so erhält man unter Beibehaltung aller übrigen Glieder dritter Ordnung aus IV und V:

$$\xi - E R^3 = C R^2 R' \cos\varphi$$
$$\eta = D R^2 R' \sin\varphi.$$

Die Strahlen, welche in der Oeffnungsebene auf die Peripherie des Kreises $R' = \text{const.}$ auffallen, bezeichnen also in der Bildebene eine kleine Ellipse von den Halbaxen $C R^2 R'$ und $D R^2 R'$ (in den gewöhnlichen Fällen, wo beträchtliche Dicken der Medien nicht in Betracht kommen, ist die erste oder radiale Axe die grössere), da die verschiedenen von leuchtenden Punkten erzeugten Ellipsen konzentrisch, ähnlich und ähnlich liegend, und ihre Flächeninhalte auch denjenigen der zugehörigen Kreise in der Oeffnungsebene gleich sind. So bildet die zum grössten R' gehörige unter ihnen den Umriss des grossen Lichtphantoms und das Innere desselben ist durchaus gleichmässig erleuchtet, ohne dass Brennlinien entstehen:

Digitized by Google

Der im Mittelpunkt der Oeffnungsfläche auffallende Strahl $R' = o$ gelangt dabei in den Mittelpunkt der Ellipse. Auch alle von verschiedenen leuchtenden Punkten herrührenden Lichtphantome sind einander ähnlich, jedoch wachsen die Dimensionen der sie einschliessenden Ellipsen bei wachsendem Abstand R des leuchtenden Punkts von der Axe und zwar proportional dem Quadrat desselben, wodurch bedingt wird, dass sie in nächster Umgebung der Mitte des Gesichtsfeldes noch sehr klein bleiben, weiter aussen aber sehr rasch zunehmen. Der Umstand, dass in diesem Fall keine Brennfigur zustande kommt und die Mitte des Lichtphantoms von den in der Mitte des Gesichtsfeldes auffallenden Strahlen eingenommen wird, begründet an sich sehr wesentliche Vorzüge der Fraunhofer'schen Konstruktion, besonders für Messinstrumente. Ich habe an anderem Ort erläutert, dass, wenn man die Untersuchung der Lage der Strahlen auch auf Ebenen ausdehnt, welche unserer Bildebene nur benachbart sind, sich ergibt, dass die im allgemeinen Fall entstehende Brennfläche, welche zwei Schalen und an denselben zwei Schneiden zeigt, für das Fraunhofer'sche Objektiv sich reduziert auf zwei kurze, nicht in einer Ebene gelegene, aber auf einander senkrecht gerichtete gerade Linien, die letzten Reste der im andern Falle existierenden Schneiden der Fläche. Vermöge des verschiedenen Abstandes, welchen beide von der Ebene unseres idealen Bildes haben, kommt die Erscheinung, welche man jetzt „Astigmatismus" nennt, möglichst scharf in der Art zu stande, dass es zwei verschiedene Einstellungen für ein Okular gibt, bei deren einer der exzentrisch im Gesichtsfeld befindliche leuchtende Punkt als kurzer radialer, und bei deren andrer er als kurzer lateraler Strich gesehen wird. Dass ein Apparat, der die nächste Stufe der Verbesserung über die Euler'sche Gleichung $A = o$ hinaus erreicht hat, diese Erscheinung darbieten wird, hat bereits Anfang der sechziger Jahre Petzval in der damals erschienenen ersten Ankündigung seiner dioptrischen Untersuchungen ausgesprochen.

Digitized by Google

Oeffentliche Sitzung

zur Feier des 139. Stiftungstages

am 15. März 1898.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige öffentliche Festsitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften im Monate März ist jährlich zur Feier ihrer Stiftung angeordnet und dient zur Verkündung von Thatsachen, welche mit dem Stiftungszwecke zusammenhängen.

Zunächst erwähne ich, dass ein ausländischer, ein griechischer Gelehrter sein ganzes beträchtliches Vermögen unserer Akademie testamentarisch vermacht hat mit der Bedingung, wissenschaftliche Arbeiten bayrischer und griechischer Gelehrter über Geschichte, Sprache, Literatur oder Kunst der Griechen von den ältesten Zeiten bis zur Eroberung Konstantinopels durch die Türken zu fördern und auszuzeichnen.

Die Schenkung führt den Namen Thereianós-Fond und beträgt rund 260,000 Mark.

Dionysios Thereianós, am 28. August 1834 auf der liebreizenden Insel Zante geboren, besuchte als Knabe das Gymnasium in Korfú. Zum Jüngling herangewachsen siedelte er mit seinem Vater nach Triest über, wo er seit dieser Zeit ständig gelebt hat. Nachdem er eine Zeit lang als Beamter einer Versicherungsgesellschaft gearbeitet hatte, trat er im Jahre 1855 in die Redaktion der damals in Triest erscheinenden griechischen Zeitung Iméra ein. Sechs Jahre später gründete er die Zeitung Klió, die er bald zum vornehmsten Organ der griechischen Presse erhob. — Im Jahre 1883 liess er die Klió eingehen, um mehr Zeit für seine gelehrten Stu-

Digitized by Google

dien zu gewinnen. Doch hatte er auch später noch Gelegenheit, seine grosse journalistische Begabung zu bethätigen; er war bis zu seinem Tode der treueste Mitarbeiter einer neu gegründeten griechischen Zeitschrift, der Néa Iméra.

Obschon Thereianós nie eine Universität besuchte, ist er auf dem Gebiete der Wissenschaft nicht minder thätig gewesen, als auf dem Felde der Journalistik. Von früher Jugend an benützte er die kärgliche Musse, die ihm seine Berufsthätigkeit gewährte, zur Erlernung der wichtigsten modernen Sprachen und zu gründlichen Studien auf dem Gebiete der altgriechischen, byzantinischen und neugriechischen Philologie. Die erste wissenschaftliche Schrift, mit welcher Thereianós an die Oeffentlichkeit trat, war eine Untersuchung über die homerische Frage (1866). Zu grösseren Arbeiten fand er erst Zeit als er von den Redaktionsgeschäften befreit war.

Nun aber folgten rasch mehrere Werke aufeinander. Im Jahre 1885 veröffentlichte er eine Sammlung verschiedener Abhandlungen unter dem Titel „Philologische Skizzen". Vier Jahre später erschien die dreibändige Biographie des Begründers der neugriechischen Literatur, Adamantios Korais, ein Werk, das ebenso durch umfassende Kenntnisse als auch durch scharfes Urtheil ausgezeichnet ist. Im Jahre 1892 veröffentlichte Thereianós einen „Abriss der stoischen Philosophie", ein Buch, das in der Fachliteratur nicht minder als die Biographie des Korais anerkannt wurde, welches Buch ihm auch eine äussere Ehrung brachte. Die griechische Regierung forderte den Verfasser auf, den Lehrstuhl für Geschichte der Philosophie an der Universität Athen zu übernehmen; doch hat Thereianós den Ruf abgelehnt. In den letzten Jahren seines Lebens sammelte er Material für zwei Werke, die er leider nicht vollenden konnte, für eine Darstellung der Person und Thätigkeit des Demosthenes und für eine Untersuchung über das Wesen des Bilderstreites.

Ausserdem hat Thereianós zahllose kleinere Arbeiten in den Zeitungen Klió und Néa Iméra veröffentlicht. Durch diese bescheidenen Zeitungsartikel, in welchen er über die bedeu-

Digitized by Google

tendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der griechischen Philologie Bericht erstattete, hat er eine unberechenbare, fruchtbringende Wirkung auf die Bildung seines Volkes ausgeübt. Seine letztere grössere Publikation war eine sehr eingehende, durch gründliche Sachkenntniss ausgezeichnete Besprechung der zweiten Auflage der Geschichte der byzantinischen Literatur K. Krumbacher's, unseres hochverdienten Kollegen.

Nach kurzer Krankheit starb der unermüdliche edle Mann am 15. März 1897 — also gerade heute vor einem Jahre, ein herrliches Zeugniss seiner idealen Gesinnung und seiner tiefen Einsicht in seinem Testamente niederlegend, das einen würdigen Abschluss dieses der Wahrheit und Wissenschaft gewidmeten Lebens bildet. Der Thereinós-Fond ist für den Dahingeschiedenen ein unvergängliches Denkmal, ein Monumentum aere perennius.

Aus dem seit 1877 bestehenden Zographos-Fond hat die k. Akademie auf Anregung der philosophisch-philologischen Klasse im Jahre 1895 einen Preis von 1500 Mark für „Neue textkritische Ausgabe der Werke des Historikers Prokop mit Einschluss der Geheimgeschichte auf Grund der besten Handschriften" ausgesetzt. Eine Bearbeitung mit dem Motto „Die Nachwelt hat sich Glück zu wünschen etc." ist rechtzeitig eingelaufen. Der Verfasser Dr. Jakob Haury, Gymnasiallehrer am k. Wilhelmsgymnasium in München, erhielt den Preis.

Als neue Preisaufgabe mit dem Einlieferungstermin 31. Dezember 1900 mit einem Preis von 1500 Mark ist gestellt: „Abfassung eines Lexikons der byzantinischen Familiennamen mit einer Untersuchung der historischen Entwicklung ihrer Form und Bedeutung".

Aus den Zinsen der Münchener Bürger-Stiftung und der Cramer-Klett-Stiftung werden in diesem Jahre zwei wichtige Forschungen, von der mathematisch-physikalischen Klasse beantragt, unterstützt werden. Herr Dr. Ernst Weinschenk, Privatdozent an der Universität, hat in den letzten Jahren ausgedehnte Untersuchungen über Gesteine und Lagerstätten

Digitized by Google

nutzbarer Mineralien in Bayern ausgeführt: er wird nun unter Konservator Groth's Leitung dieselben in benachbarten Gebieten, im Taunus, in der Monterosagruppe, in den piemontesischen Alpen und in der Montblancgruppe fortsetzen und Vergleichsmaterial sammeln, was unserer geologischen und mineralogischen Sammlung zugute kommen wird.

Die Konservatoren von Kupffer und Hertwig beantragten im Interesse der anatomischen Anstalt und des zoologischen Instituts, embryologische und systematische Forschungen über bestimmte Meerthiere durchzuführen, behufs welcher Herr Dr. Franz Doflein, Assistent des zoologischen Instituts, sich nach den Antillen, nach Mexiko und Kalifornien begeben wird, um das nöthige Untersuchungsmaterial aufzusammeln und hieher zu bringen.

Konservator Göbel beabsichtigt im Interesse des botanischen Instituts höchst werthvolles Material aus Java und Australien zu gewinnen und konnte ihm hiefür ein Beitrag aus Renten der Akademie in Aussicht gestellt werden.

Das mit der Akademie der Wissenschaften verbundene Generalkonservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates hat auch im abgelaufenen Jahre wieder werthvolle Geschenke von Privaten erhalten. Ich habe bereits in meiner Ansprache gelegentlich der Festsitzung am 15. November 1897 zu Ehren unseres allverehrten Protektors Sr. Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser, hervorgehoben, wie wichtig es sei, dass unsere mathematisch-physikalische Sammlung auch ein historisches Museum werde, um ein vollständiges und getreues Bild der physikalischen Forschungen bayrischer Gelehrter und der Thätigkeit bayrischer Werkstätten für wissenschaftliche Instrumente zu liefern. Die Idee dazu ging von Herrn Dr. Ernst Voit, Professor der angewandten Physik an der hiesigen Technischen Hochschule, aus und es gelang, zunächst Herrn Rentier Sigmund Ritter von Merz anzuregen, das weltberühmte Original-Spektrometer von Fraunhofer, sowie Manuskripte von Fraunhofer's Abhandlungen und eine Kollektion Fraunhofer-Glasprismen

Digitized by Google

grossmüthig zu schenken. Dieses Spektroskop ist das Instrument, welches jüngst auch Gegenstand eines im hiesigen Kunstverein viel bewunderten grossen Oelgemäldes von Herrn Professor Rudolf Wimmer war, auf welchem dargestellt ist, wie der junge Fraunhofer seine Erfindung Utzschneider und Reichenbach demonstrirt, welche beide wirklich spornstreichs von München nach Benediktbeuren geritten waren, um in der dortigen optischen Anstalt das merkwürdige Instrument zu besichtigen, mit dem es gelang, das Licht in seine einzelnen Theile zu zerlegen.

Dem Beispiele des Herrn von Merz, der bekanntlich ein Nachfolger Fraunhofer's in der optischen Anstalt geworden, folgte nun auch ein Urenkel des geheimen Rathes von Utzschneider, Herr Adalbert Knorr, Hauptmann a. D. und Rechnungsrath im k. Kriegsministerium dahier. Utzschneider war ja bekanntlich der erfolgreiche Protektor und Mitarbeiter von Fraunhofer und Reichenbach und ihm hat die bayrische Industrie überhaupt in mehreren Richtungen einen wesentlichen Aufschwung zu danken. Herr Hauptmann Knorr schenkte aus dem Nachlass seines Urgrossvaters für die historische Abtheilung der mathematisch-physikalischen Sammlung ein Mikroskop von Fraunhofer, eine Camera lucida, zwei Handfernrohre und einen grösseren Tubus von Fraunhofer, ferner eine Medaille, Utzschneider zu Ehren geprägt, sowie Porträte von Utzschneider und Schiegg und schriftliche Aufzeichnungen mit höchst werthvollen Mittheilungen über Glasfabrikation und Berechnung von Objektiven.

Frau Stadtbaurath Preisser in Landshut, eine Tochter des rühmlich bekannten Mechanikers Liebherr, schenkte aus dem Nachlass ihres Vaters eine Mappe mit Zeichnungen von Instrumenten von J. Liebherr, Mahler und Fraunhofer aus den Utzschneider-Fraunhofer'schen und Utzschneider-Reichenbach'schen Instituten, sowie das Porträt von B. Liebherr.

Für das k. Münzkabinet schenkten die Herren Kommerzienrath Anton Seidl, Architekt, und Professor Emanuel Seidl und Architekt und Professor Gabriel Seidl eine schöne Kollektion

Digitized by Google

von altrömischen Schwermünzen (aes grave), wodurch diese Abtheilung des Münzkabinets mit dem bereits darin Vorhandenen zu einer hervorragend interessanten geworden ist.

Für die anthropologisch-prähistorische Sammlung schenkte unser Mitglied Professor Emil Selenka seine grosse Sammlung von Schädeln von sogenannten Menschenaffen, 220 Schädel von Orangutans und 65 Schädel des Gibbon.

Für das pflanzenphysiologische Institut, beziehungsweise für das Kryptogamen-Herbarium, schenkte Herr Dr. Melchior Treub, Direktor der vereinigten kolländischen wissenschaftlichen botanischen Anstalten in Buitenzorg auf Java, eine sehr werthvolle Sammlung von mehr als 500 Exemplaren javanischer Farne.

Das Wachsthum unserer Staatssammlungen zu sehen ist sehr erfreulich und wir hoffen auf deren stetiges Fortschreiten, welches auch von unserer Staatsregierung möglichst unterstützt wird. Für die historische Abtheilung der mathematisch-physikalischen Sammlung hoffen wir bald auch die berühmte Kreistheilmaschine von Reichenbach zu erhalten, für deren Erwerbung das k. Staatsministerium für Kirchen- und Schulangelegenheiten an den zur Zeit tagenden bayrischen Landtag ein Nachtragspostulat eingebracht hat.

Die verschiedenen Attribute des Generalkonservatoriums sind zur Zeit in dem sogenannten Wilhelminischen Gebäude nothdürftig untergebracht. Das Bedürfniss nach weiteren Räumen macht sich von Jahr zu Jahr fühlbarer. Insbesondere bedarf die zoologische Sammlung dringend weiterer Räume, wenn ein altes Desiderat, die Aufstellung einer bayrischen Landesfauna und einer zoologischen Lehrsammlung verwirklicht werden soll.

Schon vor zwei Jahren hatte das Generalkonservatorium bei dem vorgesetzten k. Staatsministerium angeregt, es möchten zu diesem Zwecke der zoologischen Sammlung die an diese Sammlung anstossenden, dermalen von der mathematisch-physikalischen Sammlung eingenommenen Räume überwiesen und für letztere Sammlung anderweitiger Ersatz geschaffen werden.

Digitized by Google

Als im vorigen Jahre das neue Justizgebäude bezogen und dadurch ein grösserer Theil der bisher von der Justizverwaltung benützten Räume in dem an der Maxburgstrasse gelegenen Flügel des Wilhelminischen Gebäudes frei wurde, sah sich das k. Generalkonservatorium veranlasst, auf diese Frage zurückzukommen.

Darauf ging uns mit Ministerialentschliessung vom 16. Juli 1897 die erfreuliche Mittheilung zu, dass die bisherigen Räume des Oberlandesgerichts München im zweiten Stocke des Wilhelminischen Gebäudes an der Maxburgstrasse nach Uebereinkommen der betheiligten k. Staatsministerien dem Kultusministerium für Zwecke der Staatssammlungen unter gewissen Modalitäten überlassen seien.

Damit war ein erster Schritt zur Verbesserung der damaligen unzulänglichen Raumverhältnisse geschehen. Wir verdanken dieses dem lebhaften Interesse, welches der Chef der bayerischen Unterrichtsverwaltung, Seine Excellenz der Herr Staatsminister Dr. von Landmann unserer Angelegenheit entgegenbringt und ich erfülle nur eine angenehme Pflicht, wenn ich heute diesem unserem Danke auch öffentlichen Ausdruck gebe.

Freilich sind noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt. Die Ueberlassung der bezeichneten Räume für Zwecke der Staatssammlungen erfolgte nicht endgiltig, sondern mit dem Vorbehalte, dass sie an die Justizverwaltung zurückgegeben werden sollen, wenn diese sie wieder für ihre eigenen Zwecke benöthiget. Und wenn es anfänglich schien und wir uns gerne der Hoffnung hingaben, dass wir wenigstens für absehbare Zeit dort Unterkommen finden würden, so ist dies neuerdings wieder zweifelhaft geworden; denn es verlautet, dass die Justizverwaltung möglicher Weise sehr bald und früher, als sie selbst annahm, in die Lage kommen werde, die fraglichen Räume wieder für ihre eigenen Bedürfnisse in Anspruch nehmen zu müssen.

Aber auch wenn dies sich so verhalten sollte, möchten wir unsere Hoffnung auf Besserung der Verhältnisse nicht sinken

Digitized by Google

lassen. Wir vertrauen auf die bewährte Einsicht der k. Staatsregierung und die übrigen betheiligten Faktoren, dass Mittel und Wege gefunden werden, den Bedürfnissen unserer Sammlungen gerecht zu werden.

Das Einfachste wäre, wenn das ganze Wilhelminische Gebäude den im Generalkonservatorium vertretenen Staatssammlungen eingeräumt, und wenn das nicht möglich ist, wenn dann ein den Zwecken des Generalkonservatoriums entsprechender Neubau aufgeführt würde. Aber dass das eine oder das andere geschieht, ist eine Lebensfrage der wissenschaftlichen Staatssammlungen.

An dem heutigen akademischen Festtage ist es auch üblich, der im Laufe des Jahres verstorbenen Mitglieder zu gedenken, worüber die Herren Classensekretäre vortragen werden. Die historische Classe verlor ein Mitglied, welches auch mit dem Präsidium und dem Generalkonservatorium in innigster Beziehung stand. Professor Dr. Max Lossen war auch Sekretär der Akademie. Ich will dem Berichte des Herrn Classensekretärs über den Historiker Lossen nicht vorgreifen, aber fühle mich verpflichtet, meinerseits hervorzuheben, dass der Verstorbene nicht bloss ein gründlicher Gelehrter, sondern zugleich auch ein vorzüglicher Beamter und Geschäftsmann war, der die zahlreichen, vielseitigen Beziehungen des Sekretariats trefflich geordnet und musterhaft gestaltet hat.

Darauf theilte der Classensekretär, Herr C. v. Voit, die Verluste mit, welche die mathematisch-physikalische Classe in dem vergangenen Jahre erlitten hat; es sind ihr durch den Tod elf Mitglieder entrissen worden, nämlich: zwei einheimische ordentliche Mitglieder, Ludwig Andreas Buchner und Leonhard Sohncke; ferner neun auswärtige und correspondirende Mitglieder: der Mathematiker Francesco Brioschi in Mailand, die Chemiker Karl Remigius Fresenius in Wiesbaden und

Digitized by Google

Victor Meyer in Heidelberg, der Physiologe Rudolf Heidenhain in Breslau, die Zoologen Rudolf Leuckart in Leipzig und Johann Japetus Steenstrup in Kopenhagen, der Botaniker Julius v. Sachs in Würzburg, der Paläontologe Edward Cope in Philadelphia und der Mineraloge Alfred Ludwig Prosper Descloizeaux in Paris.

Ludwig Andreas Buchner.

Am 23. Oktober 1897 ist das älteste Mitglied unserer Classe, zugleich der Senior der Gesammtakademie, Ludwig Andreas Buchner, im hohen Alter von 84 Jahren aus dem Leben geschieden. Er gehörte seit dem Jahre 1846 der Akademie an und er hat seitdem wohl bei keiner ihrer Sitzungen gefehlt. Man war so sehr gewohnt, den rüstigen liebenswürdigen Greis, der uns an eine längst vergangene Zeit der Akademie, in welcher noch Fuchs, Martius, Steinheil thätig waren, erinnerte, stets an der gleichen Stelle, aufmerksam den Verhandlungen folgend, zu sehen, dass wir ihn schmerzlichst in unserem Kreise vermissen.

Buchner hat zahlreiche Untersuchungen auf dem Gebiete der Chemie und Pharmazie gemacht; seine Arbeiten haben der Wissenschaft zwar keine neuen Bahnen gewiesen, aber es finden sich darin viele gute Beobachtungen und werthvolle Thatsachen, welche das Wissen förderten.

Der Lebensgang Ludwig Andreas Buchner's war ganz wesentlich bestimmt durch das Vorbild seines Vaters Johann Andreas Buchner, des verdienten, ebenfalls unserer Akademie angehörigen Pharmazeuten; ihm hat der Sohn bei der 16. Generalversammlung des Deutschen Apothekervereins zu München am 31. August 1887 zur Erinnerung an seinen 104. Geburtstag pietätvolle Worte gewidmet.

Der Vater Buchner, der Sohn einfacher Gärtnersleute dahier, hatte seine Ausbildung besonders in dem pharmazeutischen Institute des ausgezeichneten Chemikers und Pharmakologen Johann Bartholomäus Tromsdorff in Erfurt erhalten,

Digitized by Google

war dann Oberapotheker der Centralapotheke des allgemeinen Krankenhauses dahier geworden, wo der strebsame Mann trotz seiner vielfachen Amtsgeschäfte — er musste bei den täglichen Krankenbesuchen der Aerzte zur Aufnahme der Ordination anwesend sein — die Zeit zu wissenschaftlichen Untersuchungen erübrigte. Er hatte sich dadurch, sowie durch die Gründung des angesehenen Repertoriums für die Pharmazie, welches er während 36 Jahren redigirte und das geradezu die Geschichte der Pharmazie während dieses Zeitraums enthält, so tüchtig erwiesen, dass man ihn nach dem Tode des Professors der Arzneimittellehre Bertele an der Universität Landshut zum ausserordentlichen Professor der Pharmazie in der dortigen medizinischen Fakultät erwählte. In Folge eines Rufes nach Freiburg im Breisgau wurde er bald ordentlicher Professor der Pharmazie, nachdem ihn vorher die medizinische Fakultät der neu gegründeten Universität zu Bonn bei der Feier ihrer ersten Doktorpromotion zum Doktor der Medizin ernannt hatte. Mit der Uebersiedlung der Universität von Landshut nach München kam er hierher, musste sich aber noch längere Zeit kümmerlich behelfen, bis ihm endlich ein für damals genügendes Laboratorium eingeräumt wurde.

Von seinen wissenschaftlichen Arbeiten sind mehrere von Bedeutung geworden. Bei der Untersuchung des Bergöls von Tegernsee, des sogenannten St. Quirinöls, beschrieb er einen darin gelösten, in der Kälte sich in festem Zustande abscheidenden Stoff als Bergfett, welcher Kohlenwasserstoff sich als identisch mit dem später von Reichenbach aus dem Theer gewonnenen, jetzt allbekannten und viel verwendeten Paraffin erwies. Er hatte ferner aus dem Extrakte der Weidenrinde einen in nadelförmigen Krystallen sich ausscheidenden, intensiv bitteren Stoff erhalten, den er Salicin nannte; dieses Salicin ist später von dem italienischen Chemiker Piria in seine zwei Componenten, in Zucker und in Saligenin, zerlegt und so als erstes Glied der interessanten Gruppe der Glucoside erkannt worden; dem Salicin entstammt die für die theoretische Chemie und durch die praktische Anwendung so wichtig gewordene

Digitized by Google

Salicylsäure. Auch die Entdeckung des Berberins, eines in gelben seidenglänzenden Nadeln krystallisirenden Bitterstoffs, einer stickstoffhaltigen Pflanzenbase, in der Wurzelrinde und in dem Holze von Berberis vulgaris oder des Sauerdorns hat seinen Namen bekannt gemacht.

Buchner hat durch diese seine Thätigkeit die wissenschaftliche Entwicklung der Pharmazie sehr gefördert, so dass Pettenkofer an seinem Grabe, in Zusammenfassung seines Wirkens, aussprechen konnte: er habe die Idee verfolgt, das Apothekergewerbe durch strenge Wissenschaftlichkeit in seinen Grundlagen zu adeln. Diesem vortrefflichen, bescheiden nur für die Wissenschaft lebenden, für seine Schüler liebevoll besorgten Vater eiferte der Sohn nach; er ward sein bester Schüler, lernte von ihm den emsigen Fleiss und die Liebe zur Wissenschaft, so dass er die von ihm hinterlassene Erbschaft an der Universität mit vollem Fug und Recht anzutreten vermochte.

Ludwig Andreas Buchner wurde am 13. Juli 1813 in München geboren. In Landshut begann er die Gymnasialstudien und setzte sie in München fort, aber nur bis zur zweiten Gymnasialklasse, um sich dann der praktischen Pharmazie zu widmen; der Entschluss zur wissenschaftlichen und akademischen Laufbahn erwuchs erst später aus den Erfolgen seiner Studien. Er machte zunächst eine dreijährige Lehrzeit bei dem trefflichen Apotheker Bachmann in der Mohren-Apotheke in Nürnberg durch, verblieb daselbst noch ein halbes Jahr als Gehilfe und trat dann für $1^1/_2$ Jahre in die Oberlin'sche Apotheke in Strassburg im Elsass ein, woselbst er seine erste wissenschaftliche Arbeit: „Versuche über das Verhalten chemischer Stoffe zu Reagentien bei verschiedenen Graden von Verdünnung, sowie über die Grenzen der Wahrnehmbarkeit chemischer Reaktionen“ zur Lösung einer von dem Verein studirender Pharmazeuten in München gegebenen Preisaufgabe ausführte, welche Arbeit mit dem ersten Preise belohnt wurde. Von Strassburg aus wanderte er nach Paris, um in der höheren pharmazeutischen Schule, an welcher damals als Direktor

Digitized by Google

Robiquet und als Professor der Chemie Bussy angestellt war, seine Kenntnisse zu erweitern; der Letztere verwendete ihn, seine Tüchtigkeit erkennend, bald als Privatassistent bei seinen organisch-chemischen Untersuchungen. Dabei versäumte er jedoch nicht, die Vorlesungen der beiden berühmten Chemiker, von Gay-Lussac, dem Lehrer Liebig's, und von Chevreul, dem Entdecker der Constitution der Fette, zu hören; öfter erzählte er später über die durch sie erhaltenen Eindrücke.

Nach der Rückkehr in die Heimath schrieb er sich als Candidat der Pharmazie an der Universität ein, um die pharmazeutische Approbationsprüfung zu machen; schon nach zwei Semestern erhielt er, seiner vorzüglichen und längeren Ausbildung halber, unter Dispens von den übrigen beiden Semestern die Zulassung zu der Prüfung, welche er mit der Note der ausgezeichneten Befähigung bestand. Er wurde hierauf Assistent am pharmazeutischen Institut der Universität bei seinem Vater. Aber der strebsame Jüngling hatte mittlerweile höhere Ziele ins Auge gefasst; er benützte jede freie Zeit zur Vorbereitung auf die Maturitätsprüfung, der er sich nach zwei Jahren mit Erfolg unterzog. Jetzt erst konnte er sich als Candidat der Philosophie an der Universität immatrikuliren und mit der Dissertation: „Betrachtungen über die isomerischen Körper sowie über die Ursachen der Isomerie" den Grad eines Doktors der Philosophie erlangen. Da dazumal die Pharmazie noch ein Fach der medizinischen Fakultät war, so setzte er das inzwischen schon begonnene Studium der Medizin fort und wurde nach Vollendung desselben zum Doktor der gesammten Medizin promovirt, wozu er eine Dissertation: „Neue chemische Untersuchung der Angelikawurzel" vorgelegt hatte, welche Wurzel unter dem Namen „Engelwurz" als beliebtes Hausmittel in Gebirgsgegenden gebräuchlich ist; er entdeckte darin eine neue zur Oelsäurereihe gehörige, flüchtige, schön krystallisirende Säure, die Angelikasäure und daneben ein krystallisirbares Harz, das Angelicin. Nun folgte die Habilitation als Privatdozent für physiologische und pathologische Chemie an der medizinischen Fakultät, wozu er als Probeschrift eine

Digitized by Google

Abhandlung: „Dissertatio medico-chemica de aqua salsa Rosenheimensi“ verfasst hatte.

Bevor er seine Lehrthätigkeit begann, begab er sich, in Erfüllung eines länger gehegten Wunsches, auf ein Semester nach Giessen, wo damals Liebig begeisterte Schüler aus allen Ländern um sich versammelt hatte. Er hielt darauf Vorlesungen über physiologische und pathologische Chemie, über analytische Chemie für Pharmazeuten und leitete die Uebungen im pharmazeutisch-chemischen Laboratorium. Nachdem er mit Hilfe eines Staatsstipendiums nochmals Giessen besucht und die chemischen Laboratorien von Göttingen, Berlin, Leipzig und Wien gesehen hatte, erhielt er die Anstellung als ausserordentlicher Professor an der medizinischen Fakultät mit dem Auftrage, die pathologisch-chemischen Untersuchungen an den drei Kliniken vorzunehmen. Als der Vater starb, konnte kein besserer an seine Stelle als ordentlicher Professor der Pharmazie an der medizinischen Fakultät gewählt werden wie sein Sohn.

An dieser Stelle wirkte er vierzig Jahre lang in unermüdlicher Thätigkeit, lehrend und forschend. Er fasste seine Aufgabe als Vertreter der Pharmazie an der Universität ernst auf und seine Schüler, für die er stets väterlich besorgt war, fühlten, wie gut er es mit ihnen meinte und dass sein eifrigstes Bestreben war, ihnen die richtigen Kenntnisse für ihren wichtigen Beruf beizubringen. Bei seiner grossen Gründlichkeit, seinen umfassenden Kenntnissen und Erfahrungen war er ein guter Lehrer, wie die Anhänglichkeit und Hochachtung bezeugt, welche die vielen von ihm ausgebildeten tüchtigen Pharmazeuten ihm, dem Vater Buchner, entgegen brachten. Man könnte ihm höchstens den Vorwurf machen, zuweilen allzu nachsichtig gegen seine Schüler gewesen zu sein. Allerdings hörte man später hie und da sagen, sein Laboratorium wäre veraltet und entspreche nicht mehr den Fortschritten der Zeit, aber solche Tadler wussten nicht, wie oft es Buchner früher vergebens versucht hat, Mittel für Verbesserung des Laboratoriums und für neue Apparate zu bekommen.

Digitized by Google

Ausser seinem Lehramt hatte er als Mitglied des Medizinal-Comité's an der hiesigen Universität die gerichtlich-chemischen Untersuchungen zu machen, die er mit unübertroffener Gewissenhaftigkeit ausführte und mit überzeugender Klarheit vor dem Schwurgerichte vertrat. Wie oft hing hierbei von seiner Geschicklichkeit die Entscheidung über Leben und Tod ab; häufig ist er in das physiologische Institut gekommen, um die erhaltenen Extrakte durch den Versuch am Thier auf giftige Stoffe zu prüfen. Auch im Obermedizinal-Ausschusse, wo ihm die oft recht verwickelten Referate über die Verleihung der Apotheken übertragen waren, übte er durch seine Unparteilichkeit und Sachkenntniss eine gedeihliche Wirksamkeit aus.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Buchner's verfolgten besonders diejenige Richtung in der Chemie, welche man die medizinisch-pharmazeutische nennen könnte. Es sollen hier nur einige derselben hervorgehoben werden, um ein Bild seiner Bedeutung für die Chemie zu geben.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen war die „sehr gründliche" Untersuchung, wie sie in Liebig's Annalen genannt wird, über die wechselseitige Wirkung des Schwefelwasserstoffs auf die Carbonate der Alkalien und alkalischen Erden, sowie über die der Kohlensäure auf Sulfhydrate, welche unsere Kenntnisse über die sogenannten chemischen Massenwirkungen beträchtlich erweiterten.

Durch seine Untersuchungen zahlreicher Pflanzen und Pflanzentheile bereicherte Buchner die organische Chemie mit einigen neuen interessanten Stoffen.

Von der Entdeckung der Angelikasäure ist vorher schon die Rede gewesen.

Er war ferner der Erste, welcher die in dem giftigen Eisenhut enthaltene, an Kalk gebundene Säure, die Akonitsäure einer genaueren Prüfung unterwarf, wobei er fand, dass sie zwar dieselbe Zusammensetzung besitze wie die bei der trockenen Destillation von Aepfelsäure entstehende Fumarsäure und Maleinsäure, dass sie aber dennoch in ihren Eigenschaften von diesen Säuren so sehr abweiche, dass man sie als eine

Digitized by Google

besondere Säure ansehen müsste. Diese Arbeit Buchner's erregte die besondere Aufmerksamkeit von Berzelius, welcher sie als Anhaltspunkt bei der Untersuchung einer beim Erhitzen der Citronensäure entstehenden Säure benutzte, wobei er sich von der Identität dieser Säure mit der Aconitsäure überzeugte.

Aus der Rinde des Faulbaums (Rhamnus Frangula) isolirte er einen sehr schönen sublimirbaren Farbstoff, das Rhamnoxanthin oder Frangulin und später noch einen rothen, dem Alizarin ähnlichen, ebenfalls sublimirbaren Farbstoff.

Mehrere ätherische Oele und verwandte Stoffe wurden von ihm und seinen Schülern genau untersucht und beschrieben, so dasjenige von Pinus Pumilio Haenke, der sogenannten Latsche, ferner das ätherische Oel aus den Früchten der zu den Fichten gehörigen Abies Reginae Amaliae, und der Porst-Campher, welcher aus dem ätherischen Oele von Ledum palustre, dem zu der Erikagruppe gehörigen Porst herauskrystallisirt.

Von besonderem chemischem und pflanzenphysiologischem Interesse sind seine Beobachtungen über die Bildung der salicyligen Säure in den Blüthen der Spierstaude, der Spiraea Ulmaria, welche uns das Entstehen mancher aromatischer Pflanzenstoffe durch Oxydation erklären. Er hat zuerst erkannt, dass das ätherische, aromatisch riechende Oel der Blüthen der Spiräa-Arten identisch mit der, jetzt Salicyl-Aldehyd genannten, salicyligen Säure ist, welche man auch durch Oxydation des vorher erwähnten Salicins und Saligenins erhalten kann. Und er that dann durch überzeugende Versuche dar, dass in den Knospen der genannten Blüthen eine Salicylverbindung vorkommt, aus welcher durch die oxydirende Wirkung der Chromsäure eben so gut das flüchtige Oel der Spiraea entwickelt werden kann wie durch den Vegetationsprocess.

Von chemischen Verbindungen, welche Buchner zuerst dargestellt und analysirt hat, sei der Ammoniak-Brechweinstein namhaft gemacht, welches Salz dem gewöhnlichen (Kali-) Brechweinstein isomorph ist.

Von Bedeutung sind die Abhandlungen über Gährungs- und Verwesungserscheinungen von im Thierkörper vorkommen-

Digitized by Google

den organischen Stoffen. Anknüpfend an eine unter seiner Leitung von Herrn v. Gorup-Besanez unternommene Arbeit über die Galle, verfolgte Buchner die Veränderungen, welche das bei der Fäulniss der Galle aus der Taurocholsäure frei gewordene schwefelhaltige Taurin bei weiterer Fäulniss erleidet; er wies nach, dass dieser schöne Körper, welchen man für einen der unveränderlichsten der organischen Chemie gehalten hat, zu den gährungsfähigen Stoffen gezählt werden muss, und ermittelte genau die Bedingungen und die Art seiner Veränderungen unter solchen Verhältnissen. Auch noch zwei weitere Arten der Gährung, die der im Harn der pflanzenfressenden Säugethiere vorkommenden Hippursäure und die des Glykokolls, welches mit der Benzoesäure ein Component der Hippursäure ist und auch aus dem Leim durch Zersetzung mit Säuren dargestellt werden kann, werden in diesen Abhandlungen beschrieben. Ueberhaupt bieten diese an neuen Thatsachen reichen Arbeiten einen wichtigen Beitrag zur Kenntniss eines der wichtigsten Kapitel der organischen Chemie.

Ein nicht zu unterschätzendes Verdienst hat sich weiterhin Buchner um die Kenntniss einer Anzahl von Mineralwässern durch sorgfältige Analysen derselben erworben. Er hat das Brom in der jodhaltigen Adelheidsquelle zu Heilbrunn aufgefunden, und das Vorkommen von Jod in anderen Wässern wie in Sulzbrunn im Kemptener Wald, in Hall in Oberösterreich, in Wildegg in der Schweiz nachgewiesen; auch ermittelte er die Zusammensetzung unserer oberbayerischen Salzsoolen in Reichenhall und Rosenheim nach den neueren analytischen Methoden. Er untersuchte ferner das Wasser der Schwefelquelle zu Oberdorf im Allgäu und dasjenige der eisenhaltigen Schwefelquelle zu Neumarkt in der Oberpfalz; in der Abhandlung über letztere Untersuchung sind interessante Beobachtungen über die Bildung des kohlensauren Eisenoxyduls und des Schwefelwasserstoffes in derartigen Quellen mitgetheilt. Das Münchener Wasser hat er zwei Male zum Gegenstande eines eingehenden Studiums gemacht, wobei er in demselben Jod und Brom nachweisen konnte, indem er sich in sinnreicher

Digitized by Google

Weise grösserer Mengen Kesselsteins bediente; es ist dieser Nachweis von Bedeutung, nachdem wir jetzt durch Baumann's glänzende Entdeckung wissen, dass das Jod in dem Jodothyrin der Schilddrüse zu den normalen Stoffen des thierischen Organismus gehört und es daher wichtig geworden ist zu erfahren, auf welchen Wegen es in denselben gelangt.

Bei den gerichtlich-chemischen Untersuchungen hatte er vielfach Gelegenheit, die Methoden des Nachweises giftiger Stoffe auszubilden und bemerkenswerthe neue Beobachtungen für forense Chemie und Medizin zu machen. Es gehören hierher seine Abhandlungen über Arsenreduktion bei gerichtlich-chemischen Fällen, über die Arsenik-Ausmittlung, über die Anwendung der Dialyse zu gerichtlich-chemischer Ausmittlung der arsenigen Säure, über die Bildung von Schwefel-Arsenik in den Leichen mit arseniger Säure Vergifteten, über eine Vergiftung mit ätzendem Quecksilbersublimat, über Vergiftung durch ätzende Säuren und deren chemischer Ausmittelung, über Vergiftungen durch Morphium und deren chemische Ausmittelung, über die Beschaffenheit des Blutes nach einer Vergiftung mit Blausäure.

Es dürfen ferner auch Buchner's Bemühungen, wissenschaftliche Prinzipien für die Praxis nutzbar zu machen, nicht unerwähnt bleiben. Ihnen verdankt man eine Arbeit über das pyrophosphorsaure Eisenoxydnatron als Arzneimittel und eine leicht ausführbare Methode eine arsenhaltige Schwefelsäure von Arsenik zu befreien. Durch seine in den Abhandlungen der naturwissenschaftlich-technischen Commission der Akademie publizirte Arbeit über die Bereitung und Anwendung des Natronwasserglases, worin eine neue sehr praktische Methode zur Darstellung dieses nützlichen Produktes im Grossen beschrieben ist, hat Buchner auf den Dank der Technik Anspruch zu machen, für welche er schon in früheren Jahren durch seine mit zahlreichen Anmerkungen und Zusätzen versehene Uebersetzung der drei letzten Bände des grossen Werkes von Dumas: „Traité de Chimie appliquée aux arts“ ein lebhaftes Interesse an den Tag gelegt.

Digitized by Google

Endlich ist der Fortführung des neuen Repertoriums für Pharmazie, welches er nach dem Tode seines Vaters während 25 Jahren leitete, sowie der Herausgabe seines grossen Commentars zur Pharmacopoea Germanica in zwei Bänden zu gedenken.

Diese seine Arbeiten sichern ihm wie seinem Vater eine ehrenvolle Stellung in der Geschichte der Pharmazie.

Buchner hat ein arbeitsreiches, gesegnetes Leben geführt; in stiller Thätigkeit suchte er innere Befriedigung. Die Erfüllung der Pflicht gieng ihm über Alles und noch wenige Tage vor seinem Tode trug er, fast als Sterbender, ein musterhaftes Gutachten im Obermedizinalausschusse vor; ja er war getreu bis in den Tod.

Körperlich und geistig rüstig und frisch bis ins hohe Alter, bewahrte er sich eine jugendliche Heiterkeit und eine Lebensauffassung, die das Gute in Allem herausfand. Bei einer Feier, bei welcher sein glückliches Alter gepriesen ward, äusserte er sich in charakteristischer Weise: alt werden ist nicht schwer, aber alt werden und jung bleiben, das ist nicht so leicht.

Was wir aber noch besonders an ihm schätzten, das ist, dass er einer der besten Menschen war, geliebt und verehrt von Allen, die ihn kannten, wegen seiner Freundlichkeit, seiner Güte, seiner Milde und seiner Treue. Niemals hat er Jemandem etwas zu Leide gethan. Darum werden wir auch den guten Collegen Buchner nicht vergessen und ihm ein ehrendes Andenken bewahren.

Leonhard Sohncke.[1])

Das zweite ordentliche Mitglied, welches die mathematisch-physikalische Klasse im vergangenen Jahre (am 2. November 1897) durch den Tod verloren hat, ist der Professor der Physik

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von S. Finsterwalder (Münchener Neueste Nachrichten vom 10. November 1897) und von S. Günther (Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 4. Dezember 1897).

Digitized by Google

an der technischen Hochschule, Leonhard Sohncke. Aber während es sich im ersten Falle um einen hochbetagten Greis handelte, der sein Tagewerk hienieden vollendet hatte und den wir ob seines freundlichen Geschickes glücklich preisen durften, betrauern wir hier voll Wehmuth einen Collegen, welcher noch mitten im kräftigsten Schaffen war und von dem die Wissenschaft noch so manche Förderung erwarten konnte.

Leonhard Sohncke wurde am 22. Februar des Jahres 1842 als der zweite Sohn des verdienten Professors der Mathematik an der Universität Halle, Ludwig Adolf Sohncke, geboren. Es ist ihm früh der Ernst des Lebens nahe getreten und er musste sich durch eigene Kraft emporarbeiten, denn bei dem kärglichen Gehalte war der Vater Sohncke's genöthiget, den Lebensunterhalt für seine Familie durch literarische Lohnarbeit, durch Uebersetzungen und dergleichen, zu verdienen. Und als bald der Vater starb, hinterliess er die Seinen in recht dürftigen Verhältnissen.

Aber der, nach dem grossen Mathematiker Leonhard Euler, Leonhard genannte Sohn wusste durch sein Talent und seinen Eifer die seiner Ausbildung entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen. Auch ihm diente, wie so Vielen, das schwere Ringen um das tägliche Brod zum Glücke, indem es ihm die Liebe zur Arbeit und zur tieferen Erkenntniss lehrte. Nachdem er die Schulen der Franke'schen Stiftungen besucht und schon im 17. Lebensjahre das Gymnasium absolvirt hatte, bezog er die Universität seiner Vaterstadt, um sich dem Studium der Mathematik zu widmen, zu welchem er von früh an, dem Beispiel des Vaters folgend, eine besondere Neigung hatte.

An der Universität Halle waren seine Lehrer in der Mathematik Eduard Heine, der sich vornehmlich durch seine Arbeiten über die Kugelfunktionen bekannt gemacht hat, und dann der junge Karl Neumann, der Sohn des Begründers der theoretischen Physik in Deutschland, Franz Neumann in Königsberg, welcher sich kurz vorher in Halle habilitirt hatte. Sohncke musste darnach trachten, sich die Mittel für sein Studium und einen baldigen Verdienst zu verschaffen, wesshalb er sich auf die

Digitized by Google

Prüfung für das mathematische Lehramt in Mittelschulen vorbereitete. Inzwischen half ihm eine Stelle als Hilfsassistent an der mineralogischen Sammlung der Universität über die ersten Schwierigkeiten hinweg; noch am Gymnasium hatte er durch den Einfluss eines trefflichen Lehrers ein lebhaftes Interesse für die so anziehende Krystallographie gewonnen und nun konnte er an dem Mineralienkabinet seine Kenntnisse der Mineralien erweitern, was seinen späteren wissenschaftlichen Arbeiten eine bestimmte Richtung gab und ihnen von grösstem Nutzen war. Nachdem er im Alter von 20 Jahren die Lehramtsprüfung glänzend bestanden und noch in Halle mit der mathematischen Dissertation: „de aequatione differentiali seriei hypergeometricae" promovirt hatte, begab er sich an die Universität Königsberg, um seine Studien fortzusetzen und das Probejahr abzuleisten, woselbst er auch nach drei Jahren die erste Anstellung als Gymnasiallehrer erhielt.

In Königsberg trieb er zuerst noch Mathematik bei Richelot, bald aber gewann der Physiker Franz Neumann, der so viele Jünger für sein Fach angeregt und begeistert hat, einen solchen Einfluss auf ihn, dass er sich ganz der theoretischen Physik zuwandte. Die dortige Schule war damals der Mittelpunkt der physikalischen Forschung in Deutschland; die bedeutendsten Mathematiker und Physiker sind aus ihr hervorgegangen. Es war ein günstiges Zusammentreffen, dass Neumann sich in hervorragender Weise mit der Erforschung der Krystallformen beschäftiget hatte und die Neigung seines Schülers Sohncke zur Krystallographie förderte.

Anfangs veröffentlichte er noch einige mathematische Abhandlungen: über regelmässige Polyeder und über die durch Umdrehung eines regelmässigen Vierecks um eine Diagonale entstehenden Gebilde; dann fing er aber an, in einem Winkel seiner Wohnung mit den bescheidensten Mitteln physikalische Untersuchungen zu machen, obwohl er an dem Gymnasium wöchentlich 22 Stunden Unterricht ertheilen musste. So entstand seine erste experimentell-physikalische Arbeit: „über die Kohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen

Digitized by Google

Richtungen", mit welcher er sich als Privatdozent für Physik an der Universität habilitirte.

Ein glücklicher Zufall brachte in seinen Lebenslauf eine entscheidende Wendung, die ihn ganz der Hochschule zuführte. Gustav Kirchhoff, der geistvolle Physiker an der Heidelberger Universität, ebenfalls ein Schüler Neumann's, sah bei einem Besuche in Königsberg den jungen Gelehrten und erkannte sein Talent. Er empfahl ihn, als durch den Tod Eisenlohr's die Professur der Physik an der polytechnischen Schule in Karlsruhe erlediget war. Sohncke erhielt den Ruf und erlangte dadurch einen weiten, lohnenden Wirkungskreis: er hatte die grosse Vorlesung über Experimentalphysik abzuhalten sowie die Vorlesung über theoretische Physik. Auch kam er in einen ihm zusagenden Kreis von Collegen, von denen er namentlich dem Mineralogen Knop und dem Vertreter der darstellenden Geometrie Chr. Wiener wegen der gleichen wissenschaftlichen Interessen näher trat.

Im Verkehr mit diesen beiden entstand sein bedeutendstes Werk: die Entwickelung einer neuen Theorie der Krystallstruktur. Es war dies der Anfang einer Reihe werthvoller Forschungen, durch welche er verschiedene Gebiete der physikalischen Wissenschaft, insbesondere der Krystallographie und der Optik, durch neue Thatsachen und fruchtbare Theorien bereichert hat.

Mit der Professur für Physik war damals noch die Leitung des badischen meteorologischen Dienstes verbunden; diese Nöthigung sich mit Fragen der Meteorologie zu befassen, führten ihn auf ein anderes Gebiet der Forschung, in dem er besonders durch eine Theorie der Gewitterelektrizität Bedeutendes leistete.

Bald verliess er Karlsruhe, um einem Rufe an die Universität Jena zu folgen; er wünschte von den lästigen meteorologischen Geschäften befreit zu werden. In Jena, wo er anfangs mit dem Ausbau und der inneren Einrichtung des neuen physikalischen Instituts beschäftiget war, verlebte er wohl die glücklichsten Tage; die freie Auffassung an dieser altberühmten schönen Stätte der Wissenschaft und das innige Zusammen-

Digitized by Google

leben mit einer Anzahl gleich gesinnter Collegen und Freunde entsprach ganz seinen Neigungen. Es wurde ihm daher, als er nach wenigen Jahren unter glänzenden Bedingungen an die aufblühende hiesige technische Hochschule gerufen wurde, der Entscheid recht schwer. Er sollte der Nachfolger des vortrefflichen Beetz werden, der die Sammlung und das Laboratorium musterhaft eingerichtet und geleitet hatte; er entschied sich für München und es hat dieser Entschluss ihm und der Hochschule nur zum Besten gereicht. Er hielt die Vorlesung über Experimentalphysik mit steigendem Erfolge, denn er war ein gewissenhafter Lehrer, der in klarem, ernstem Vortrage, unterstützt durch die richtigen Versuche, sein Bestes gab. Die Uebungen im Laboratorium, an welchen sich zahlreiche Schüler betheiligten, waren so eingerichtet, dass Jeder die Naturerscheinungen genau beobachten und messend verfolgen lernte. So entfaltete er dahier, allerdings unter fast übermässiger Anstrengung, eine äusserst gedeihliche Wirksamkeit, bei der auch die wissenschaftliche Forschung eifrig fortgesetzt wurde.

Ueberblickt man in dieser Richtung die Leistungen Sohncke's, sie ist vor Allem die schon erwähnte Abhandlung: „die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur" zu nennen. Schon Viele waren bestrebt, zu ergründen, wie die schönen regelmässigen Formen der Krystalle entstehen und warum dieselben in einer bestimmten Richtung die gleichen, in anderen Richtungen aber andere Eigenschaften zeigen. Da hatte, neben Delafosse und Frankenheim, besonders der französische Mineraloge Bravais, an frühere Anschauungen von Hauy, des Begründers der mathematischen Krystallographie, sich anschliessend, den Gedanken, jene Eigenthümlichkeiten auf eine gitterartige Struktur der krystallisirten Materie zurückzuführen, indem er annahm, dass die Krystalle aus vielen gleichgeformten und gleichgestellten Bausteinen aufgebaut sind; es gelang ihm auch die Uebereinstimmung der an vollflächigen oder holoedrischen Krystallen beobachteten Symmetrieverhältnisse mit den möglichen Symmetrieverhält-

Digitized by Google

nissen solcher Gitterstrukturen nachzuweisen. Jedoch war er nicht im Stande, für die halbflächigen oder hemiedrischen Krystalle, welche als die Hälften der vollflächigen Gestalten erscheinen, eine solche Gitterstruktur zu finden. Später zeigte nun Chr. Wiener, der Genosse Sohncke's, dass man regelmässige Punktsysteme herzustellen vermöge, deren Elemente zwar gleichgeformt, aber nicht gleichgestellt sind; und der französische Mathematiker Camille Jordan erdachte eine Methode zur Auffindung aller derartigen Punktsysteme. An diese Vorstellungen knüpfte Sohncke an; indem er aus Jordan's Methode die unmöglichen Fälle ausschied, leitete er aus jener Grundvorstellung die möglichen Krystallsysteme streng und vollständig ab, mit Einschluss derer der halbflächigen Krystalle. Die schöne Theorie, mit allen bekannten morphologischen und physikalischen Eigenschaften der krystallisirten Körper im Einklang, wirft auf mehrere derselben ein überraschendes Licht. Unserem korrespondirenden Mitgliede Eugraph v. Fedorow gelang es später, in äusserst einfacher Weise die Hauptstrukturfläche auf experimentellem Wege zu bestimmen. Eine Anzahl weiterer Untersuchungen Sohncke's beschäftigt sich mit dem gleichen Thema; immer von Neuem suchte er seine Theorie der Krystallstruktur mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen, wie z. B. in den Abhandlungen: elementarer Nachweis einer Eigenschaft parallepipedischer Punktsysteme, über Spaltungsflächen und natürliche Krystallflächen, und Erweiterung der Theorie der Krystallstruktur. Inhaltlich nahe verwandt mit diesen Arbeiten ist die schon angegebene über die Cohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen Richtungen, dann die über die Aetzfiguren an Steinsalzwürfeln und die über das Verwitterungsellipsoid rhomboedrischer Krystalle; in der letzteren führte er den Nachweis, dass die Fläche, welche in einem gegebenen Moment den verwitterten von dem intakten Theile scheidet, je nach der Natur der betreffenden Substanz abgeplattete und verlängerte Rotationssphäroide sein können.

Eine zweite Gruppe von Untersuchungen ist optischer Natur und bezieht sich auf die Erscheinungen der Rotations-

Digitized by Google

polarisation. In einer ausführlichen Abhandlung wird von Sohncke die Glimmercombination, durch welche der Tübinger Physiker Reusch das Drehungsvermögen des Quarzes nachgeahmt hatte, indem er künstliche Krystalle durch Aufeinanderlegen gleichartiger Glimmerplättchen, deren jedes gegen das obere und untere nächstfolgende um einen gewissen Winkel gedreht erscheint, herstellte, experimentell und theoretisch untersucht und hieran der Versuch geknüpft, einen Einblick in den Zusammenhang des Drehungsvermögens der Krystalle mit ihrer molekülaren Struktur zu gewinnen. Eine weitere Experimentalarbeit der Art über den Einfluss der Temperatur auf das optische Drehungsvermögen des Quarzes stellt fest, dass dieses Vermögen nicht, wie man bis dahin annahm, in geradem, sondern in rascherem Verhältnisse mit der Temperatur zunimmt. Ferner wird durch sehr sinnreiche Versuche in einer Abhandlung über die elektromagnetische Drehung natürlichen Lichtes nachgewiesen, dass diese Wirkung, welche man nur an polarisirtem Lichte kannte, in der That auch bei natürlichem Lichte stattfindet. Hierher gehört auch die Untersuchung über polarisirte Fluorescenz, ein Beitrag zur kinetischen Theorie der festen Körper.

In einer dritten Reihe von ebenfalls optischen Abhandlungen werden die prächtigen Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen sowie der Newton'schen Ringe behandelt, zum Theil im Verein mit seinem Freunde Wangerin, welcher die theoretische Seite der Aufgabe bearbeitete, während Sohncke die Beobachtungen und Messungen mit einem zweckmässig erdachten Apparate ausführte. Auch diesem schon so vielfach behandelten Gegenstande wurden bemerkenswerthe neue Resultate abgewonnen und wurde insbesondere gezeigt, dass die Ringe Curven doppelter Krümmung sind, welche auf einer Kugelfläche dritter Ordnung liegen.

Sohncke hat auch einmal, im Anschluss an die von Clausius aufgestellte Hypothese, eine Anschauung über die Entstehung des Stroms in der galvanischen Kette ausgesprochen, welche werthvolle neue Gesichtspunkte in dieser alten, aber

Digitized by Google

noch immer nicht endgiltig ausgetragenen Streitfrage liefert. — Seine letzte in der Julisitzung des vorigen Jahres in der Akademie vorgetragene Arbeit befasst sich mit der Aenderung der spezifischen Wärme mit der Temperatur, welche eine Mittheilung unseres Collegen Carl Linde über die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme der Gase veranlasste, die Sohncke nicht mehr erlebte.

In eine vierte Gruppe endlich gehören seine vorher erwähnten werthvollen Studien auf dem Gebiete der Meteorologie, welche er bis in die letzte Zeit seines Lebens fortsetzte. Es handelte sich dabei vorzüglich um die elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre, über welche er seine Ansichten in einem Schriftchen: „der Ursprung der Gewitter-Elektrizität und der gewöhnlichen Elektrizität der Atmosphäre, eine meteorologisch-physikalische Untersuchung" zusammenfasste; er schuf dadurch eine Theorie der atmosphärischen Elektrizität, welche unter den zahlreichen in diesem schwierigen und räthselvollen Gebiete bisher aufgestellten Theorien zur Zeit von sehr vielen Fachleuten als die den thatsächlichen Verhältnissen am meisten entsprechende anerkannt werden dürfte und welche jedenfalls das Verdienst hat, der Forschung eine bestimmte Richtung gegeben zu haben. Er erblickt die Ursache der Gewitterelektrizität in der Reibung der im aufsteigenden Luftstrom empor geführten Wassertheilchen der Cumulus-Wolken an den Eisnadeln, aus welchen die hochschwebenden Cirrus-Wolken bestehen. Dem Ausbruch des Gewitters geht nämlich regelmässig eine Erhitzung der unteren Schichten der Atmosphäre, verbunden mit einer starken Abnahme der Lufttemperatur nach Oben, voraus, so dass schon in geringer Höhe der Gefrierpunkt erreicht, ja unterschritten wird. Die Folgen davon sind Ueber- und Nebeneinanderlagerung von Wasser- und Eiswolken und deren tumultuarische Mischung durch die plötzlich aufsteigenden Luftströme, zu deren Entstehung die Wärmeschichtung der Atmosphäre den Anlass gibt. Die Reibung zwischen den Nebeltröpfchen der Wasserwolken und den Eisnadeln der Eiswolken ist dann die Quelle der Gewitterelektrizität. Dass

Digitized by Google

Eis durch Wasserreibung positiv elektrisch wird, hat bereits Faraday durch von Sohncke wiederholte Laboratoriumsversuche beobachtet. Die Fahrten des auf seinen Antrag mit Unterstützung unserer Akademie gebauten Luftballons „Akademie" des hiesigen Vereins für Luftschifffahrt haben, ausser mannigfachen anderen Bereicherungen unseres Wissens von der Atmosphäre, seine Ansichten über Gewitterelektrizität gestützt.

Gerne lieh er seine Kenntnisse und seine Thatkraft Bestrebungen, die er für nützlich hielt. Er war erster Vorsitzender und die Seele des genannten Vereins für Luftschifffahrt; auch betheiligte er sich lebhaft an den Aufgaben des hiesigen Zweigvereins der Deutschen meteorologischen Gesellschaft. Sehr tkätig war er in dem Verein für Schulreform, welcher die Idee der Einheitsschule, des Reformgymnasiums mit gemeinsamem Unterbau, verficht. Er verstand es auch, in seltener Weise die Resultate der wissenschaftlichen Forschung weiteren gebildeten Kreisen durch gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik zugänglich zu machen; neun dieser Vorträge sind, in einem Hefte gesammelt, veröffentlicht worden; äusserst anziehend ist sein in dem bayerischen Industrie- und Gewerbeblatt erschienener Vortrag: „aus der Molekülarwelt" geschrieben. Endlich muss auch des von ihm gestifteten, ungemein anregenden Colloquiums gedacht werden, an welchem alle hiesigen Physiker von Fach sowie die sich für die Physik interessirenden Gelehrten anderer Fächer theilnahmen und wobei abwechselnd Originalmittheilungen gemacht oder zusammenhängende Referate erstattet wurden, woran sich dann eingehende Besprechungen anknüpften.

So stellt sich uns Sohncke als ein höchst feiner und zuverlässiger Beobachter der molekülaren Vorgänge an der Materie sowie als geistreicher Interpret derselben dar; mit unablässiger Lust arbeitete er daran, die Erscheinungen der Natur zu belauschen und beizutragen zu der Erkenntniss des Baues der Welt. Sein Name wird in der Wissenschaft stets ehrend genannt werden.

Digitized by Google

Die, welche ihn näher kannten, haben ihn als einen der edelsten, reinsten Menschen von idealer Gesinnung geschätzt und geliebt. Von ehrenfestem und unbeugsamem Charakter, verbunden mit einer wahrhaft kindlichen Herzensgüte, war es ihm stets nur um die Wahrheit zu thun. Er bildete sich in scharfer Prüfung seine eigene Ansicht und Ueberzeugung über die Dinge und er wich so öfter von der landläufigen Meinung ab; was er aber für Recht hielt, das vertrat er mit der ganzen Energie seines Wesens. Er war eine demokratisch angelegte, unabhängige Natur, welche die Menschen nicht nach ihrer zufälligen, äusserlichen Stellung, sondern nach ihrem inneren Werthe, der redlichen Benützung der ihnen verliehenen Gaben und der Reinheit der Gesinnung schätzte. Seine Collegen und Freunde werden seiner als leuchtendes Vorbild der Rechtschaffenheit dankbarst gedenken.

Francesco Brioschi.[1])

Am 13. Dezember 1897 ist zu Mailand der angesehenste Mathematiker Italiens und Präsident der R. Accademia dei Lincei, Francesco Brioschi, im 73. Lebensjahre gestorben. Er war der Führer in der mathematischen Wissenschaft in seinem Vaterlande und er hat dieselbe durch seine Arbeiten, namentlich auf dem Gebiete der Algebra und der Funktionentheorie, zu einer hohen Stufe erhoben.

Geboren am 22. Dezember 1824 in Mailand, studirte er an der Universität zu Pavia, wo er sich alsbald mit Vorliebe der Mathematik zuwandte. Er erwarb sich, vor Allem durch das Studium der grossen französischen Mathematiker, ein umfangreiches Wissen auf allen mathematischen Gebieten, wodurch er später in den Stand gesetzt war, mit seltener Ausdauer und Vielseitigkeit in die wichtigsten Theile der mathematischen Forschung einzugreifen.

[1]) Mit Benützung des Nekrologs von M. Noether in Erlangen, in den mathematischen Annalen 1898, S. 477.

Digitized by Google

Nach seiner Lernzeit war er zuerst während 9 Jahren an der Universität Pavia als Professor der angewandten Mathematik thätig. Aber sein lebhafter, auf das Allgemeine gerichteter Geist suchte ausser seiner Fachwissenschaft eine weitere Wirksamkeit in der Hebung des Unterrichtswesens und der Förderung der Wissenschaften in Italien. So gründete und organisirte er im Auftrage der Regierung das Mailänder Istituto Tecnico Superiore, an dem er bis zu seinem Lebensende die Professur für Hydraulik inne hatte und das er als Direktor in wissenschaftlicher und praktischer Beziehung zu einer Musteranstalt erhob. Nach der Einigung seines Vaterlandes war er Senator des Königreichs und übte als solcher einen ungemein nützlichen Einfluss auf den verschiedensten Gebieten des Staates aus: er betheiligte sich eifrig bei allerlei praktischen Bestrebungen, förderte das Eisenbahnwesen, lieferte eine umfangreiche Arbeit über die Tiberüberschwemmungen, war als Mitglied des Schulrathes im Unterrichtsministerium für die Schulen thätig, besonders aber erwarb er sich als Präsident der R. Accademia dei Lincei um dieses Institut und um alle Wissenschaften in Italien die grössten Verdienste. So verdankt man ihm zum Beispiel die grossartig angelegte Publikation des Codice Atlantico des in den Künsten sowie in der Technik und als Schriftsteller in Mathematik und Physik hervorragenden Lionardo da Vinci, welches Unternehmen für die Naturwissenschaften, die Mathematik und die Technik von hoher Bedeutung zu werden verspricht; durch die Uebernahme und Leitung der von Tortolini gegründeten Annali di Matematica gab er der italienischen mathematischen Forschung ein angesehenes, auf die Entwicklung der mathematischen Studien in Italien einflussreiches Organ, und er erzog eine den anderen Ländern ebenbürtige mathematische Schule, welcher Männer wie Beltrami, Casorati und Cremona angehören.

Bei seinen ersten mathematischen Veröffentlichungen war Brioschi vorzüglich noch bestrebt, der italienischen Wissenschaft die Fortschritte in der Mathematik und die sie bewegenden Ideen zugänglich zu machen. Aber daraus entfaltete

Digitized by Google

sich allmählich seine eigenartige Thätigkeit als Forscher, der die in der Mathematik aufkeimenden Gedanken Anderer rasch erfasste, durch klare Aufdeckung ihres Wesens zugänglich machte und dadurch zu deren weiterer Entwicklung, namentlich durch sein Bestreben, die Rechnungen und die Formeln möglichst zu vereinfachen, ganz wesentlich beitrug.

Anfangs bewegten sich seine Arbeiten auf verschiedenen analytischen Gebieten. Dann beschäftigte er sich mit den Methoden der Determinanten- und Invarianten-Theorie, deren er sich in vollendeter Weise zur Lösung von allerlei Problemen bediente; es war hauptsächlich die Frage nach gewissen Differentialgleichungen für die Invarianten zunächst binärer, dann allgemeiner Formen, im Anschluss an die grundlegenden Untersuchungen von Cayley, Sylvester und Hermite über die algebraische Formentheorie, zu deren Entwicklung er durch sein analytisches Talent beitrug; auch verdankt man ihm auf diesem Gebiete wichtige Erweiterungen der Hermite'schen Theorie der associirten Formen, welche Methode Brioschi auch späterhin noch häufig benützte.

Darnach folgten seine Arbeiten über die Theorie der Gleichungen fünften Grades im Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, ferner die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen und endlich die Theorie der hyperelliptischen Funktionen. In allen diesen Arbeiten machte er Anwendung von der Theorie der algebraischen Formen. Sie gipfelten in seiner höchsten Leistung auf diesem Gebiete, in seinen Beiträgen zur Theorie der Gleichungen fünften Grades und zur Theorie der Jakobi'schen Gleichungen.

Als letzte Frucht seiner Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Funktionen erwuchs, auf Grund der epochemachenden Noten von Hermite und Kronecker über die Auflösung der Gleichung sechsten Grades, seine Betheiligung an der Behandlung einer neuen Lösung der Gleichung sechsten Grades mittelst hyperelliptischer Funktionen.

Den Arbeiten Brioschi's ist, neben der Sicherheit des Eindringens in den Kern der Frage, die Eleganz der Dar-

Digitized by Google

stellung in besonderem Maasse eigen, wie sie nur die vollständige Beherrschung des analytischen und hier insbesondere des algebraischen Apparates erreichen lässt.

Es wird ihm der bleibende Dank für sein nützliches Lebenswerk in seinem Vaterlande und überall, wo die mathematische Forschung betrieben wird, gezollt werden.

Karl Remigius Fresenius.[1])

Am 11. Juni 1897 ist in Wiesbaden der geheime Hofrath Karl Remigius Fresenius gestorben, der sich namentlich um die Ausbildung der analytischen Chemie der anorganischen Verbindungen grosse Verdienste erworben hat.

Am 28. Dezember 1818 zu Frankfurt a. M. geboren, erhielt er den ersten Unterricht in der Musterschule zu Frankfurt, dann im Bender'schen Institut zu Weinheim an der Bergstrasse und am Gymnasium in Frankfurt. Er widmete sich anfänglich der Pharmazie, indem er in die Stein'sche Apotheke in Frankfurt als Lehrling eintrat; gleichzeitig besuchte er an dem so wohlthätig wirkenden Senckenberg'schen Institut chemische und physikalische Vorlesungen. Damals machte er schon seine ersten analytisch-chemischen Versuche in einem kleinen in dem Gartenhause des väterlichen Anwesens errichteten Laboratorium. Dann ging er auf ein Jahr an die Universität Bonn, woselbst er neben der Pharmazie mit grösstem Eifer auch Naturwissenschaften studirte; zu dieser Zeit musste er bereits viele Erfahrungen in der analytischen Chemie gesammelt haben, denn er schrieb dorten zu seiner Uebung die Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse, welche später auf den Rath seines Lehrers Marquart, in dessen Privatlaboratorium er arbeitete, im Druck erschien. Dadurch reifte in ihm der Entschluss, sich ganz der Chemie zu widmen. Da

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe in den Berichten der Deutschen chem. Gesellschaft 1897, Nr. 11, und in der Zeitschrift für analytische Chemie 1897, Jahrgang 36, Heft 12.

Digitized by Google

war es selbstverständlich, dass er nach Giessen wanderte, wo unter Liebig's genialer Leitung von den talentvollsten jungen Chemikern mit wahrem Bienenfleiss gearbeitet wurde. Fresenius nahm alsbald den regsten Antheil an den Arbeiten des Laboratoriums, er wurde zuerst Privatassistent Liebig's und dann staatlicher Unterrichtsassistent. Zu vielen der damaligen Schüler trat er in nähere Beziehungen und in engere Freundschaft. In Giessen erhielt Fresenius seine letzte Ausbildung in der analytischen Chemie und die Richtung auf die Anwendung der Chemie in Landwirthschaft und Technik.

Nachdem er den Doktorgrad erworben hatte, habilitirte er sich als Privatdozent an der Universität. Bald jedoch erhielt er einen Ruf als Professor der Chemie, Physik und Technologie an dem landwirthschaftlichen Institut zu Hof-Geisberg bei Wiesbaden. In dem Wunsche, Schüler in der Chemie ausbilden zu können, gründete er daselbst ein eigenes chemisches Laboratorium, das mit der Zeit grosse Erweiterungen erfuhr und dessen Direktor und viel gesuchter begeisternder Lehrer er sein ganzes ferneres Leben über blieb.

Aus diesem nun fast ein halbes Jahrhundert bestehenden Laboratorium sind viele Arbeiten von ihm und seinen Schülern hervorgegangen. Es ist namentlich auch eine Lehrstätte für die wissenschaftlichen chemischen Bedürfnisse der Landwirthschaft und der Industrie geworden, und die daraus hervorgegangenen Schüler haben sich sowohl im Lehramt der Chemie als auch insbesondere in der Praxis derselben hervorgethan. Es war in der Anstalt für alle Anwendungen der Chemie Sorge getragen: für Ausbildung und Untersuchungen in der Agrikulturchemie, in der Chemie der Nahrungsmittel, besonders der der Weine, der Obstarten etc., in der Pharmazie, im Bergbau, und auch in der Hygiene und Bakteriologie.

Im ersten Semester in Giessen erschien die schöne Untersuchung von Fresenius über die traubensauren Salze; in Giessen ermittelte er ferner ein neues, viel angewandtes Verfahren zur Unterscheidung und Trennung des Arsens von Antimon durch die mit dem Marsh'schen Apparat erhaltenen

Digitized by Google

Metallspiegel. Die in Gemeinschaft mit Will ausgearbeiteten neuen Versuchsweisen zur Prüfung der Pottasche und Soda, der Aschen, der Säuren und des Braunsteins haben in der Technik allgemeine Anwendung gefunden; mit Haidlen veröffentlichte er eine Abhandlung über die Anwendung des Cyankaliums in der chemischen Analyse, mit Babo über ein neues Verfahren zur Ausmittelung und quantitativen Bestimmung des Arsens bei Vergiftungsfällen und mit Will über die unorganischen Bestandtheile der Pflanzen. Weiter rühren von ihm viele sorgfältige Analysen von Mineralwässern, namentlich aus dem Herzogthum Nassau, her, ebenso Untersuchungen der nassauischen Thone und der wichtigsten nassauischen Kalksteine.

Von Nutzen war sein Lehrbuch der Chemie für Landwirthe, Forstmänner und Kameralisten. Besonders aber muss hervorgehoben werden sein zweibändiges Werk: „Anleitung der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse", von dem die erstere in 16, die letztere in 6 Auflagen erschienen und in fast alle lebenden Sprachen übersetzt worden ist. Nach dem veralteten Handbuch der analytischen Chemie von Rose war das Werk von Fresenius dasjenige, nach dem die Chemiker analytisch arbeiteten; es erhielt einen besonderen Werth dadurch, dass er und seine Schüler die Methoden selbst geprüft hatten. Später hat er dann die Zeitschrift für analytische Chemie gegründet, welche jetzt 36 Jahrgänge umfasst und in der alle Fortschritte dieses Zweiges der Chemie seit dieser Zeit verzeichnet sind.

Der Name von Fresenius war dadurch allen Chemikern bekannt und seine Verdienste allgemein anerkannt. In der Ueberzeugung, dass die verbesserten analytischen Methoden zum Fortschritte der Chemie nothwendig sind, hat er durch seine Arbeiten die Entwicklung der Chemie gefördert.

Viel Gutes hat er auch gewirkt durch sein lebhaftes Interesse für diejenigen Theile der Technik und der Industrie, auf welche die Chemie von Einfluss ist, sowie durch seine Antheilnahme an gemeinnützigen Bestrebungen und am öffentlichen Leben.

Digitized by Google

Victor Meyer.[1])

Durch den am 8. August 1897 erfolgten frühzeitigen und plötzlichen Tod des Chemikers Victor Meyer in Heidelberg hat die Wissenschaft einen Gelehrten verloren, welchen seine Fachgenossen als einen der talentvollsten und hervorragendsten Forscher betrachteten, von dem man noch die grössten Leistungen erwarten durfte. Auf mehreren Gebieten der jetzt so weit verzweigten Chemie hat er zahlreiche, neue Gesichtspunkte eröffnende Arbeiten gemacht, durch welche er ganz wesentlich seit dem Ende der sechziger Jahre zu den Fortschritten dieser Wissenschaft beigetragen hat.

Victor Meyer wurde am 8. September 1848 zu Berlin geboren, woselbst sein Vater eine ansehnliche Kattundruckerei besass. Er erhielt zuerst Privatunterricht und besuchte dann das Friedrich-Werder'sche Gymnasium seiner Vaterstadt. Er zeigte zu dieser Zeit zwar ein Interesse für die Naturwissenschaften, aber als er das Maturitätsexamen gemacht hatte, war er noch nicht entschlossen, welchem Studium er sich besonders widmen wollte. Erst nach einem Besuch in Heidelberg, wo damals Bunsen, Kirchhoff und Helmholtz wirkten, entschied er sich für die Chemie und die akademische Laufbahn.

An der Universität in Berlin hörte er noch eine chemische Vorlesung bei A. W. Hofmann, dann begab er sich nach Heidelberg, wo er bei dem Altmeister Bunsen, der bald den Werth des jungen Mannes erkannte, zu arbeiten begann. Er erwarb sich daselbst, noch nicht 19 Jahre alt, den Doktorgrad und wurde hierauf Assistent für Mineralwasser-Analyse am Laboratorium Bunsen's. Der Drang, sich in der organischen Chemie auszubilden, führte ihn in die Gewerbeakademie zu Berlin, an der damals Ad. Baeyer durch seine glänzenden Arbeiten die Augen der Chemiker auf sich zog. In dieser Schule entwickelte

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von Liebermann in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft 1897, Bd. 2, S. 2157; dann in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1897, 24. August, Nr. 189; und in Leopoldina 1897, Nr. 8, S. 118.

Digitized by Google

er sich rasch; der Umgang mit einer Anzahl talentvoller junger Forscher, der Einfluss des geistreichen A. W. Hofmann und der neu begründeten chemischen Gesellschaft brachten vielfache Anregung.

Nach drei Lernjahren habilitirte er sich als Privatdozent an der Universität. Und nun begann eine Laufbahn, wie sie glänzender und ehrenvoller kaum gedacht werden kann.

Der alternde Fehling in Stuttgart suchte eine Hilfskraft für den Unterricht im Laboratorium und für die Vorlesung über organische Chemie; Baeyer empfahl Meyer so angelegentlich, dass er die Stelle eines Assistenten und Titularprofessors am Polytechnikum in Stuttgart erhielt. In dieser Zeit vollendete er mehrere bedeutende Arbeiten, die seinen Ruf als aufstrebende Kraft begründeten. Als Wislicenus dem Rufe nach Würzburg folgte, besuchte der bekannte schweizerische Schulrath Kappeler eine Vorlesung von Meyer und fand alsbald an dem klaren Vortrag des jungen noch nicht 24jährigen Mannes solches Gefallen, dass er ihm ohne Bedenken die ordentliche Professur der Chemie und das Direktorium des chemischen Laboratoriums am Polytechnikum zu Zürich antrug. Nach 12jährigem ausserordentlich glücklichem und fruchtbarem Wirken in Zürich kam er für 4 Jahre nach Göttingen, von wo es der Heidelberger Universität gelang, den berühmten Forscher als Nachfolger Bunsen's zu gewinnen. An allen diesen Orten hat er musterhafte Laboratorien eingerichtet und grosse Schulen der Chemie geleitet.

Wenn wir einen Ueberblick über die wissenschaftliche Thätigkeit Meyer's werfen, so ist vor Allem hervorzuheben, dass diese nur ermöglicht war durch sein umfassendes Wissen in der Chemie, sein rastloses Schaffen, seine eiserne Thatkraft, sein experimentelles Geschick und sein erfinderisches Talent. Mit zäher Ausdauer, manchmal viele Jahre hindurch, verfolgte er eine Aufgabe, bis ihm endlich die Lösung derselben gelang.

Er fing seine Karriere mit einigen kleineren Arbeiten an, welche über die Constitution des Chloralhydrats und des Camphers handelten. Dann kam bald eine grössere in Liebig's

Digitized by Google

Annalen veröffentlichte Untersuchung über die Stellungsfrage isomerer Benzolderivate, welche für die Theorie der Benzolverbindungen von Einfluss geworden ist und schon die ganze Art und Bedeutung des Autors erkennen lässt. Er zeigte darin z. B. die Ueberführung der Sulfosäuren in Carbonsäuren, ebenso des Dibrombenzols in Terephtalsäure, und die richtige Stellung der Sulfo-, Brom- und Oxy-Benzoesäure.

Noch in Stuttgart entdeckte er die den Salpetrigsäureestern isomeren Nitroäthane, d. i. die Mononitroderivate der Kohlenwasserstoffe der Fettreihe, an denen er merkwürdige Reaktionen nachwies. In Zürich setzte er diese ungemein schwierigen und auch gefährlichen Untersuchungen eifrig fort; dieselben haben eine grosse Ausdehnung angenommen und gehören zu den fruchtbarsten der Experimentalchemie. Den Nitrokörpern reihen sich die Nitrosokörper und die den letzteren isomeren Isonitrosokörper an. Dabei zeigte es sich, dass eine grosse Anzahl von Nitrosoverbindungen eine andere Constitution besitzen, als man allgemein angenommen hatte, und dass sich diese nicht nur durch die Einwirkung von salpetriger Säure auf Wasserstoffverbindungen, sondern noch viel leichter durch die Reaktion von Hydroxylamin auf sauerstoffhaltige Körper, z. B. auf Ketone und Aldehyde darstellen lassen, wobei die wichtigen Ketoxime und die Aldoxime entstehen, welche später die Grundlage für die Lehre von der räumlichen Lagerung der Volenzen des Stickstoff-Atoms geliefert haben. Aus dem Nitroäthan und dessen Homologen entwickelte er die Nitrolsäuren, die Pseudonitrole und die gemischt aromatisch-fetten Azoverbindungen.

Darauf folgte eine fast noch glänzendere Entdeckung, nämlich die des Thiophens. Er hatte bemerkt, dass das aus Steinkohlentheer dargestellte Benzol bei gewissen Reaktionen anders sich verhält als das aus Benzoesäure; bei weiterer Verfolgung der Sache stellte er aus dem schon so vielfach untersuchten Steinkohlentheer einen Körper dar, durch den sich ein weites neues Gebiet, das der Thiophengruppe, der organischen Chemie erschloss. Es gelang ihm daraus einen ganz übersehenen, merkwürdigen, schwefelhaltigen Stoff, der dem Benzol

Digitized by Google

glich und den er wegen des Schwefelgehaltes Thiophen nannte, zu isoliren. Seine weiteren Arbeiten ergaben die Constitutionsbeziehungen des Thiophens zu dem Benzol, viele Abkömmlinge, Homologen, Substitutions-Produkte und Isomeren desselben, welche er mit den entsprechenden Benzolderivaten verglich.

Er ging nun zu für die Chemie wichtigen physikalischen Problemen über.

Die gewöhnlich geübte Methode der Bestimmung der Dampfdrähte von A. W. Hofmann versagte wegen der Spannung des Quecksilberdampfes bei einer Temperatur von über 310°; es war aber nothwendig, bei wesentlich höherer Temperatur die Bestimmung auszuführen. Nach Meyer's Methode wird bekanntlich eine gewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in einem geschlossenen Raume verdampft und das durch den Dampf verdrängte gleiche Luftvolum gemessen. Indem er das Verfahren durch Erfinden neuer Apparate und Oefen immer mehr verbesserte, kam er zu höheren Temperaturen, zuletzt durch Anwendung von Platingefässen zu solchen von 1800° und noch in der letzten Zeit hatte er Aussicht, Gefässe zu bekommen, welche bis zu 4000° aushalten. Er hat durch diese jetzt allgemein gebräuchliche Methode die Pyrochemie ganz ungemein gefördert.

Durch die Anwendung seiner Methode auf die Gruppe der halogenen Elemente, welche mit den Metallen salzartige Verbindungen bilden, auf Chlor, Brom, Jod und Fluor, gelang ihm durch die hohen Temperaturen die Spaltung oder Dissociation der Halogenmoleküle in ihre Atome. Indem er bei den verschiedensten Glühtemperaturen Versuche über die Molekülarverhältnisse des Sauerstoffs, des Stickstoffs, des Schwefels, des Stickstoffoxyds, der Kohlensäure, der schwefligen Säure, der Salzsäure, des Zinks, des Quecksilbers, des Schwefelquecksilbers, der Metallchloride und Bromide, sowie auch der Siede- und Schmelzpunkte anorganischer Salze anstellte, brachte er die wichtigsten Aufschlüsse über die Molekülargewichte der Elemente und ihrer Verbindungen. Ja er gab sich der Hoffnung hin, da die Gase des Quecksilbers, des Cadmiums, des Zinks und

Digitized by Google

des Jods nur aus einem Atom bestehen, durch den Versuch entscheiden zu können, ob wir mit diesen Atomen schon bis zu der letzten möglichen Zertheilung der Materie angelangt sind oder sie in noch einfachere Stoffe zerlegen können.

Zu den chemisch-physikalischen Arbeiten Meyer's gehören auch die über den zeitlichen Verlauf der Reaktion von Gasen wie des Jodwasserstoffs, des Knallgases etc.

In Heidelberg glückte ihm die Darstellung der ersten Jodoso- und Jodoverbindung, sowie der Jodoniumbasen, in welchen das Jod die Rolle des Stickstoffs in den Ammoniumbasen spielt. Seine letzte Arbeit war die über die diorthosubstituirten Benzoe-Säuren, wobei sich viele Aufschlüsse über die Stereochemie, sowie das sogenannte Esterificirungs-Gesetz ergaben.

Erwähnt zu werden verdient noch das mit P. Jacobson herausgegebene grosse Lehrbuch der organischen Chemie, ein vorzügliches Werk, in dem die Kohlenstoffverbindungen einheitlich von grossen Gesichtspunkten aus dargestellt sind.

Meyer liebte es auch, die allgemein wichtigen Resultate der chemischen Forschung für weitere wissenschaftliche Kreise zusammenzufassen; so hielt er in einer allgemeinen Sitzung der Naturforscher-Versammlung zu Heidelberg einen Vortrag über die chemischen Probleme der Gegenwart, und zu Lübeck über Probleme der Atomistik. In einzelnen Aufsätzen suchte er mit Glück das chemische Wissen gemeinfasslich in schöner Sprache darzustellen; auch hat er belletristische Mittheilungen aus Natur und Wissenschaft nicht verschmäht.

Er war zugleich ein Mann von allgemeiner Bildung, der die bildenden Künste, sowie die Musik und die schöne Literatur mit feinem Verständniss erfasste. Durch seine einnehmende Persönlichkeit, sein liebenswürdiges Wesen und seinen edlen Charakter hat er sich überall Freunde erworben.

In Folge der rastlosen Arbeit zeigten sich schon in Zürich zeitweise Erscheinungen der Ueberanstrengung und Ermüdung der Nerven mit Schlaflosigkeit, besonders gegen Ende des Semesters, welche sich aber durch Erholung in den Ferien

Digitized by Google

wieder hoben. Dazu gesellten sich, offenbar durch den langen Aufenthalt in dem öfter bis über 50° warmen Feuerlaboratorium hervorgerufen, schmerzhafte Muskelrheumatismen und Neuralgien. Es kamen Stunden äusserster Abspannung und Depression und in einem solchen Anfalle übermässigen Leidens und von Schwäche machte der erst 49 Jahre alte edle Mann zum Bedauern aller Freunde der Naturwissenschaft seinem Leben ein Ende.

Rudolf Heidenhain.[1])

Der Physiologe an der Universität Breslau, Rudolf Heidenhain, ist am 13. Oktober 1897 nach längerer Krankheit im 64. Lebensjahre gestorben. Er hat die Physiologie durch eine grosse Anzahl von Thatsachen von immer steigender Bedeutung bereichert und dadurch auf die Entwicklung dieser Wissenschaft einen erheblichen Einfluss ausgeübt; namentlich hat er durch seine meisterhaften mikroskopischen Untersuchungen der lebendigen Drüsenzellen im Zustande der Ruhe und der Thätigkeit während der Sekretion die Lehre von der Sekretion in neue Bahnen gelenkt.

Rudolf Heidenhain wurde am 29. Januar 1834 in Marienwerder in Westpreussen geboren, wo sein Vater, der Sanitätsrath Heinrich Heidenhain, ein angesehener Arzt war. Schon während der Gymnasialjahre trat seine Vorliebe und sein Talent für die Naturwissenschaften hervor, anfangs besonders für die Botanik und für die Physik; er sammelte eifrig Pflanzen und half dem Lehrer der Physik bei seinen Experimenten. Er bezog darnach die Universität Königsberg, wo er zuerst Naturwissenschaften studirte, dann aber zur Medizin überging, von der ihn bald die Physiologie in hohem Maasse interessirte. Nach zwei Jahren verliess er Königsberg, um nach Halle überzusiedeln. Daselbst hörte er ausser dem ungemein praktischen

---

[1]) Siehe den Nekrolog von Dr. F. Schenk in Würzburg in Leopoldina 1898, Nr 5, S. 41, und in der Münchener med. Wochenschrift 1897, Nr. 50.

Digitized by Google

Kliniker Krukenberg, dem ehemaligen Lehrer seines Vaters, mit Vorliebe die Vorlesungen und Uebungen des trefflichen Chemikers H. W. Heintz, der auch ein Lehrbuch der Zoochemie herausgegeben hat, und des Physiologen Alfred Wilhelm Volkmann. In Berlin wurde dann die ärztliche Prüfung und das Doktorexamen gemacht, wozu er unter der Leitung von Emil Du Bois-Reymond eine Dissertation über die Nerven und Nervencentralorgane des Froschherzens ausgearbeitet hatte. Er blieb darnach noch $1^1/_2$ Jahre in Berlin, um als Assistent Du Bois-Reymond's sich weiter in der Physiologie zu unterrichten, und kehrte hierauf nach Halle zurück. Hier war er zunächst Assistent bei dem aus Giessen berufenen Kliniker Julius Vogel, der sich viele Verdienste um die mikroskopische und chemische Untersuchung am Krankenbette erworben hatte; später arbeitete er, nachdem er sich entschlossen hatte, ausschliesslich sich der Physiologie zu widmen, bei dem ausgezeichneten Volkmann, von welchem die ersten genaueren Bestimmungen der Geschwindigkeit des strömenden Blutes in den Arterien, Venen und Capillaren, sowie des Blutdrucks bei verschiedenen Thieren herrühren. Er habilitirte sich zum Abschluss seiner Lernjahre in Halle als Privatdozent für Physiologie mit einer Untersuchung: „disquisitiones criticae et experimentales de sanguinis quantitate in mammalium corpore exstantis", wobei er die Menge des Blutes bei verschiedenen Säugethieren nach der von Welcker kurz vorher angegebenen colorimetrischen Methode bestimmte; er zeigte dabei, dass das venöse Blut stärker färbt als das arterielle und dass beim Hunger die relative Menge des Blutes zum Körper sich nicht ändert.

Als nach dem Abgange von Purkynè nach Prag die Professur für Physiologie in Breslau frei geworden war, wurde der erst 26jährige, viel versprechende junge Forscher als ordentlicher Professor der Physiologie und Histologie und als Vorstand des ersten von Purkynè gegründeten physiologischen Laboratoriums berufen. Als solcher wirkte er bis an sein Lebensende. Indem er dorten alsbald eine fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit entfaltete und auch eine grössere An-

Digitized by Google

zahl von Schülern ausbildete, denen er durch seine Gewissenhaftigkeit und seinen Eifer in der Arbeit ein leuchtendes Beispiel war, hat er die in ihn gesetzten Erwartungen in vollstem Maasse erfüllt.

Die ersten grösseren Untersuchungen Heidenhain's beschäftigten sich mit den Vorgängen im Muskel bei der Contraktion, welche er grösstentheils in seiner Schrift: „mechanische Leistung, Wärmeentwicklung und Stoffumsatz bei der Muskelthätigkeit" beschrieb. Einige Zeit vorher hatte Helmholtz gezeigt, dass der ausgeschnittene, länger thätig gewesene Froschmuskel eine andere chemische Zusammensetzung der Fleischbrühe besitzt, als der ruhende, und daher die Muskelcontraktion, wie es das Gesetz von der Erhaltung der Kraft verlangt, mit einer Zersetzung der Muskelsubstanz verbunden ist; auch hatte er durch eine feine Methode bei der Contraktion eine Erhöhung der Temperatur nachgewiesen. Von diesen letzteren Erfahrungen ging Heidenhain bei seinen Versuchen aus, indem er sich die Aufgabe stellte, am Froschmuskel zu prüfen, wie sich die Wärmeentwicklung im thätigen Muskel bei verschiedener Arbeitsleistung gestaltet. Zur Messung der Wärme änderte er das Verfahren von Helmholtz ab, indem er sich einer den Bewegungen des Muskels genau folgenden Thermosäule bediente. Es haben sich dabei bemerkenswerthe Resultate ergeben, wenn auch Manches in dieser Richtung noch unaufgeklärt blieb. Er vermochte eine Wärmeentwicklung bei einer einzelnen Zuckung des Muskels darzuthun; mit der Hebung schwererer Gewichte oder mit der Arbeitsleistung des Muskels nahm auch die dabei entwickelte Wärme zu; wurde der belastete Muskel an der Contraktion durch Festhalten seiner Enden gehindert, dann wuchs mit der Spannung ebenfalls die Wärmeentwicklung; entsprechend diesem Verhalten der Wärme verhielt sich auch der Stoffumsatz im Muskel, gemessen durch die im Muskel während der Contraktion gebildete Säuremenge. Dadurch war erkannt worden, dass im Muskel nicht nur im Momente der Reizung, sondern während der ganzen Verkürzung, entsprechend der Spannung, Stoffe

Digitized by Google

zersetzt werden und lebendige Kraft entsteht, und ferner, dass, wenn der Muskel grössere Lasten zu heben hat, dann auch in Folge der grösseren Spannung regulatorisch die Kraftentwicklung entsprechend grösser wird.

Es gelang ihm, den Nerven mechanisch durch ein in häufige Schwingungen versetztes Hämmerchen zu reizen und den Muskel in Starrkrampf zu versetzen; der von ihm zu diesem Zwecke construirte Apparat, der Heidenhain'sche Tetanomotor, ist in allen physiologischen Laboratorien eingebürgert.

Er hat ferner erwiesen, dass die Muskeln im lebenden Körper nicht stetig in einem geringen Grade der Contraktion, in einem Tonus, sich befinden. Er war weiterhin an der Entwicklung des sogenannten Zuckungsgesetzes betheiligt; man hatte früher bei Einwirkung des constanten elektrischen Stromes auf die Muskelnerven die verschiedensten Erfolge erhalten und trotz der von vielen bedeutenden Forschern, wie Nobili, Volta, Galvani, Valli, Marianini, Pfaff etc., darauf verwendeten Mühe, die Ursache davon nicht entdecken können; man kennt jetzt die Faktoren, von denen der Erfolg abhängig ist, ganz genau, und Heidenhain hat einen derselben, nämlich die Stärke des angewendeten elektrischen Stromes, aufgefunden.

Bei Reizung einer vom Muskel entfernten Nervenstelle ist der Erfolg grösser als bei Reizung einer dem Muskel nahen, woraus man auf ein lawinenartiges Anschwellen der Erregung bei der Fortleitung im Nerven schloss; nach Heidenhain's Ermittlung handelt es sich aber hierbei nur um die erhöhte Erregbarkeit an der Schnittstelle des Nerven.

Die Gallensekretion beschäftigte ihn und seine Schüler zu wiederholten Malen. Es wurde der Druck festgestellt, unter welchem die Galle abgesondert wird, wobei sich, wie es schon Ludwig für die Speichelabsonderung beobachtet hatte, dieser Druck grösser erwies als der Blutdruck, so dass es sich hier nicht um eine einfache Filtration aus dem Blute handeln kann. Die Reizung des die Leber versorgenden Nervus vagus übte keinen Einfluss auf die Gallenabsonderung aus; auch änderte sich die Gallenmenge nicht, wenn nach Verletzung einer Stelle

Digitized by Google

des verlängerten Markes, bei dem sogenannten Zuckerstich, in Folge der Einwirkung auf die Leber Zucker im Harn auftritt.

Es reihten sich Untersuchungen über die Körpertemperatur an, wobei sich ergab, dass das Gehirn wärmer ist als selbst das Aortenblut.

Wichtige Beiträge hat er zur Lehre von der Innervation des Herzens und der Blutgefässe geliefert. Bei Reizung des Nervus vagus am Halse wird nicht nur die Zahl der Herzschläge geringer, sondern es nimmt auch die Stärke der Zusammenziehung des Herzens ab und die Erschlaffung wird grösser; die beiden Wirkungen, die geringere Zahl der Herzschläge und die geringere Stärke der Contraktion, sind unabhängig von einander, da bei gewissen Reizungsarten Schwächung ohne Verlangsamung erfolgen kann. Die Fasern, welche bei der Reizung den Stillstand des Herzens in Erschlaffung hervorrufen, werden dem Nervus vagus vom Nervus accessorius Willisii beigemischt.

Er stellte mit Ostroumoff fest, dass die in den peripheren Nervenstämmen verlaufenden, die Blutgefässe verengernden und erweiternden Nervenfasern eine verschiedene Erregbarkeit besitzen, indem die letzteren durch einzelne schwache Induktionsschläge, die ersteren durch starke gereizt werden. Von weiterem Interesse sind die zum Theil mit Grützner angestellten Versuche über die sogenannten Gefässreflexe: eine ganz leichte Reizung der sensiblen Nerven eines Hautbezirks, z. B. durch Streichen oder Anblasen, bewirkt eine Erhöhung des Blutdruckes in den Arterien durch die Zusammenziehung der Muskeln innerer Gefässe bei gleichzeitiger Erweiterung der äusseren Haut- und Muskelgefässe; durch diese verschieden starke Innervation der inneren und äusseren Gefässmuskeln wird die Blutvertheilung und die Wärme im Körper regulirt, indem in Folge der Erhöhung des Blutdruckes das Blut schneller und reichlicher durch die erweiterten Hautgefässe strömt und mehr Wärme nach Aussen unter Abnahme der Bluttemperatur abgegeben wird.

Unstreitig von der grössten Bedeutung und dem grössten

Digitized by Google

Umfang sind die Arbeiten Heidenhain's über das Zustandekommen der Sekretion der Drüsen. Die Verpflichtung, neben der Physiologie auch die Histologie zu lesen und die mikroskopischen Curse abzuhalten, waren wohl Veranlassung, den Beziehungen zwischen der feineren Struktur und der Funktion der Organe seine besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Er war, nach dem bahnbrechenden Vorgange von Ludwig, einer der Ersten, der die noch lebenden Zellen während ihrer Thätigkeit untersuchte, während die Anatomen früher zumeist nur die todten Gebilde besichtigt hatten im Glauben, dieselben verhielten sich in ihrer Form ebenso wie die lebendigen. Durch die mikroskopische Beobachtung der lebendigen Drüsenzellen hat Heidenhain das Verständniss der so geheimnissvollen Vorgänge bei der Absonderung des Sekretes um einen guten Schritt gefördert.

Bei den Speicheldrüsen unterscheidet man Eiweissdrüsen mit einem dünnflüssigen schleimfreien Sekret, und Schleimdrüsen mit einem zähen schleimhaltigen Sekret. Heidenhain zeigte, dass die Drüsenzellen der beiden Formen verschieden gestaltet sind und dass die ruhenden Zellen ganz anders beschaffen sind wie die thätigen, Sekret absondernden Zellen. — Die Unterkiefer-Speicheldrüse wird nach Ludwig's Versuchen von zwei die Absonderung bedingenden Nerven versorgt, die Reizung des einen Nerven, der Paukensaite des Nervus facialis, macht Absonderung eines dünnflüssigen Sekretes unter Erweiterung der Blutgefässe der Drüse, die Reizung des anderen Nerven, des Nervus sympathicus dagegen die eines zähen Sekretes unter Verengerung der Blutgefässe. Zugleich mit dieser verschiedenen chemischen Zusammensetzung des Sekretes erkannte Heidenhain eine Veränderung in der Form der Drüsenzellen. Auch ermittelte er, dass der grössere Blutzufluss bei der Erweiterung der Blutgefässe nicht die Ursache der Absonderung des Sekretes ist, wie man hätte glauben können, sondern eine Beeinflussung der Drüsenzellen, da nach Vergiftung der letzteren mit Atropin durch Reizung der Paukensaite keine Sekretion mehr eintritt, wohl aber noch die Er-

Digitized by Google

weiterung der Blutgefässe. — Bei längerer Reizung der sekretorischen Nerven nimmt der Gehalt des Sekretes an festen, namentlich an organischen Bestandtheilen ab, offenbar, weil die Erzeugung der organischen Bestandtheile aus anderen eine längere Zeit in Anspruch nimmt als die Ausscheidung der schon vorgebildeten Mineralbestandtheile.

In den Labdrüsen des Magens fand er ebenfalls zwei Arten von Zellen, die von ihm sogenannten Belagzellen und die Hauptzellen; in den Schleimdrüsen am Pförtner kommen nur die letzteren vor. In den Hauptzellen wird der eine bei der Magenverdauung wirkende Stoff, das Ferment oder das Pepsin, erzeugt, in den Belagzellen der andere, die freie Salzsäure. Die Zellen sind verschieden geformt im Hungerzustande und während der Sekretion und Verdauung.

Die Zellen der Bauchspeicheldrüse bestehen aus zwei ungleich gestalteten Hälften, einer Aussen- und einer Innenzone; bei der Sekretion nimmt die letztere durch Ausstossen des Sekretes an Volumen ab, während zugleich die erstere sich verbreitert durch Aufnahme von neuem Material zur Abgabe an die geschwundene Innenzone. Von Wichtigkeit ist sein Nachweis, dass das Eiweiss verdauende Ferment des Pankreassaftes, das Trypsin, nicht als solches schon in den Drüsenzellen vorkommt, sondern nur eine noch nicht wirksame Vorstufe desselben, das Zymogen, da sonst die Drüsenzelle durch das Ferment verdaut würde.

Endlich schlossen sich die glänzenden Untersuchungen über den Bau der Nieren und über die Theorie der Harnabsonderung an mit dem wichtigen Ergebniss, dass in den Zellen der Harnkanälchen die Ausscheidung der organischen Harnbestandtheile stattfindet, in den Malpighi'schen Bläschen der Rindensubstanz aber im Wesentlichen nur die Ausscheidung des Wassers des Harns. Nach Einspritzung der blauen Lösung von indigoschwefelsaurem Natrium in eine Vene des lebenden Thieres sieht man die blaue Färbung niemals in den Malpighi'schen Bläschen, sondern ausschliesslich in den Zellen der gewundenen Harnkanälchen; in gleicher Weise verhalten sich die

Digitized by Google

harnsauren Salze, die man, namentlich bei den reichlich Harnsäure absondernden Reptilien und Vögeln, krystallinisch in den Zellen der Harnkanälchen abgelagert findet. Die Wasserausscheidung in den Malpighi'schen Bläschen kann nach ihm nicht ausschliesslich durch Filtration durch den Blutdruck zu Stande kommen, denn reichliches Wassertrinken steigert die Harnausscheidung ohne Erhöhung des Blutdruckes, und ein kurz dauernder Verschluss der Nierenarterie bewirkt einen länger anwährenden Stillstand der Harnsekretion durch Schädigung der Epithelzellen der Malpighi'schen Bläschen.

Aus diesen seinen Beobachtungen zog Heidenhain den Schluss, dass die Sekretion der Drüsen nicht ein rein physikalischer Vorgang, bestehend in Filtration und Osmose, wäre, bei dem die Drüsenzellen als Filter nur passiv betheiligt sind, sondern dass dieselbe auf einer aktiven Thätigkeit der Drüsenzelle beruhe. Als man in den vierziger Jahren begann, die Lehren der Physik auf die Vorgänge im Thierkörper anzuwenden, da war es namentlich Carl Ludwig, der in jüngeren Jahren in seinem Lehrbuch der Physiologie darzuthun suchte, dass bei vielen Erscheinungen an der Organisation die Filtration und die Osmose wirksam sind. Diese Erklärungsversuche waren für die damalige Zeit von grösster Bedeutung, indem sie darthaten, dass die Lebenserscheinungen nicht durch die geheimnissvolle und unerforschbare Lebenskraft, sondern durch bekannte physikalische und chemische Vorgänge veranlasst sind. Es ist wohl richtig, dass man anfangs glaubte, dadurch weiter in der Erklärung der Sekretion vorgedrungen zu sein und die grössten Schwierigkeiten schon überwunden zu haben; jedoch hat man nie der lebenden Organisation gar keine Bedeutung dabei zugeschrieben, wie es jetzt nicht selten dargestellt wird, wenn man von einer früheren, rein mechanischen oder rein physikalischen Theorie Ludwigs spricht. Ludwig fand ja selbst den Absonderungsdruck der Drüsen grösser als den Blutdruck oder die Temperatur der thätigen Drüse höher wie des zugeführten arteriellen Blutes, und wenn er sah, dass die Absonderung des Sekrets nur unter dem

Digitized by Google

Einfluss der Nerven stattfindet, so konnte er doch nicht der Ansicht sein, die Drüse verhalte sich bei der Absonderung wie eine trockene todte Membran. Allerdings musste man immer mehr erkennen, dass die lebende Organisation für die physikalischen und chemischen Wirkungen gewisse Bedingungen stellt, durch welche die letzteren beeinflusst und eigenthümlich gestaltet werden; trotzdem müssen wir die physikalischen und die chemischen Kräfte der Filtration und Osmose als die Triebkräfte für die Sekretion ansehen; ist ja doch auch die jeweilige Beschaffenheit der todten Membran von entscheidendem Einfluss für das Resultat der Filtration und Osmose, ohne dass wir desshalb sagen, es fänden dabei keine physikalischen Prozesse statt. Heidenhain hat durch seine Untersuchungen viel dazu beigetragen, die Bedeutung der lebenden Drüsenzellen für die Sekretion zu erkennen, und er hat gezeigt, dass wir von der Erklärung dieser Erscheinungen weiter wie je entfernt sind. Wir müssen uns jedoch sorglich davor hüten, wieder in den glücklich besiegten, für die Forschung so gefährlichen Vitalismus zu verfallen; es muss vielmehr nach wie vor unser Bestreben sein, zu suchen, welche Bedingungen die Organisation stellt, dass die physikalischen und chemischen Kräfte so eigenthümliche Wirkungen haben. — Heidenhain hat seine durch 20 Jahre lang fortgesetzten Beobachtungen über die Drüsensekretion in L. Hermanns Handbuch der Physiologie zusammengestellt; er war mehr als irgend ein Anderer dazu befähiget und berufen für das grosse, von einer Anzahl von Physiologen bearbeitete Werk diese Lehre zu schreiben; er entledigte sich der schwierigen Aufgabe mit tiefem Verständniss und der ihm eigenen Gewissenhaftigkeit, so dass dieser Theil des verdienstlichen Werkes unstreitig einer der vollendetsten ist.

Eine weitere Reihe von Untersuchungen Heidenhains bezieht sich auf die Vorgänge der Resorption. Auch diese Aufnahme der verdauten Nahrungsstoffe aus dem Darm in die Säfte hat man vielfach als einfache physikalische Prozesse angesehen, die man durch osmotische Versuche, durch Trennung

Digitized by Google

zweier Stofflösungen durch eine todte Membran, leicht nachahmen könne. J. Bauer und ich haben schon vor 26 Jahren zuerst bewiesen, dass die Aufnahme von Stofflösungen aus einer Darmschlinge eines lebenden Thieres nicht durch reine Osmose wie bei einer todten Membran stattfinden könne; neben Anderem erschien am schlagensten die Resorption des Blutserums aus einer Schlinge, ohne dass die Hauptbedingung der Osmose, die Concentrationsdifferenz, gegeben ist. Niemand hat jedoch auf diese Versuche geachtet, da sie nicht in die Vorstellungen der damaligen Zeit passten; erst als Heidenhain ähnliche Widersprüche der Versuchsresultate mit den Gesetzen der Osmose fand, da gewann die Lehre Eingang, wenn man sich auch nicht erinnerte, wer sie zuerst aufgestellt hat. Ich halte den Namen „physiologische Triebkraft der lebenden Zellen des Darmepithels" als Ursache der Resorption, welche Heidenhain einführte, für einen nicht ganz glücklichen, weil er nur allzuleicht Missverständnissen bei den Jüngeren ausgesetzt ist, welche darunter eine einheitliche Kraft verstehen werden statt einer Summe von Vorgängen.

Die letzten grösseren Untersuchungen Heidenhains betreffen die Frage nach der Entstehung der Lymphe. Nach den Versuchen von Ludwig wird durch den Blutdruck plasmatische Flüssigkeit durch die Wandungen der Blutcapillaren in die Zwischenräume der Gewebe gepresst, von wo sie als Lymphe in die offenen Anfänge der Lymphgefässe übergeht. Heidenhain suchte dagegen darzuthun, dass es sich dabei nicht um eine einfache Filtration durch eine todte Membran handeln könne, sondern ebenfalls um eine Wirkung der lebenden Endothelzellen der Capillaren. Er hatte nämlich gefunden, dass die Menge der aus dem Milchbrustgang ausfliessenden Lymphe nicht proportional dem arteriellen Blutdruck ist; dann dass der Gehalt der Lymphe an gewissen gelösten Stoffen, z. B. an Traubenzucker grösser sein kann als der des Blutes; und drittens, dass es Stoffe gibt, wie z. B. Krebsmuskelextrakt, Blutegelextrakt, Pepton etc., welche ohne Aenderung des Blutdrucks die Lymphmenge sehr steigern, und er meinte, dass diese Stoffe

Digitized by Google

als Lymphagoga die Thätigkeit der Endothelzellen anregten. Es sind von Manchen auf Versuche gestützte Einwendungen dagegen erhoben worden, und es scheint mir, als ob Heidenhain hierin nicht ganz im Recht ist. Der Blutdruck ist die nächste Ursache und die Triebkraft für den Durchgang der plasmatischen Flüssigkeit durch die Capillargefässmembran; jedoch modificiren sicherlich die letzteren das Filtrat, sehen wir doch, dass bei der Filtration einer eiweiss- und salzhaltigen Flüssigkeit durch todte Membranen das Filtrat von anderer Zusammensetzung ist als die auf das Filter gegossene Flüssigkeit. Jedenfalls gebührt Heidenhain das Verdienst, die wichtige Frage wieder angeregt und zu ihrem Entscheid beigetragen zu haben.

Heidenhain hat auch die vielfach noch räthselhaften Erscheinungen der Hypnose, welche unter der Behandlung von Laien so häufig getrübt und falsch aufgefasst werden, wissenschaftlich zu erforschen und dem Verständniss näher zu bringen gesucht. Er gelangte dabei zu dem wichtigen Resultate, dass bei der Hypnose die Reflexerregbarkeit gesteigert ist in Folge des Ausfalls der hemmenden Wirkung der Grosshirnrinde oder des Willens; ferner, dass das Bewusstsein herabgesetzt ist, und zwar dadurch, dass die zur Herbeiführung der Hypnose angewendeten schwachen Sinnesreize die Thätigkeit der Grosshirnrindenzellen aufheben; in diesem Zustande führen unbewusste Sinneseindrücke zu unbewussten Reaktionen. Dem entsprechend gelang es ihm mit Bubnoff, beim Hunde durch schwache Reize der Grosshirnrinde viele Muskelbewegungen zu hemmen.

Heidenhain war ein nüchterner gewissenhafter Forscher von feiner Beobachtungsgabe, der es sich in unablässigem Streben angelegen sein liess, neue Thatsachen aufzufinden und daraus vorsichtig seine Schlüsse zu ziehen. Er ist dadurch zu einem der verdientesten und angesehensten Physiologen unserer Zeit geworden.

Digitized by Google

Rudolf Leuckart.

Der Nestor der deutschen Zoologen, Rudolf Leuckart, Professor der Zoologie an der Universität Leipzig, ist am 6. Februar 1898 in seinem 76. Lebensjahre aus dem Leben geschieden.

Mit ihm ist einer der grossen Männer dahin gegangen, welche der Zoologie, die früher im Wesentlichen nur in einer äusserlichen Beschreibung und Classifikation der Thiere bestand, neue Ziele gewiesen haben. Ueber ein halbes Jahrhundert wirkte er als ein in mehreren Stücken bahnbrechender, ganz hervorragender Forscher mit dem reichsten Erfolge.

Er war ein ächter Gelehrter: voller Begeisterung für seine Wissenschaft und von unermüdlicher Schaffensfreude.

Rudolf Leuckart wurde am 7. Oktober 1822 in der ehemaligen braunschweigischen Universitätsstadt Helmstedt geboren. Als Knabe erhielt er durch seinen Oheim Friedrich Sigismund Leuckart, welcher Professor der Zoologie an der Universität in Freiburg im Breisgau war, die ersten Anregungen für die Naturwissenschaft und die Medizin. Er studirte an der altberühmten Universität Göttingen und zeichnete sich noch als ganz junger Student durch einige selbständige Arbeiten, darunter eine preisgekrönte, aus. Er schloss sich besonders an den Physiologen Rudolf Wagner an, der sich durch seine mikroskopischen Beobachtungen und deren Anwendung auf die physiologischen Vorgänge einen bedeutenden Namen gemacht hat und ein höchst anregender Lehrer war; ihm verdankte Leuckart die Anleitung zur mikroskopischen Untersuchung der thierischen Gebilde sowie seine auf die Lebensweise der Thiere gerichtete Auffassung. Wagner erkannte den Werth des strebsamen Jünglings; er machte ihn zu seinem Assistenten am physiologischen Institute und betraute ihn zugleich mit der Ausarbeitung seines Lehrbuchs der Zootomie. Im Jahre 1847 fand seine Habilitation als Privatdozent für Zoologie und Physiologie statt; bald wurde er als ausserordentlicher Professor der Zoologie nach der damals durch Liebig, Bischoff, Buff, Kopp und Andere in hohem An-

Digitized by Google

sehen stehenden Universität Giessen gerufen, woselbst er 1855 zum ordentlichen Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie vorrückte. Im Jahre 1870 erfolgte der ehrenvolle Ruf als Vertreter der Zoologie und Zootomie an die Universität Leipzig, an welcher er bis an sein Lebensende als einer der beliebtesten und ausgezeichnetsten Lehrer und als das Haupt einer grossen Schule höchst erspriesslich thätig war.

Durch seine gewaltige Arbeit hat er, wie vorher schon erwähnt, wesentlich dazu beigetragen, der Forschung in der Zoologie eine neue fruchtbare Richtung zu geben; Joh. Müller, Rudolf Wagner und Andere hatten auf die Bedeutung der allgemeinen Formverhältnisse der Thiere, ihres Lebens, ihrer Entwicklung, der biologischen Beziehung der einzelnen Classen derselben für die Erkenntniss der Thierwelt aufmerksam gemacht und so gegenüber der Systematik die jetzige vergleichend-morphologische Betrachtungsweise angebahnt. Diesen Weg betrat Leuckart; er erkannte alsbald klar, dass vor Allem die niederen Formen der wirbellosen Thiere über jene Verhältnisse den besten Aufschluss geben, und so widmete er der Durchforschung der niederen Thiere vorzugsweise seine Thätigkeit; auf diesem Gebiete liegen auch seine grössten Verdienste. Dabei verwendete er als einer der ersten äusserst geschickt den Versuch am Thier, um über die Entwicklung gewisser Thierformen näheren Aufschluss zu erhalten; auch muss erwähnt werden, dass er sich die Methoden und Hilfsmittel zu diesen Untersuchungen zum grossen Theil erst selbst schaffen musste. Die Wissenschaft verdankt seiner scharfsinnigen Beobachtung eine Menge neuer Thatsachen und Erkenntnisse über das Leben, die Entwicklung, Verwandlung und feinere Struktur vieler niederen Thiere.

Es können hier von den in zahlreichen Monographien, sowie in akademischen und periodischen Schriften niedergelegten Arbeiten nur die bedeutungsvollsten hervorgehoben werden, um die Art ihres Autors zu charakterisiren.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen waren die mit Frey herausgegebenen „Beiträge zur Kenntniss wirbelloser Thiere".

Digitized by Google

An diese Arbeit schloss sich eine weitere an über die Morphologie und die Verwandtschaftsverhältnisse niederer Thiere. Mit dieser für die Systematik und die Morphologie bedeutungsvollen Leistung stellte sich der junge 25jährige Privatdozent in die erste Reihe der Zoologen. Cuvier hatte in dem von ihm aufgestellten Thierkreise der Radiata die Stachelhäuter, die Quallen und die Polypen zusammengefasst; in dem Streben, die verschiedenen Bildungen nach ihrem inneren Charakter zu beurtheilen, war es Leuckart aufgefallen, dass unter den Radiaten Thiergruppen von verschiedenem Bau sich finden; er stellte in Folge davon einen besonderen Typus der Pflanzenthiere unter dem Namen der Coelenteraten, welcher die Cuvier'schen Classen der Polypen und der Scheibenquallen umfasst, zusammen und charakterisirte ihn so scharf und bestimmmt, dass diese Coelenterarten gegenwärtig von allen Zoologen als eine natürlich abgegrenzte Gruppe dem Thiersysteme einverleibt wurden.

Andere sinnreiche Auffassungen und Deutungen von verschiedenen bisher unerkannt gebliebenen verwickelten Organisations-Verhältnissen bei den Siphonophoren oder Schwimmpolypen, welche er bei seinem wiederholten längeren Aufenthalte an den Meeresküsten zu studiren Gelegenheit hatte, gaben ihm in der Schrift über den Polymorphismus der Individuen oder die Erscheinungen der Arbeitstheilung in der Natur (1851), sowie in den zoologischen Untersuchungen (3 Hefte, 1853—54) Veranlassung, diese höchst complizirten Thierorganismen als Animalia composita mit Arbeitstheilung aufzufassen und für diese eigenthümliche Lebensthätigkeit solcher höchst zusammengesetzter, früher für Einzelwesen gehaltener Thierkolonien den Namen Polymorphismus vorzuschlagen, welche Bezeichnung mit ihrer eigenthümlichen Bedeutung allgemein angenommen worden ist.

Es folgten Untersuchungen über den feineren Bau der Schalenhaut der Insekteneier und ihrer Mikropyle, durch welche die Samenfäden in das Innere des Eies eindringen. Durch seine Studien über den Generationswechsel und über die Ent-

Digitized by Google

wicklung des Eies ohne Befruchtung, die Parthenogenesis, bei den Insekten, besonders den Bienen, hat er sich mit grossem Erfolge an der Erweiterung unserer Kenntnisse über diese merkwürdigen Vorgänge betheiligt. Auch hat er über die Fortpflanzung und Entwicklung der Pupiparen, die zu den Zweiflüglern gehörigen Lausfliegen, interessante Untersuchungen angestellt.

Von grösstem Einflusse waren Leuckart's Resultate, welche er durch äusserst mühsame und mit seltener Ausdauer durchgeführte Beobachtungen und Experimente über die merkwürdigen Wanderungen und damit verbundenen Metamorphosen der verschiedenen Schmarotzerthiere erhalten hat. Es ist dies sein fruchtbarstes und eigenstes Arbeitsgebiet gewesen, welches, bis dahin noch zum grossen Theil in Dunkelheit gehüllt, von ihm in bewundernswerther Weise aufgehellt worden ist; sein Name ist dadurch in den weitesten Kreisen bekannt geworden.

In der Abhandlung über die Blasenbandwürmer und ihre Entwicklung thut er dar, wie die durch die Entleerungen der Träger auf Düngerhaufen oder auf Pflanzen oder in Wasser gelangten Eier mit der Nahrung in den Darmkanal von Thieren kommen, von wo die daraus entstandenen Embryonen durch die Darmwand in die Blutgefässe und die verschiedenen Organe wandern, in denen sie zu Blasen, Finnen genannt, auswachsen, welche ein nothwendiges Entwicklungsstadium darstellen und, indem sie verzehrt werden, in den Darm eines neuen Thieres gerathen, um daselbst erst in den Zustand des geschlechtsreifen Bandwurms überzugehen. — Die berühmten Untersuchungen über Trichina spiralis ergaben, dass die im Darm des Menschen und vieler, vornehmlich freischfressender Säugethiere befindliche Brut ebenfalls die Darmwandung derselben durchsetzt und in die Muskeln einwandert, wo sie zu spiralig zusammengerollten Würmchen auswachsen; mit dem Fleische kommen diese Würmchen in den Darm eines anderen Warmblüters, werden dorten zu Geschlechtstrichinen, welche sich begatten und neue Brut erzeugen.

Ebenso verdankt man Leuckart die Kenntniss von dem Bau, der Entwicklungsgeschichte und der Metamorphose der

Digitized by Google

Pentostomen oder Zungenwürmer, sowie der Entwickelungsgeschichte des Leberegels. In seinen „neuen Beiträgen zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden" berichtet er über eine Anzahl höchst sonderbarer zu den Fadenwürmern gehörigen Parasiten niederer Thiere.

Sein Lehr- und Handbuch über die Parasiten des Menschen und die von ihnen herrührenden Krankheiten, sowie seine allgemeine Naturgeschichte der Parasiten sind als Hauptwerke in dieser Richtung zu betrachten. Es haben gerade diese hierbei gemachten Entdeckungen nicht allein die zoologische Wissenschaft im höchsten Grade gefördert, sondern es haben dieselben auch die für die praktische Medizin so wichtige Lehre von den Parasiten gänzlich umgestaltet und eine bisher ganz dunkel gebliebene Seite der Gesundheitslehre in das klarste Licht gesetzt.

Ausserdem verdient noch erwähnt zu werden: die mit C. Bergmann (1852) bearbeitete anatomisch-physiologische Uebersicht des Thierreiches, ein Werk, welchem bis heute keines seiner Art folgte; dann der Artikel „Zeugung" in Rudolf Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, ein Muster klarer, auf eine Fülle von Beobachtungen gestützter Darstellung; ferner die für das Handbuch der gesammten Augenheilkunde von Graefe und Sämisch gelieferte vortreffliche Darstellung der vergleichenden Anatomie des Auges.

Grossen Nutzen haben die von 1848 bis 1879 für das Archiv der Naturgeschichte von ihm bearbeiteten Jahresberichte über die wissenschaftlichen Leistungen in der Naturgeschichte der niederen Thiere gestiftet; ebenso die mit seinem Schüler Chun herausgegebene Bibliotheca zoologica.

Die Deutsche zoologische Gesellschaft verliert in ihm ihr einziges Ehrenmitglied und ihren ersten Vorsitzenden, der wohl am meisten zum Emporblühen dieser angesehenen Vereinigung beigetragen hat.

Der so überaus verdiente Forscher mit seinem lebhaften Geist, seiner anregenden lebensvollen Art, seinem schlichten freundlichen Wesen wird in der Wissenschaft, sowie in der Erinnerung bei seinen Freunden und Schülern fortleben.

Digitized by Google

Johann Japetus Smith Steenstrup.[1])

In Kopenhagen starb am 20. Juni 1897 im hohen Alter von 84 Jahren der berühmte Naturforscher Johann Japetus Steenstrup, weiland Professor der Zoologie an der Universität und Direktor des naturhistorischen Museums. Er war mit Recht einer der angesehensten Gelehrten Dänemarks, der auf mehreren Gebieten der Naturwissenschaft Hervorragendes geleistet hat.

Er wurde am 8. März 1813 auf dem Pfarrhofe in Vang in Nord-Jütland geboren. An der Kopenhagener Universität bildete er sich in Philosophie, Naturwissenschaft und Medizin aus. Schon während seiner Studienzeit lenkte er durch seine Strebsamkeit und seine Kenntnisse die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf sich, so dass er noch als Studirender den bekannten Professor Forchhammer auf einer geognostischen Untersuchungsreise nach Börnholm begleiten durfte; dann erforschte er (1838) auf Veranlassung der Rentkammer die Torfmoore in Nord-Jütland und bereiste 1839 Island zu naturwissenschaftlichen und geognostischen Zwecken. Nach Beendigung seiner Studien erhielt er alsbald die Stelle eines Lectors für Botanik und Mineralogie an der Akademie zu Soroe; in Folge seiner hervorragenden Arbeit über den Generationswechsel wurde er (1845) als ausserordentlicher Professor der Zoologie an die Universität nach Kopenhagen berufen; 1848 wurde er zum Direktor des naturhistorischen Museums und 1850 zum ordentlichen Professor in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät ernannt; von 1865—1878 war er Sekretär der kgl. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften. Seit 1885 hat er sich von seinen Aemtern zurückgezogen.

Steenstrup war ein ausgezeichneter Beobachter und Erforscher der uns umgebenden Natur. Seine Thätigkeit war eine höchst vielseitige; denn er hat überaus zahlreiche Arbeiten

---

[1]) Siehe Leopoldina 1897, Nr. 8, S. 114, und Verhandlungen der anthropol. Gesellschaft zu Berlin 1897, S. 311.

Digitized by Google

auf den Gebieten der Zoologie, vergleichenden Anatomie, Mineralogie, Botanik, Geologie, Paläontologie, Urgeschichte und Archäologie ausgeführt.

Sein erstes grösseres Werk, das Akademie-Programm vom Jahre 1842 über den Generationswechsel, war geradezu bahnbrechend und begründete seinen Ruhm; es blieb die Aufstellung dieses merkwürdigen Entwickelungsgesetzes auch seine bedeutendste Leistung. Man versteht bekanntlich darunter den gesetzmässigen Wechsel einer geschlechtlich entwickelten Generation mit einer oder mehreren ungeschlechtlich sich fortpflanzenden Generationen. Der Dichter Adalbert v. Chamisso hatte zuerst einen Vorgang der Art bei den Salpen gefunden; derselbe blieb aber vereinzelt und länger als zwei Dezennien unbeachtet, bis ihn Steenstrup an einer Reihe von niederen Thieren, an Medusen, Trematoden und Aphiden erkannte und einheitlich erfasste. Die Geschlechtsthiere erzeugen dabei Nachkommen, welche zeitlebens von ihren Eltern verschieden bleiben, jedoch ebenfalls fortpflanzungsfähig sind, indem sie auf ungeschlechtlichem Wege als sogenannte Ammen durch Knospung oder Keimbildung eine Brut hervorbringen, welche entweder zu der Form und Organisation der Geschlechtsthiere zurückkehrt oder sich abermals ungeschlechtlich vermehrt und erst in ihren Nachkommen wieder zu den Geschlechtsthieren führt.

Ausserdem hat er noch auf verschiedenen anderen Zweigen der Zoologie mit Erfolg gearbeitet. Hierher gehören: weitere Untersuchungen über die Entwickelung mehrerer Formen niederer Thiere, die Untersuchungen und Betrachtungen über den Hermaphroditismus, dann die Beobachtungen über den Hectocotylus bei Cephalopoden, worunter man einen mit Spermatophoren gefüllten Arm versteht, der sich vom männlichen Leibe ganz abtrennt und den Samen in die Mantelhöhle des Weibchens überträgt, und ferner den Nachweis, dass die Augen bei den Flachfischen ursprünglich symmetrisch angebracht sind und erst bei der weiteren Entwickelung ihren Platz verändern.

In späterer Zeit nahmen vorzüglich Aufgaben der prähistorischen Archäologie und der Anthropologie sein Interesse

Digitized by Google

in Anspruch; er war einer der Ersten, der auf dieses vorher häufig mehr dilettantenhaft betriebene Gebiet die strenge Methode der Naturwissenschaft anwandte. Er hat in dieser Weise die dänischen Kjokkenmöddinger oder Küchenabfälle erforscht, besonders am Kattegat befindliche Hügel aus Muschelschalen und Thierknochen, welche die Ueberreste der Mahlzeiten der Menschen aus der Steinzeit darstellen. Er hat die Waldmoore von Vidnesdam und Lillemose im nördlichen Seeland ausgegraben und genau geologisch-geognostisch untersucht, und dadurch deren Bedeutung für die Entwickelung der ältesten prähistorischen Flora und Fauna Dänemarks, sowie für das Erscheinen des Menschen dargelegt. Ueberall, wo es galt, die Fragen nach dem ältesten Vorkommen menschlicher Thätigkeit zu entscheiden, war er persönlich betheiligt; so bei der archäologischen Untersuchung der nordischen Brakteaten, alter aus dem 12.—17. Jahrhundert stammender, nur auf der einen Seite geprägter Münzen oder bei der Prüfung der Mammuthjäger-Station bei Předmost in Mähren, welche er noch in hohem Alter (1888) aufsuchte. Die reichhaltigen Sammlungen diluvialer Thierreste im Kopenhagener Museum bilden die Grundlage für eine genauere Bestimmung der vorhistorischen Thierreste. Durch seine Forschungen und dadurch, dass er nicht müde wurde, die Arbeiten Anderer auf diesem Gebiete mit Rath und That zu unterstützen, hat er einen grossen Einfluss auf die Entwickelung dieses jungen Wissenszweiges ausgeübt.

Julius Sachs.[1])

Mit dem am 29. Mai 1897 in Würzburg im 65. Lebensjahre verstorbenen Botaniker Julius Sachs ist einer der verdientesten Naturforscher dahingegangen. Man kann wohl sagen, dass er der Begründer der experimentellen Pflanzenphysiologie

[1]) Mit Benützung des Nekrologs von Karl Göbel in der Flora, Ergänzungsband 84 zum Jahrgang 1897, S. 101; dann in Leopoldina 1897, Nr. 6, S. 94, und von Hauptfleisch in Würzburg in der Münchener med. Wochenschrift 1897, Nr. 26, S. 709.

Digitized by Google

und längere Zeit der sichere Führer auf diesem schwierigen Gebiete war. In der That, nach einigen bedeutenden Anfängen, welche die Experimental-Physiologie der Gewächse im vorigen Jahrhundert gemacht hatte, war dieselbe fast vollständig zuerst durch die Systematik, dann durch die Morphologie und seit den fünfziger Jahren durch die mikroskopischen Arbeiten der grossen Botaniker Mohl, Hofmeister, Nägeli und De Bary verdrängt worden. Da war es nun vor Allen Sachs, welcher die chemischen Beobachtungen und das physiologische Experiment wieder aufnahm und mit grösstem Erfolge weiter führte. So kam es, dass man in der Pflanzenphysiologie erst mit der Anwendung der neuen durch die Physik und die Chemie geschenkten Hilfsmittel anfing, als in der Thierphysiologie diese Mittel schon viele Früchte gezeitigt hatten. Selbst Liebig ist mit der Anwendung der Chemie auf die stofflichen Vorgänge im Thierkörper tiefer eingedrungen als in die gleichen Vorgänge in den Pflanzen, wo er vorzüglich nur den Kreislauf des Stoffes zwischen den Thieren und den Pflanzen klarer legte und die Bedeutung der Mineralbestandtheile erkannte. Es darf uns dies nicht Wunder nehmen, denn diese Verhältnisse sind in den Pflanzen, bei denen von den einfachsten Nahrungsstoffen aus ein allmählicher Aufbau zu den complizirtesten Kohlenstoff-Verbindungen durch viele Zwischenglieder hindurch stattfindet, ungleich schwieriger zu erkennen wie bei dem höheren Thier, wo so Vieles leicht zugänglich ist. Denn man vermag bei dem letzteren die Vorgänge an den einzelnen Organen zu verfolgen; wie wenig wüssten wir z. B. über die Verdauung der Nahrungsstoffe, über die Zersetzungen der Stoffe im Thierkörper und deren Produkte, wenn wir nur an den einfachsten Thierformen unsere Beobachtungen machen könnten. Es ist Sachs geglückt, diese grossen Schwierigkeiten zum Theil zu überwinden; er hat den Weg gezeigt, wie man an den Pflanzen Aufschlüsse hierüber zu erhalten vermag und dabei viele neue Thatsachen aufgefunden und fruchtbare Ideen zu weiterer Forschung angegeben.

Sachs wurde am 2. Oktober 1832 in Breslau geboren,

Digitized by Google

wo sein Vater Graveur war, von dem er das künstlerische Talent ererbte und das Zeichnen lernte. Er besuchte das Gymnasium zu Breslau, musste aber daselbe verlassen, da seine Eltern früh starben und er nicht die Mittel zum weiteren Studium besass; so war er von seinem 15. Lebensjahre an wesentlich auf sich allein angewiesen, so dass es ihm recht schwer wurde, sich den Lebensunterhalt zu verschaffen. Aber gerade dies war es, was ihn zur Arbeit anspornte. Schon am Gymnasium beschäftigte er sich mit den beschreibenden Naturwissenschaften, er zerlegte Thiere und sammelte eifrig Pflanzen, die er mit Hilfe der Flora von Scholz bestimmte. Es war ein glücklicher Zufall, dass er damals mit den Söhnen des Physiologen Purkynè bekannt geworden war; durch diese hatte der letztere von der Neigung des Jünglings zu der Naturwissenschaft sowie von seinem Zeichentalent gehört und bot ihm bei seiner Berufung nach Prag an, sein Privatassistent zu werden, wodurch Sachs wenigstens vor der äussersten Noth bewahrt war. Er behielt diese Stelle, in der er fast nur zu zeichnen hatte, sechs Jahre lang; der Umgang mit Purkynè hat jedoch gewiss auch belehrend und anregend auf ihn eingewirkt. Dieser hervorragende Physiologe hat sich um die mikroskopische Anatomie und um die Physiologie des Auges grosse Verdienste erworben: er war der Entdecker des Keimbläschens, der Leberzellen, der Schweissdrüsen und der Flimmerbewegung und er beobachtete die drei Reflexbilder am Auge, das sogenannte Accommodationsphosphen, mehrere subjektive Gesichtsempfindungen, die Schattenfigur der Netzhautgefässe, das in den Chorioidealgefässen strömende Blut bei Druck auf das Auge, sowie die Erscheinungen bei elektrischer Reizung der Netzhaut. Es existirt von ihm auch eine botanische Abhandlung (de cellulis antherarum fibrosis nec non de granorum pollinarium formis commentatio phytotomica, Breslau 1830); und er war der Erste, der ein physiologisches Laboratorium einrichtete. Sachs hatte es durch eisernen Fleiss neben seiner Beschäftigung bei Purkynè ermöglicht, die Maturitätsprüfung nachzuholen und an die Universität überzutreten. Er hörte

Digitized by Google

zwar daselbst Vorlesungen über Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie, aber das Meiste hat er doch durch eigenes Studium gelernt. Er betrieb für sich die Zoologie und die Botanik; nachdem er sich mit dem Schleiden'schen Lehrbuch der Botanik bekannt gemacht und sich in Herstellung mikroskopischer Präparate geübt hatte, machte er seine ersten wissenschaftlichen Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte von Pilzen. Er habilitirte sich dann nach Besiegung mannigfacher Hindernisse in Prag als Privatdozent für Pflanzenphysiologie. Und nun begann seine unermüdliche und fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit; es war ein unablässiges, rastloses Streben nach Erkenntniss, das sein Wesen charakterisirte; er erzählte selbst, er habe während 20 Jahren täglich 14—15 Stunden geforscht und gedacht. In seiner Wohnung stellte er Versuche über Verdunstungsphänomene und Wasserbewegung in Landpflanzen an, dann seine berühmt gewordenen mikroskopischen Beobachtungen an den Keimpflanzen, durch die er die Umgestaltung der in den Kotyledonen abgelagerten Stoffe erkannte.

Aber in Prag konnte er nicht bleiben; Purkynè hatte sich auffallender Weise der czechischen Bewegung mit Fanatismus angeschlossen und diese liess den deutsch Fühlenden nicht aufkommen. Da erbat sich der verdiente Vorstand der sächsischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie in Tharandt, der Chemiker Stöckhardt, von Sachs einen Bericht über den Nutzen der Pflanzenphysiologie für die Landwirthschaft, in Folge dessen er als physiologischer Assistent an dieser Akademie angestellt wurde, als welcher er auch öffentliche Vorträge in landwirthschaftlichen Versammlungen zu halten hatte. Von da wurde er an die landwirthschaftliche Akademie in Poppelsdorf bei Bonn als Lehrer der Botanik, Zoologie und Mineralogie berufen, an der er dann bald die Professur für Pflanzenphysiologie erhielt.

In den sechs Jahren seines Bonner Aufenthaltes hatte er sich durch seine Arbeiten schon so bekannt gemacht, dass er als Nachfolger des nach Strassburg berufenen De Bary die

Digitized by Google

Professur der Botanik an der Universität in Freiburg erhielt und dann nach drei Semestern die in Würzburg; er blieb der letzteren Universität trotz vieler verlockender Berufungen nach Jena, Heidelberg, Bonn, Wien, Berlin und München treu und war einer ihrer ersten Zierden.

Er hat daselbst eine grosse Schule für experimental-physiologische Arbeiten gebildet, aus der die bedeutendsten der jüngeren Botaniker hervorgingen; auch bei den Vorlesungen hat er durch seinen ausserordentlich klaren und durch einfachste Experimente erläuterten Vortrag allgemeines Interesse für die Botanik zu erwecken verstanden.

Bei der Würdigung der wissenschaftlichen Thätigkeit von Sachs muss bedacht werden, dass es vor ihm eine eigentliche Pflanzenphysiologie kaum gab; die Untersuchungen von Ingenhouss, Saussure, Liebig, Boussingault etc. lieferten nur die ersten Vorstellungen über die stofflichen Vorgänge bei der Ernährung der Pflanzen; Sachs musste, wie vorher schon gesagt worden ist, vielfach erst suchen, wie man den Vorgängen in der Pflanze durch das Experiment beikommen kann, und er musste die Apparate zur Verfolgung derselben ersinnen, wozu er ein ganz besonderes Geschick besass.

Bei seinen ersten vorher erwähnten Untersuchungen über die in den Keimpflanzen abgelagerten Stoffe erkannte er, dass das Stärkemehl nicht nur eine sekundäre Einlagerung im Chlorophyll ist, sondern dass es das erste sichtbare Produkt des unter dem Einflusse des Lichtes und der Mitwirkung des Chlorophylls stattfindenden Aufbaues aus den einfachsten chemischen Verbindungen darstellt; es wird von hier aus zu den wachsenden Knospentheilen und zu den Reserve aufspeichernden Geweben geführt. Er hat sich später nochmals mit der Entstehung des Stärkemehls beschäftigt und eine einfache Methode zur quantitativen Bestimmung desselben mittelst der Jodprobe angegeben.

Als Frucht seiner Thätigkeit an der landwirthschaftlichen Akademie war es ihm gelungen, Landpflanzen ohne Mithilfe der Erde in wässerigen Nährlösungen zu kultiviren und keim-

Digitized by Google

fähige Samen daraus zu erhalten. Obwohl anfangs die Bedeutung dieser Versuche nicht genügend erkannt wurde und namentlich Knop sie in ungerechter Weise angriff, ja selbst Nägeli sie hämischer Weise als „agrikultur-chemische" bezeichnete, so haben sie doch wichtige Aufschlüsse über die Ernährung der Pflanzen gebracht: sie zeigten namentlich, welche Mineralbestandtheile zum Gedeihen der Pflanzen nothwendig sind und dass ohne dieselben kein Aufbau der complizirten Kohlenstoff-Verbindungen stattfindet.

Daran reihten sich seine eingehenden Versuche über die Bedeutung des Chlorophylls für die synthetischen Prozesse in der Pflanze an. Dieser grüne Farbstoff ist nach ihm die Stätte, wo die Abscheidung des Sauerstoffs aus dem aufgenommenen Wasser und der Kohlensäure und die Bildung höherer sauerstoffärmerer Kohlenstoff-Verbindungen stattfindet. Dabei wurde auch die seit Liebig's verwerfender Meinung nur wenig beachtete Bedeutung der Sauerstoff-Athmung der Pflanze klar gestellt, dass dieses Gas für das Leben der Pflanze ebenso nothwendig ist wie für das des Thieres, indem es Zersetzungen unter Bildung von Kohlensäure und Wasser bedingt und kinetische Energie (Wärmebewegung) für die Vorgänge in der Pflanze liefert.

Weitere Untersuchungen brachten das erste Verständniss der Thätigkeit und der Funktion der Wurzeln, deren Ausgang die Beobachtung war, dass polirte Marmorplatten durch die Wurzeln corrodirt werden.

Von grundlegender Bedeutung sind seine mikroskopischen und mikrochemischen Arbeiten über die Wanderungen, die chemischen Veränderungen und den Verbrauch der Reservestoffe bei dem Wachsthum der Organe.

Sachs wandte sich darnach anderen Aufgaben zu: dem Einflusse der Temperatur und des Lichtes auf das Wachsthum der Pflanze.

Er beschäftigte sich viel mit der Untersuchung der drei sogenannten Cardinalpunkte der Temperatur, dem Minimum, Optimum und Maximum derselben, und stellte fest, nach welchen Gesetzen die Keimung von der Temperatur abhängig ist, dann

Digitized by Google

dass eine bestimmte Temperatur für das Ergrünen höherer Pflanzen nothwendig ist, und dass es für reizbare Organe eine vorübergehende Kälte- und Wärmestarre gibt.

Von besonderer Tragweite sind die eingehenden Untersuchungen über die Wirkung des Lichtes auf die Pflanze: auf die Neubildung und die Entfaltung der Zellen und verschiedener Organe. Es wurde dargethan, dass das Licht die Neubildung der Wurzeln direkt begünstigen kann, dass es auf die Blüthenbildung unter Vermittlung der Laubblätter von Einfluss ist, indem in den letzteren im Lichte die Stoffe gebildet werden, welche zur Entstehung der Blüthe nöthig sind. Die belaubten Pflanzen fahren nach ihm im Finstern fort, Stammtheile und Blätter zu produziren, aber in abnormer als Vergeilung oder Etiolement bezeichneter Gestaltung. — Bei dem Studium der Wirkung des verschiedenfarbigen Lichtes zeigte es sich, dass nicht, wie man hätte denken sollen, die chemisch wirksamen violetten Strahlen, sondern die rothgelben es sind, welche vorzüglich das Ergrünen und die Zerlegung der Kohlensäure hervorrufen, dass dagegen die blauen und die sichtbaren violetten Strahlen als Bewegungsreize wirken und die ultraviolletten in den grünen Blättern die blüthenbildenden Stoffe erzeugen.

Eine Anzahl von Abhandlungen beschäftigen sich mit den Ursachen der Saftbewegung in den Pflanzen, die er im Wesentlichen von Imbibitionsvorgängen ableitete. Seine Anschauungen in dieser Richtung erlitten zwar manche Anfechtung, aber er hat doch dabei jedenfalls werthvolle Thatsachen gefunden, indem er die Bedingungen der Transspiration und ihre Bedeutung für das Leben der Pflanzen feststellte, dann den Einfluss der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Bodens auf dieselbe, sowie die hemmende Wirkung von Salzlösungen und der Kälte. Zur Messung der Geschwindigkeit des Transspirationsstromes bediente er sich der Lithiummethode, bei welcher die Pflanzen mit Lithium begossen werden und dasselbe dann spectroscopisch in den einzelnen Pflanzentheilen aufgesucht wird.

Digitized by Google

Zur feineren Erkennung der Wachsthums-Erscheinungen und der Reizbewegungen wendete er sein Auxanometer an, das diese Bewegungen auf eine berusste Fläche selbst registrirt. Er untersuchte damit die grossen Wachsthumsperioden und deren Faktoren, namentlich auch der Wurzeln im Boden.

Viel beschäftigten ihn die Tropismen. Er verfolgte die Erscheinungen des sogenannten Heliotropismus und des Geotropismus, d. i. die Richtungsbewegungen oder Krümmungsbewegungen der Pflanze, welche durch einseitige Wirkung des Lichtes oder der Schwerkraft hervorgerufen werden, die er mit einem besonderen Drehapparate, dem Klinostaten, aufzeichnen lehrte. Er erkannte ferner als Reiz auf die Wurzel, durch den eine Krümmungsbewegung hervorgebracht wird, eine Differenz im Wassergehalt der Luft (Hydrotropismus); diese psychrometrischen Bewegungen studirte er mittelst eines allgemein dazu angewendeten einfachen Apparates, den er das hängende Sieb nannte.

Es folgten Abhandlungen über die Beziehungen zwischen Zellbildung und Wachsthum, über die Beziehungen der Zellenanordnung zum Wachsthum, wobei ihm das letztere das bestimmende für das erstere zu sein scheint; über den Zusammenhang zwischen Struktur und Richtung der Organe (orthotrope und plagiotrope Pflanzentheile).

In den letzten Jahren liebte er es, in den physiologischen Notizen aus dem Schatze seiner Erfahrungen weitere Schlüsse zu ziehen und tiefere Vorstellungen über das Pflanzenleben zu gewinnen; dabei wurde er auch zu dem Begriffe der Energide geführt, den er in Folge der völligen Verschiebung des Begriffes der Zelle aufstellte.

Es mag noch bemerkt werden, dass Sachs, wie die meisten hervorragenden Biologen, den Darwinismus nicht als richtig anzuerkennen vermochte. Er war wohl ein Anhänger der Descendenzlehre, aber die Erklärung der alleinigen Entwicklung durch Anpassung an das Zweckmässige im Sinne Darwins hielt er für verfehlt.

Digitized by Google

Aber nicht nur durch die Auffindung wichtiger Thatsachen und fruchtbarer Gedanken hat Sachs die Botanik bereichert, sondern auch durch seine klassischen Werke der Botanik. In denselben ist das pflanzen-physiologische Wissen sorgfältigst gesammelt, unparteiisch ausgewählt und wahrhaft meisterhaft dargestellt; sie geben ein klares Bild der Entwickelung der Pflanzenphysiologie seit dem Jahre 1865.

In Folge seiner Vorträge in landwirthschaftlichen Versammlungen fühlte er, da er Alles ernst nahm, das Bedürfniss, die früheren Arbeiten in der Pflanzenphysiologie genauer kennen zu lernen; er ersah dabei, dass es an einem Handbuche der physiologischen Botanik fehlt, in dem die vielen zerstreuten Erfahrungen zusammengefasst sind. Er schlug daher Hofmeister vor, mit ihm ein solches Werk herauszugeben, in dem er (1865) die Experimental-Physiologie der Pflanze zu bearbeiten hatte.

Diesem werthvollen, mit grossem Beifall aufgenommenen Werke folgte (1868) das vortreffliche Lehrbuch der Botanik mit den von ihm selbst gezeichneten unübertroffenen Abbildungen. Die Schleiden'schen Grundzüge der Botanik waren veraltet und es war ein Buch nothwendig, aus dem der Studirende und der Forscher nicht nur das botanische Wissen entnehmen konnte, sondern in dem er auch die Probleme und Ideen der Forschung fand. Er hat durch dieses in 4 Auflagen erschienene Lehrbuch einen grossen Einfluss auf die Ausbreitung des botanischen Wissens ausgeübt und darin die Lehren anderer Forscher, z. B. von Nägeli und Hofmeister für weitere Kreise verständlich gemacht.

Aus dem Lehrbuch entwickelten sich später (1882) die Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, die wegen ihrer allgemein verständlichen fesselnden Darstellung der interessanten Vorgänge in der Pflanze von den Studirenden und dem gebildeten Publikum vielfach benützt wurden.

Endlich muss noch besonders hervorgehoben werden seine Bearbeitung der Geschichte der Botanik, durch welche er mit

Digitized by Google

unserer Akademie in engere Verbindung kam. Von der der Akademie angegliederten historischen Kommission, welche die Geschichte der Wissenschaften in Deutschland herausgibt, übernahm er nach Nägeli's Rücktritt die Geschichte der Botanik. Es konnte dazu wohl kein Besserer gefunden werden. Mit gewohntem Fleisse und strenger Gewissenhaftigkeit sichtete er das Material und suchte er die Entstehung der Thatsachen und der Ideen festzustellen und die allmähliche Entwickelung derselben zu verfolgen. Dabei galt ihm nicht derjenige, welcher die Thatsachen sammelte, als der Fruchtbarere für die Wissenschaft, sondern der, welcher die Thatsachen für allgemeine Schlussfolgerungen zu verwerthen wusste. Er gestand zu, dass das derartige Studium der Geschichte ihn gelehrt habe, den Werth mancher Richtung und Leistung anders zu schätzen als vorher.

Die rastlose Arbeit hat die Gesundheit von Sachs erschüttert und seinem Leben vor der Zeit ein Ende gemacht; er war in Wahrheit ein Kämpfer für die Wissenschaft, der er mit so grossem Erfolge alle seine Kräfte geweiht hatte.

Edward Drinker Cope.

Das am 12. April 1897 in Philadelphia im 56. Lebensjahre verstorbene correspondirende Mitglied der Classe Edward Drinker Cope war ein hervorragender Zoologe und Paläontologe und zählte zu den fruchtbarsten und ideenreichsten Naturforschern Nord-Amerika's.

Cope entstammte einer der ältesten und angesehensten Kaufmanns-Familien der Stadt Philadelphia, woselbst er am 28. Juli 1840 zur Welt kam. Nachdem er den ersten Unterricht von einem Privatlehrer erhalten hatte, trat er in die alte, 1749 gegründete Pennsylvania-Universität seiner Vaterstadt ein. Von früh an zeigte er eine grosse Vorliebe zu den beschreibenden Naturwissenschaften, besonders zur Zoologie; häufig besuchte er die Sammlungen der naturwissenschaftlichen Akademie, wo er auch als 19jähriger Jüngling seine erste Untersuchung

Digitized by Google

über die Classifikation des Salamanders machte. Durch die grossen Sammlungen angelockt, begab er sich dann auf ein Jahr an die Smithsonian Institution in Washington, deren Reptilien er studirte, wonach er wieder während drei Jahren an der Akademie zu Philadelphia arbeitete. Auf einer Studienreise nach Europa bildete er sich in der vergleichenden Anatomie weiter aus, namentlich an den reichhaltigen Museen zu London und Wien.

In solcher Weise trefflich vorbereitet, wurde er nach der Rückkehr in die Heimath zum Professor für vergleichende Zoologie und Botanik am Hareford-College in Philadelphia ernannt; später wurde er Professor der Geologie und Paläontologie an der dortigen Universität und Präsident der Akademie der Naturwissenschaften daselbst. Er war auch Herausgeber der angesehenen Monatsschrift: „Americain Naturalist".

Im Anfang beschäftigten sich seine Untersuchungen mit der systematischen Zoologie und vergleichenden Anatomie noch jetzt lebender Thiere, indem er die Schlangen und Eidechsen von Nord-Amerika klassifizirte und eine mustergiltige Synopsis der Batrachier und Reptilien und auch der Süsswasser-Fische von Nord- und Süd-Amerika gab. Namentlich die letzteren Arbeiten müssen als Vorbilder in dieser Richtung bezeichnet werden, wodurch die älteren Systeme verdrängt wurden; er hatte zu diesem Zwecke die herrliche Sammlung der von Hyrtl hergestellten Fischskelette mit 600 Arten angekauft, welche an Schönheit nur durch Conrad Will's Darstellungen in unserer zoologischen Sammlung übertroffen wird. Auch seine Untersuchungen der Höhlen-Fauna, besonders der Knochenhöhle zu Port Kennedy, gaben wichtige Resultate. Es handelte sich dabei nicht wie früher so häufig blos um Beschreibungen der äusseren Formen dieser Thiere, sondern um morphologische und vergleichend-anatomische Untersuchungen aller Organe, besonders der Skelette. Durch seine mit unermüdlicher Ausdauer gesammelten Kenntnisse der einzelnen Formen, sowie durch seine eminente Beobachtungs- und Unterscheidungsgabe war er ausgerüstet, die Bedeutung dieser Formen zu erkennen und

Digitized by Google

im Ueberblick über grosse Gruppen derselben allgemeine Schlussfolgerungen zu ziehen.

Von der grössten Bedeutung sind aber die Arbeiten Cope's auf dem Gebiete der Paläontologie der fossilen Wirbelthiere. Die Entdeckung der kolossalen Ablagerungen vergangener Thierformen in den Schichten der Erde von Amerika hat ihn zu diesen fruchtbaren Studien geführt, wozu er durch seine eingehenden Kenntnisse des Skelettes der rezenten Formen in besonderem Grade befähigt war, ohne welchen Wissensschatz er niemals in der Paläontologie so weit hätte vordringen können.

Zunächst untersuchte er die in den Mergelgruben von New Jersey gefundenen Reptilien (Dinosauren); dann die Miocän-Fauna von Maryland und Virginien, und die von der Ohio geological Society ihm anvertrauten Funde. Seine Synopsis der ausgestorbenen Batrachier, Reptilien und Vögel Amerika's (1870) erregte sowohl wegen des fast vollkommen unbekannten Stoffes als auch wegen der darin niedergelegten neuen Ideen grosses Aufsehen. Durch diesen Erfolg angespornt, verwendete Cope seine damals sehr bedeutenden Privatmittel auf die paläontologische Durchforschung der westlichen vereinigten Staaten und Territorien. Die vergrabene wunderbare Fauna westlich des Mississippi war nur wenig bekannt; Cope hat mit deren genauer Untersuchung der Paläontologie ein neues Feld eröffnet und neue Anschauungen über die Thierformen auf der Erde angebahnt. Er brachte aus den Kreidebrüchen des westlichen Cansas die Riesenreptilien ans Licht; beutete die berühmten Fundstätten fossiler Säugethiere und Reptilien im Eocän vom Green River in Wyoming und in den Tertiärbildungen von Colorado aus, und legte als Mitglied der Wheeler'schen Expedition reiche Sammlungen aus Nevada, Arizona, Colorado und Neu-Mexiko an. Auf diese Weise und durch Ankauf von Objekten aus anderen Welttheilen bekam er eine Sammlung der fossilen Wirbelthiere, welche an Mannigfaltigkeit und Ausdehnung nicht übertroffen wird.

Gleichzeitig mit Cope liess unser auswärtiges Mitglied Marsh in New Haven die Fundstätten von Dakotah, Wyoming,

Digitized by Google

Colorado und Oregon ausbeuten, mit deren Ergebnissen er seine vielbewunderte Reihe von Publikationen eröffnete. Es entspann sich nun zwischen den beiden ebenbürtigen Rivalen ein nicht immer in friedlichster Weise geführter Wettstreit, in dem mit fast fieberhafter Energie gearbeitet wurde. Beide Forscher brachten von den theils auf eigene, theils auf öffentliche Kosten ausgerüsteten Expeditionen nach dem fernen Westen Monate lang in den unwirthlichsten und gefährlichsten Theilen der Indianer-Gebiete zu. Die dabei gewonnenen, in Philadelphia und New Haven befindlichen Sammlungen fossiler Wirbelthiere und die darauf basirten Abhandlungen von Cope und Marsh haben eine vollständige Umgestaltung der bis dahin herrschenden Ansichten über die Mannigfaltigkeit, Organisations- und Verwandtschafts-Verhältnisse der fossilen Vertebraten herbeigeführt. Cope hat die Bearbeitung des Materials und die Ausarbeitung seiner Werke ganz allein besorgt; er hat dabei über 1000 Spezies fossiler Säugethiere genau beschrieben und ihre Stellung und Verwandtschaft dargelegt.

Von den diese Funde darlegenden Abhandlungen ist vor allen zu nennen sein grosses Werk: „Vertebrata of the tertiary formation of the West", welches eine Uebersicht der gesammten tertiären Wirbelthiere Nord-Amerika's liefert und den wunderbaren Reichthum des amerikanischen Westens an fossilen Vertebraten schildert. Es bildet eine der wichtigsten literarischen Quellen der Paläontologie und hat für Amerika wohl die Bedeutung erlangt, welche Cuvier's „Recherches sur les Ossements fossiles" seiner Zeit für Europa besassen.

Aus ihm geht die zeitliche Aufeinanderfolge der verschiedenen Formenreste der Wirbelthiere hervor, sowie die fortschreitende Entwicklung der Säugethiere in grossen Zeiträumen, besonders die der merkwürdigen Faunen der ältesten eocänen Puerco-Wasatch- und Bridges-Schichten mit den bisher unbekannten Sippen von Hufthieren.

Der Schwerpunkt der wissenschaftlichen Arbeit Cope's ruht in seinen genauen Einzelstudien; aber es ist bei seinem Geiste nicht zu verwundern, dass er durch dieselben auch zu

Digitized by Google

allgemeinen Schlussfolgerungen auf dem Gebiete der Biologie gelangte: zu Betrachtungen über den Ursprung der Arten, über den Ursprung des Menschen und der Wirbelthiere, über die Entwickelung des pflanzlichen und thierischen Lebens in Nord-Amerika. Namentlich seine Studien über die fünfzehigen Hufthiere und über den Bau der Säugethierzähne hatten ihn zu einem Anhänger der Lehre von der Entwickelung gemacht. Jedoch sprach er es schon in seinen frühesten Arbeiten aus, dass er die natürliche Zuchtwahl und das Ueberleben des Vortheilhaftesten im Kampf ums Dasein nach Darwin nicht als die Ursache des Ursprungs der Arten und der höheren Thierklassen ansehen könne; man vermöge aus diesem Prinzip nicht den Beginn jener Veränderungen zu erklären, dasselbe könne vielmehr erst zur Wirksamkeit gelangen, nachdem die Veränderungen schon vorhanden sind, um solche, welche für den Organismus am vortheilhaftesten sich erweisen, fortzusetzen und zu erhalten. Die älteren Anschauungen von Lamarck und von Erasmus Darwin, dem Grossvater von Charles Darwin, über die Anpassung schienen ihm viel besser die Vorgänge zu erklären. Nach Lamarck hat die Natur zunächst die einfachsten Organisationen der Thiere und der Pflanzen hervorgebracht, mit der Tendenz oder Möglichkeit sich zu höheren Formen zu entwickeln, während die mannigfaltigen Lebensbedingungen allmählich Abweichungen in der Struktur hervorrufen. Die zweckmässigen Eigenschaften entstehen dadurch, dass das Bedürfniss als Reiz wirke und Handlungen zu seiner Befriedigung veranlasse, wodurch dann bestimmte Organe durch den Gebrauch und Nichtgebrauch ausgebildet werden, welche sich auf die Nachkommen vererben. Indem Cope diese allerdings ebenfalls nicht ausreichende Theorie durch Thatsachen aus den fossilen Thierformen zu unterstützen suchte, wurde er der Begründer der amerikanischen Neu-Lamarckischen Schule.

Später wendete er sich auch den schwierigen Problemen der psychischen Erscheinungen, des Ursprungs der Intelligenz, der Entwickelung der Ethik, zu. Er sprach sich darin gegen einen ausschliesslichen Materialismus aus und bekundete sich

Digitized by Google

als Anhänger einer idealen Lebensanschauung, welche stets das Beste hoffte.

Er war ein überzeugungstreuer Mann, der nur nach dem handelte, was er für Recht oder Unrecht hielt und bei seinem Urtheil über die Menschen ausschliesslich Befähigung und nicht seine Neigungen berücksichtigte. Im Streben nach der Wahrheit war er gerne bereit, einen erkannten Fehler einzugestehen.

Cope genoss nicht nur wegen seiner umfassenden Kenntnisse, sondern auch wegen der Genialität, mit der er schwierige vergleichend-anatomische und paläontologische Probleme zu behandeln verstand, das grösste Ansehen in wissenschaftlichen Kreisen und sein Einfluss wird noch lange Zeit in seinem Fache maassgebend bleiben.

Legrand Alfred Louis Ollivier Des Cloizeaux.

Am 6. Mai 1897 ist zu Paris das correspondirende Mitglied der Classe, der berühmte Mineraloge Legrand Alfred Louis Ollivier Des Cloizeaux im 80. Lebensjahre gestorben.

Am 17. Oktober 1817 zu Beauvais im französischen Departement Oise geboren, widmete er sich nach Beendigung seiner klassischen Studien der Mineralogie und Geologie. Er unternahm zu seiner weiteren Ausbildung in diesen Wissenschaften ausgedehnte Reisen in England, Deutschland, Oesterreich, Russland, Spanien, Italien, der Schweiz, Skandinavien und Island, woselbst er das Glück hatte, einem Ausbruch des Hekla im Jahre 1845 beiwohnen zu können. Ueberall wurden von ihm die Sammlungen besucht und eifrig studirt.

Seine krystallographischen Untersuchungen machten seinen Namen bald bekannt. Er wurde im Jahre 1858 als Repetitor an der École Normale angestellt, 1869 wählte ihn die Académie des Sciences zu ihrem Mitgliede und 1889 zu ihrem Präsidenten, und seit 1870 war er Professor der Mineralogie an der Sorbonne.

Des Cloizeaux hat vorzüglich die durch die Entwickelung der Physik neu gewonnenen feinen Methoden zur Untersuchung der physikalischen Eigenschaften der Krystalle in die

Digitized by Google

Mineralogie eingeführt. Er hat dadurch die damals herrschende, rein chemische Auffassung der Mineralien, nach der ein Mineral bei gleicher chemischer Zusammensetzung auch der gleichen Spezies angehören müsse, beseitigt.

Seine ausserordentlich sorgfältigen Untersuchungen über die optischen Eigenschaften der Mineralien, wobei er insbesondere deren Verhalten zum polarisirten Licht prüfte und über die er seine ersten Erfahrungen im Jahre 1857 in dem Werke: „de l'emploi des propriétés optiques en Minéralogie" veröffentlicht, hatten ihn gleich in die erste Reihe der Krystallographen gestellt. Seitdem werden neben den Messungen der Flächen und Winkel stets auch die optischen Erscheinungen der Krystalle als nothwendig zur Kenntniss eines Krystalls erachtet.

Die 1861 erschienenen leçons de Cristallographie trugen zur Befestigung dieser Auffassung wesentlich bei.

Besonders wichtig ist sein Handbuch der Mineralogie (1862—1874) geworden. Es ist dies kein gewöhnliches Handbuch, sondern eine ganz selbständige Bearbeitung aller älteren sowie seiner eigenen Erfahrungen in der Mineralogie, welche für alle Mineralogen ein unentbehrlicher Führer geworden ist. Die noch ungenügend bekannten Mineralspezies wie die des Quarzes, des Feldspaths, des Gypses, des Zinnobers etc. wurden darin von ihm vervollständigt.

Im Jahre 1875 erschien seine grosse Zusammenfassung der optischen und krystallographischen Eigenschaften der Mineralien. In unablässiger Arbeit hat er die optischen Eigenschaften aller durchsichtigen Mineralien bestimmt und dadurch einen besonderen Zweig der Mineralogie geschaffen; dieselbe ist durch ihn in die Molekülarphysik eingetreten und nimmt an allen ihren Anschauungen über die Constitution der Materie Antheil.

An seinem 75. Geburtstage, an dem er von der Professur am Museum d'Histoire naturelle zurücktrat, widmeten ihm die Mineralogen aller Länder eine dankbare Erinnerung an die von ihm empfangenen Gaben eine werthvolle Medaille mit der Widmung: von seinen Bewunderern und seinen Freunden.

Digitized by Google

Er war auch der Gründer und langjährige Präsident der Société Française de minéralogie sowie der Herausgeber des Bulletins derselben.

Mit Des Cloizeaux ist ein ächter Gelehrter, eine Autorität in seinem Fache, von streng religiöser Gesinnung dahingegangen: sein Name wird in der Geschichte der Mineralogie und Petrographie als einer der besten genannt werden.

Berichtigungen

zur Abhandlung des Herrn S. Kantor in den Sitzungsberichten 1897 S. 367.

Auf p. 370 befindet sich in Anmerkung 1) unter dem Texte eine Erwähnung zweier Theoreme in § 6 der Abhandlung von Herrn Prof. Frobenius, Cr. J., Bd. 84: „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen", wonach diese Theoreme unrichtig wären. Es hat dabei eine Verwechslung der Collineationen in geometrischer Interpretation mit den Matrixsymbolen oder auch der Frobenius'schen symbolischen Bezeichnung stattgefunden. Während in der Matrixtheorie A und B vertauschbar sind, nur wenn $AB = BA$, sind die zwei zugehörigen Collineationen der Geometrie der Lage auch dann als vertauschbar anzusehen, wenn nur $AB = \lambda BA$ ist, wo λ einen constanten Factor bedeutet. Jene algebraischen Theoreme bedürfen also keiner Correctur.

Auf p. 380 Zeile 13 von oben muss es heissen „niedere" statt „höhere".

Digitized by Google

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1898.

1. Herr L. Radlkofer legt die erste Lieferung der mit Unterstützung der Akademie von Herrn Privatdozenten Dr. Hans Solereder herausgegebenen systematischen Anatomie der Dikotyledonen vor.

2. Herr H. Seeliger überreicht den auf Kosten der Akademie gedruckten III. Band der neuen Annalen der Sternwarte zu München.

3. Herr K. A. v. Zittel bespricht eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Alfred Bergeat: „Ueber die äolischen Inseln", geologisch beschrieben. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr E. v. Lommel legt eine Abhandlung des Professors der Physik an der technischen Hochschule, Herrn Dr. H. Ebert: „Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen" vor.

Digitized by Google

Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen.

Von **Hermann Ebert.**[1])

(*Eingelaufen 5. November.*)

Es ist bekannt und auch in neuester Zeit wiederholt zugestanden worden, dass die mannigfaltigen und seltsamen Erscheinungen, welche die elektrischen Entladungen der verschiedensten Art in verdünnten Gasen hervorrufen, so sehr sie auch namentlich in qualitativer Hinsicht variiert und geprüft worden sind, doch noch immer vollkommen einer Erklärung harren. Gerade über die typischsten Momente dieser Phänomene, über den Dunkelraum an der Kathode, die Glimmlichtschicht, die Anodensäule mit ihren Schichtungen sind die Ansichten durchaus geteilt und einander widersprechend. Es wird daher die Vermutung wachgerufen, dass die Gesamtheit aller der Erscheinungen, welche wir an den Gasentladungen direkt wahrnehmen, noch nicht ausreicht, um sie zu erklären, dass uns bei den gewöhnlichen Versuchsanordnungen Eigentümlichkeiten oder Veränderungen des Gasinhaltes selbst entgehen,

[1]) Die vorliegende Arbeit wurde in dem physikalischen Institut der k. technischen Hochschule zu München vollendet, nachdem sie in dem physikalischen Institut der Universität Kiel zum grossen Teil fertig gestellt war; ausgeführt wurde sie mit Unterstützung des Elizabeth Thompson science fund zu Boston, dessen Sekretär Herrn Professor Minot, sowie dessen Board of Trusties auch an dieser Stelle wärmstens gedankt sei; desgleichen bin ich meinem Privatassistenten, Herrn Ingenieur Dr. M. W. Hoffmann für seine Unterstützung bei dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Digitized by Google

welche doch wesentlich das Zustandekommen der sichtbaren Phänomene mit bedingen. Herr E. Warburg[1]) hat vor kurzem auf unsichtbare Vorgänge aufmerksam gemacht, welche der sichtbaren Funkenentladung vorausgehen; ich glaube durch die folgenden Versuche zeigen zu können, dass durch die Gasentladung selbst der Inhalt des gasverdünnten Raumes direkt nicht wahrnehmbare Veränderungen erfährt, derart, dass das Gas unmittelbar nach dem Einsetzen der Entladung andere Eigenschaften besitzt, als es vorher hatte, und dass diese Veränderungen auch nach dem Aufhören der eigentlichen Entladung selbst wenigstens kurze Zeit nachdauern und bei einer Reihe rasch aufeinander folgender Einzelentladungen den Verlauf derselben mitbestimmen.

Um die Natur des Gases unmittelbar nach dem Durchgange der Entladung zu untersuchen, hätte man das Gas aus dem Entladungsrohre absaugen und dann analysieren oder auf eventuelle nachbleibende Leitfähigkeit, Jonisation u. s. w. in besonderen Räumen prüfen können. Hierbei wären aber die in verschiedenen Teilen der Entladungsröhre vorhandenen Bestandteile vermischt worden; und es ist besonders charakteristisch, dass, wie die folgenden Versuche zeigen, das Gas augenscheinlich in den verschiedenen Teilen der Entladung verschiedenartig verändert wird. Ferner haben die negativen Resultate derartiger Absaugungsversuche gezeigt, dass sich die etwa gebildeten Jonen schon nach sehr kurzer Zeit an den Elektroden oder den ja immer mehr oder weniger stark elektrostatisch geladenen Innenwänden der Entladungsröhren festsetzen, also nicht, oder nur zum verschwindend kleinen Teile mit dem Gase zugleich aus dem Rohre entnommen werden können. Man hat gewisse Eigentümlichkeiten (Leitfähigkeit, Potentialverteilung u. s. w.) der von Entladungen durchsetzten Gassäulen mit Erfolg mittels in dieselben eingesenkten Metallsonden unter-

[1]) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin, p. 223, 1896, ebenda Sitzung vom 18. Febr. 1897, Wied. Ann. **62**, p. 385, 1897.

Digitized by Google

sucht; für den vorliegenden Zweck war auch diese Methode nicht zu verwenden, da eine in die Glimmlichtschicht eingetauchte Metallmasse, so klein ihre und die mit ihr verbundene Capacität auch ist, sich mit einem Dunkelraum umhüllt, also selbst wieder Kathode zu werden scheint, so dass es schwer ist, zu entscheiden, in wie weit der Zustand an dieser Secundärelektrode übereinstimmt mit dem Zustande in der primären Entladungssäule, wie er sich an demselben Punkte herstellen würde, wenn die Sonde nicht vorhanden wäre. Es war daher notwendig, die Entladungssäule selbst zur Prüfung der durch sie hervorgerufenen Zustände im Gase zu verwenden. Ich erreichte dies, indem ich eine Reihe völlig gleichartiger Entladungen in einem genau symmetrisch gestalteten Entladungsrohre unmittelbar auf einander folgend, aber abwechselnd von entgegengesetzten Seiten her auf denselben Gasraum wirken liess. Es zeigte sich, dass das Zeitintervall von ca. $^1/_{1000}$ bis $^1/_{800}$ Secunde oder noch längerer Dauer genügte, um eine deutliche Nachwirkung der ersten Entladung auf die nachfolgende zu constatieren. Um möglichst klar zu übersehende Versuchsbedingungen zu haben, wurden nur Entladungsröhren der einfachsten Gestalt verwendet: meist cylindrische Röhren mit kreisplattenförmigen, ebenen Aluminiumscheiben an den Enden. Durch diese Röhren sendete ich den durch Transformation genügend hochgespannten Strom einer kleinen Wechselstrommaschine von grosser Wechselzahl (Hochfrequenzstrom). Zur Stromerzeugung wurde mir von Herrn Ingenieur Hummel in München ein schnell laufender kleiner vierpoliger Umformer zur Verfügung gestellt,[1]) welcher, mit Gleichstrom von etwa $1^1/_2$ bis 2 Ampère bei 64 Volt beschickt, einen Wechselstrom von etwa 800—1000 Polwechseln in der Secunde entnehmen lässt.

In Wiedemanns Annalen habe ich diesen Generator sowie den benutzten Transformator und die zur Messung im Hoch-

---

[1]) Herrn Ingenieur Hummel spreche ich dafür auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

Digitized by Google

spannungskreise verwendeten Messinstrumente eingehend beschrieben.[1])

In den folgenden Tabellen bedeutet

p den Druck des Gases in den Entladungsröhren in mm Quecksilbersäule,

d die Dicke des (Hittorfschen) Kathodendunkelraumes in mm,

i die effective Stärke des das Entladungsrohr durchsetzenden hochfrequenten Wechselstromes in Milliampères,

V die effective Spannung dieses Hochspannungsstromes an den Elektroden der Röhren in Volt.

Den Tabellen ist noch das mit E bezeichnete und mit 10^3 multiplicierte Produkt $E = i\,V$ zugefügt worden; dasselbe würde die dem Rohre zugeführte Wattleistung darstellen, wenn in demselben nicht eine erhebliche Phasendifferenz zwischen beiden Grössen infolge der Condensatorwirkung des Rohres aufträte.[2]) Wie aber früher nachgewiesen wurde, stellt E den Gang des Energieverbrauches vollkommen dar und auch dieser bringt die im Folgenden zu beschreibenden Erscheinungen sehr charakteristisch zum Ausdruck.

1. Gang der Erscheinungen bei abnehmendem Drucke in einfachen cylindrischen Entladungsröhren. — Das typische Bild des hier näher zu besprechenden Phänomens wird am klarsten bei weiten, cylindrischen Röhren ohne capillare Verengungen, Fig. 1, erhalten; EE sind die Elektroden,

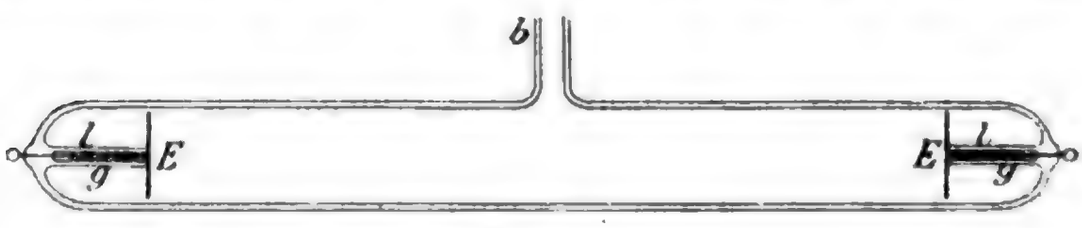


Fig. 1.

Kreisscheiben aus Aluminiumblech von 2,0 cm Durchmesser. Dieselben werden von angenieteten kurzen Stielen ll aus dickem Aluminiumdraht getragen, die mit Platindrähten leitend ver-

[1]) H. Ebert, Wied. Ann. 65, p. 761, 1898.

[2]) Vergl. H. Ebert, a. a. O., p. 787.

Digitized by Google

bunden sind, welche in die Glaswand eingeschmolzen werden. Glasröhrchen *gg* bekleiden die Zuleitungen bis an die Platten heran. Durch das seitliche Rohr *b* stehen die Entladungsröhren mit einer Töpler-Hagenschen Quecksilberpumpe in Verbindung, an welche ausserdem ein Mac Leodscher Druckmesser Kahlbaumscher Construction und die Gasentwickelungsapparate mit ihren Trockenvorrichtungen angeschlossen sind. Wird durch eine solche Röhre der Hochfrequenzstrom geschickt, so zeigt sich stets der folgende Verlauf: Von dem Momente an, in dem sich beide Elektrodenplatten völlig mit den Glimmlichtschichten überzogen haben, und sich, von beiden durch den sogenannten Faradayschen Dunkelraum getrennt, die Säule des Anodenlichtes in der Mitte schwebend ausgebildet hat, nimmt bei abnehmendem Drucke die Stärke des die Röhre durchsetzenden Stromes zu, die an den Elektroden herrschende Spannungsdifferenz ab. Zugleich mit ihr nimmt das Product E beider ab. Dies dauert fort, wenn bei fortgesetzter Evacuation die Glimmlichtstrahlen immer länger werden, die vor ihren Enden liegenden Faradayschen Dunkelräume immer weiter nach der Mitte zu vorrücken, die unmittelbar an den Elektrodenplatten sich ausbildenden Hittorfschen Kathodendunkelräume an Dicke d zunehmen. In dem Momente aber, wo die Faradayschen Dunkelräume und die vorderen Enden der Glimmlichtstrahlen sich in der Rohrmitte begegnen, — einen Moment, den man am besten in einem neben dem Rohre aufgestellten Drehspiegel beobachtet, welcher die zeitlich auf einander folgenden Entladungsbilder räumlich neben einander legt, — tritt stets, bei allen Röhren und allen Gasen, eine eigentümliche Umkehr ein; die Stromstärke vermindert sich, gleichsam als ob der Wechselstrom abgeschnürt („gedrosselt") würde, dafür erhöht sich die Spannung, sowie die Grösse E, so dass für den entsprechenden „Umkehrdruck" die i-Werte ein Maximum, die V- und E-Werte ein Minimum aufweisen. Zugleich treten in den bis dahin ungeschichteten Anodensäulen deutliche Lichtabsonderungen, die „Schichten" mit ihren dem Drucke und der Rohrweite entsprechenden Abständen auf.

Digitized by Google

Schichten bilden sich in einem Rohre erfahrungsgemäss immer dann aus, wenn die Anodensäule zusammengeschnürt wird, z. B. durch Einfügen von capillaren Zwischenstücken; jene Begegnung wirkt also in dem überall gleichweiten Cylinderrohre wie eine Rohrverengung.

Dass zwei gleichzeitig auftretende Glimmlichter verschiedener Kathoden ihrem gegenseitigen Eindringen sowie dem Eindringen der Anodensäule einen gewissen Widerstand entgegensetzen und dadurch die Entladungsspannung erhöhen, ist bekannt; gelegentlich beobachtet wurde auch, dass der Gang von Stromstärke und Spannung in einem Entladungsrohre bei gleichgerichteten Entladungen bei demselben Drucke sich umkehren kann; hier ist aber zu beachten, dass die beiden Glimmlichter zeitlich nach einander ausgebildet werden, um Zeiten verschieden, welche ausreichend lang sind, um das Gas wieder völlig dunkel, die Entladung gänzlich unsichtbar erscheinen zu lassen, was wiederum am besten im Drehspiegel constatiert wird. Ferner ist bemerkenswert, dass diese Umkehr genau an den Moment gebunden ist, wo die vordersten, z. T. noch ganz unsichtbaren Enden der Glimmlichter nach einander denselben Raum passieren.

Wird der Druck noch weiter erniedrigt, so sinkt die Stromstärke i, die Spannung V und E steigen völlig regelmässig. Die folgenden Tabellen mögen den Gang der Erscheinung bei verschiedenen Gasen erläutern; damit die Zahlen mit einander vergleichbar sind, wurden Reihen ausgewählt, welche mit demselben Rohre von 16,8 cm Elektrodenabstand, 2,5 cm lichter Weite und 22 cm Länge (Röhre B) erhalten worden sind; die ausgezeichneten Werte sind durch den Druck hervorgehoben.

Tabelle 1. Wasserstoff.

p	4,43	2,49	2,15	1,06	0,88	0,58	0,47
d	1,2	2,3	2,5	4,2	4,9	6,3	7,6
i	14,02	16,39	**17,00**	16,57	15,94	15,01	13,91
V	742	614	**583**	592	648	698	784
E	10,40	10,07	**9,91**	9,80	10,33	10,48	10,66

Digitized by Google

Tabelle 2. Luft.

p	2,76	1,30	0,83	0,51	0,27	0,20
d	0,9	1,5	2,2	2,8	5,0	6,7
i	12,61	15,76	**15,94**	15,39	13,49	12,37
V	718	574	**559**	602	725	812
E	9,05	9,06	**8,93**	9,27	9,77	10,06

Tabelle 3. Kohlenoxyd.

p	1,81	0,99	0,46
d	1,3	2,0	3,0
i	14,02	**15,20**	14,12
V	673	**618**	707
E	9,43	**9,40**	9,98

Tabelle 4. Kohlensäure.

p	3,92	1,21	0,91	0,88	0,52	0,33	0,22
d	0,7	1,5	2,0	2,0	2,9	4,5	5,0
i	13,49	17,25	17,58	**17,66**	16,83	15,30	14,72
V	815	598	596	**596**	659	748	831
E	11,00	**10,31**	10,47	10,52	11,10	11,45	12,23

Tabelle 5. Leuchtgas.

p	5,09	2,69	1,76	1,01	0,64
d	1,1	2,0	2,5	3,0	5,0
i	12,83	17,00	**18,14**	17,25	15,58
V	795	568	**541**	592	676
E	10,21	**9,65**	9,81	10,21	10,54

Bei Kohlensäure zeigten sich bei regelmässig fortschreitender Evacuation von $p = 1,5$ mm an bis $p = 0,5$ grosse Unregelmässigkeiten, so dass die Vermutung nahe gelegt wird, dass bei diesen Drucken eine Dissociation eintritt. Ob dieselbe Folge der Entladungen ist, oder ob schon lediglich infolge der Verdünnung allein eine Zustandsänderung im Gase Platz greift,

Digitized by Google

wie sie Herr Bohr beim Sauerstoff beobachtete,[1]) so dass für diese Drucke das Boyle-Mariottesche Gesetz nicht mehr gilt, bleibe vorläufig dahingestellt.

Mit diesen Unregelmässigkeiten dürfte es zusammenhängen, dass der ausgezeichnete Wert von E bei einem andern Drucke liegt, als die Maxima bezw. Minima von i und V, mit denen er sonst stets zusammenfällt; gleiches gilt beim Leuchtgas.

Beachtet man, bei welchen Drucken für die verschiedenen Gase die Umkehr eintritt, so erkennt man deutlich, dass dieselben in der That aufs engste mit der Verbreitung der Glimmlichtgebilde bei fortschreitender Evacuation zusammenhängen; diese ist bei Wasserstoff bekanntlich am schnellsten. Hier haben die Glimmlichtspitzen zuerst die Rohrmitte erreicht, die Begegnung und damit die Umkehr tritt schon bei $p = 2{,}15$ ein; viel langsamer geht das Vorrücken bei Luft, Kohlenoxyd und Kohlensäure, schneller wieder bei Leuchtgas vor sich, bei dem Wasserstoff ein Hauptbestandteil ist.

Dass aber beide Erscheinungen mit den molecularen Eigenschaften der Gase aufs innigste zusammenhängen, geht weiter daraus hervor, dass die „Umkehrdrucke" ungefähr im Verhältnisse der mittleren freien Weglängen der verschiedenen Gase zu einander stehen. Um dies zu erkennen, hat man die Zahlen der Tabellen graphisch darzustellen, wobei man die wahre Lage der Curvenmaxima und Minima besser übersieht (beim Evacuieren wird man ja nur in seltenen Fällen den Umkehrdruck genau treffen, die im Satze hervorgehobenen Zahlen liegen also immer nur in der Nähe der ausgezeichneten Punkte selbst). Da sich die Stromstärke i in der Nähe ihres Maximalwertes nur sehr wenig mit dem Drucke ändert, so ist zur Erkennung und Verfolgung der Lage des Umkehrdruckes die Spannung V hier wie in allen folgenden Tabellen viel geeigneter, da sie sehr stark mit dem Drucke variiert, auch in der Nähe des ausgezeichneten Punktes. Trägt man für die Tabellen 1—4 die Drucke als Abscissen, die Spannungen V als Ordinaten in ein

[1]) Chr. Bohr, Wied. Ann. **27**, p. 459, 1886.

Digitized by Google

Coordinatensystem ein, so entnimmt man den ausgeglichenen Curven die mit Rücksicht auf den allgemeinen Curvenverlauf folgenden Werte für die wahren Umkehrdrucke U, neben die die entsprechenden mittleren freien Weglängen λ in Milliontel Millimetern für $p = 760$ mm und die Verhältnisse beider Zahlen gesetzt sind.

Tabelle 4a.

	U	λ	λ/U
Wasserstoff	1,80	185	103
Luft	0,96	95	99
Kohlenoxyd	0,99	98	99
Kohlensäure	0,75	68	90

Eine vollständige Uebereinstimmung ist nicht zu erwarten, schon weil λ nicht ganz von der Temperatur unabhängig ist,[1]) die in den einzelnen Fällen gewiss eine sehr verschiedene war; vergl. übrigens auch § 6 am Ende.

Da die freie Weglänge umgekehrt proportional dem Gasdrucke zunimmt, so kann man die hier gefundene Thatsache auch so ausdrücken: Die zeitlich nach einander erfolgende Begegnung der Glimmlichter an derselben Rohrstelle (der Rohrmitte), und damit die Umkehr im Gange von Stromstärke, Spannung (und Wattconsum) findet in dem Momente der fortschreitenden Evacuation statt, in welchem die mittlere freie Weglänge der verschiedenen Gase die gleiche geworden ist.

Schon dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass eine Art Diffusionsvorgang im Spiele ist.

Die Umkehr tritt oft bereits ein, wenn die dunklen Trennungsräume, welche sich zwischen die äussersten Glimmlichtspitzen und das Ende der Anodenlichtsäule einschieben, bei dem Wechsel der Entladungsrichtung an identische Stellen des Rohrs gelangen. In der That verhält sich ja dieser Glimm-

[1]) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 1. Aufl., p. 121, 1877.

Digitized by Google

lichtraum wie der von den Glimmlichtstrahlen selbst durchleuchtete Teil; er zeigt nach Herrn Graham[1]) fast dasselbe negative Potentialgefälle und ist wie dieser mit freier positiver Elektricität erfüllt; Herr Graham betont, dass sich dieser Dunkelraum seinem Wesen nach nicht von dem durch Glimmlicht erhellten Raume unterscheidet; er ist ja in Wirklichkeit auch gar nicht völlig dunkel, sondern sendet wirksame Strahlen aus, wie Herr Varley[2]) auf Grund photographischer Untersuchungen wahrscheinlich gemacht hat.

2. Vergleich enger und weiter Röhren mit einander. — Hängt die Umkehrungserscheinung in dem Gange der elektrischen Bestimmungsstücke der Gasentladungen wirklich mit der Ausbreitung der Glimmlichterscheinungen zusammen, so musste diese Umkehrung bei tieferen Drucken eintreten, wenn die von Glimmlicht durchsetzten Gasmassen nicht wie bei den cylindrischen Röhren der Fig. 1 auf einen verhältnismässig engen Raum zusammengedrängt wurden, sondern wenn ihnen wie bei der Röhre Fig. 2 Gelegenheit geboten wurde, sich namentlich in der Nähe der Elektroden weiter zu verbreiten. Um dieses zu prüfen, wurde ausser der oben benutzten Röhre B Fig. 1 eine zweite Röhre D von der Gestalt der Fig. 2 an die

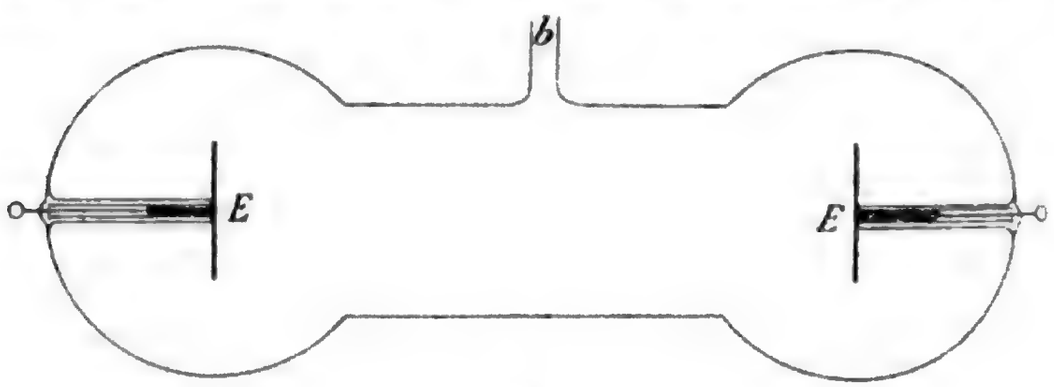


Fig. 2.

Pumpe angeschmolzen; beim Evacuieren wurde durch eine Wippe abwechselnd der einen, dann der anderen der Hoch-

[1]) William P. Graham, Inaug.-Diss., Berlin, 2., p. 31, 1897. Wied. Ann. **64**, p. 17, 1898.

[2]) C. F. Varley, Proc. Roy, Soc. **19**, p. 238, 1871.

Digitized by Google

frequenzstrom zugeführt. Bei Röhre D befinden sich die beiden 3,2 cm im Durchmesser haltenden Elektrodenscheiben *EE* aus Aluminium innerhalb kugelförmiger Elektrodenräume von 8,5 cm Durchmesser, so dass rings um die Elektroden noch mindestens 2,6 cm freier Raum bis zur Rohrwandung übrig bleibt; die beiden Elektrodenräume sind durch ein ca. 4 cm weites und nur 6 cm langes cylindrisches Rohr mit einander verbunden, so dass ca. 14,5 cm Elektrodenabstand resultiert. Die Räume der Röhren D und B verhalten sich demnach ungefähr wie 7 : 1, der Elektrodenabstand ist dabei in D noch etwas kleiner als in B.

In den Tabellen 6—8 ist durch die Stellung der Zahlen der Umkehrdruck für beide Röhren hervorgehoben. In der weiteren Röhre D kommen immer grössere Stromstärken zu stande, die Elektrodenspannung ist geringer als in der engeren (und dabei etwas längeren) Röhre B; der Energieverbrauch ist in der letzteren grösser.

Tabelle 6. Stickstoff.

Röhre D.

p	3,45		2,01			1,02			0,63	0,53		0,33
d	0,7		1,5			1,9				2,7		3,95
i	14,62		17,66			19,00			Max.	19,23		18,78
V	632		464			387			Min.	390		424
E	9,25		8,19			7,36			Min.	7,51		7,97

Röhre B.

p		3,40		1,98	1,07		1,00	0,66			0,34
d		0,6		1,4	1,8			2,7			4,0
i		10,88		14,12	16,03		Max.	15,39			13,80
V		843		656	570		Min.	606			691
E		9,17		9,26	9,14		Min.	9,33			9,54

Digitized by Google

Man sieht, dass, während sich die Umkehr in dem engen cylindrischen Rohre B bereits bei einem Drucke von p ca. 1,00 mm vollzog, dieselbe in dem viel weiteren Rohre D erst bei dem erheblich tieferen Drucke von etwa 0,63 mm, d. h. nach dem nächsten Pumpenzug eintrat, bei dem der Dunkelraum um ca. 0,8 mm vorgerückt war.

Ganz ähnlich verhält sich Luft.

Tabelle 7. **Luft.**

Röhre D.

p		2,06	1,24		0,61		(0,60)	0,47	0,27	0,19
d		1,2	1,8		2,4			3,1	4,6	7,0
i		19,60	20,40		20,46		Max.	20,25	19,15	17,66
V		384	346		346		Min.	367	427	505
E		7,53			7,09		Min.	7,44	8,18	8,92

Röhre B.

p	2,08		1,24	(1,00)		0,60		0,47	0,27	0,19
d	1,2		1,7			2,9		4,0	6,0	8,0
i	15,11		16,74	Max.		16,39		15,58	13,71	11,90
V	608		529	Min.		559		614	707	835
E	9,19		8,86	Min.		9,16		9,57	9,69	9,94

Bei Sauerstoff zeigen die Umkehrpunkte dieselbe Anordnung, nur sind sie bei beiden Röhren zu etwas höheren Druckwerten aufgerückt; man kann dies nach dem Vorigen als eine Folge der etwas grösseren molecularen Weglängen in diesem Gase betrachten.

Tabelle 8. **Sauerstoff.**

Röhre D.

p	2,77				1,33		1,21	(1,20)	1,19		0,92		0,58	0,53	0,[illegible]
d	0,6				1,2		1,3		1,5		1,5		2,4	2,5	4,[illegible]
i	20,95				21,43		21,63		21,63	Max.	21,70		20,88	20,82	19,[illegible]
V	377				343		332	Min.	335		335		371	374	4[illegible]
E	7,91				7,35		7,17	Min.	7,26		7,28		7,75	7,79	9,[illegible]

Digitized by Google

Röhre B.

2,75	1,80	(1,70)	1,32	1,24	1,21		0,93		0,89	0,58	0,54	0,27
0,5	0,7		1,1	1,3	1,3		1,5		1,7	2,4	2,4	4,4
19,53	19,74	Max.	18,46	17,82	17,58		17,91		17,74	17,66	17,17	14,82
447	433	Min.	502	527	531		536		550	566	579	709
8,73	8,55	Min.	9,28	9,39	9,35		9,60		9,76	9,99	9,94	10,51

Bei den übrigen daraufhin untersuchten Gasen, namentlich Wasserstoff, ist der Unterschied in dem Verhalten beider Entladungsräume nicht so scharf markiert. Für die grosse Weglänge dieses Gases und die schnelle Ausbreitung, welche die Kathodenschichten hier erfahren, ist der Raumunterschied in beiden Fällen noch zu unwesentlich.

3. Vergleich verschieden langer, aber gleichweiter Cylinderröhren. — Hat es hiernach den Anschein, dass die Umkehr in dem Verlauf von Stromstärke- und Spannungswerten durch Vorgänge bedingt wird, welche von der Kathode ausgehen, in deren Nähe andauern und sich durch eine Art von Diffusion weiter verbreiten, so muss dieselbe bei längeren Röhren und grösserem Elektrodenabstande bei tieferen Drucken eintreten als bei kurzen Röhren von gleichem Querschnitte, in denen die veränderten Gasschichten — durch die Rohrwände zusammengehalten — schon bei höheren Drucken von beiden Seiten her vordringend die Mitte erreichen. Dies wurde mittels zweier gleichzeitig mit der Pumpe in Verbindung stehenden gleichweiten cylindrischen Entladungsröhren von der Form der Figur 1 geprüft, von denen die eine, Röhre A, 33,9 cm Elektrodenabstand, die andere zwei gleichbeschaffene Elektroden besass, welche aber nur 16,8 cm, also sehr nahe halb so weit von einander abstanden, Röhre B. Beide Röhren wurden rasch hinter einander bei denselben Drucken und bei identischer Gasfüllung untersucht.[1])

[1]) Wie Herr Warburg nachgewiesen hat, ändern schon sehr geringe Spuren fremder Beimischungen das Kathodengefälle ausserordentlich; da der grösste Teil des gesammten Spannungsabfalles aber hier

Digitized by Google

Tabelle 9a. **Luft.**

Röhre A.

d	1,0	1,5		1,8	2,3	2,4	3,0	3,2	5,0	5,2
i	12,89		13,37	13,89	13,89	13,76	13,89	13,76	13,56	13,37
V	1500		1280	1104	1024	1015	1041	1033	1092	1076
E	19,33		17,11	15,33	14,21	14,37	14,45	14,21	14,83	14,37
								Umkehr		

Röhre B.

i	14,15	13,50	13,63	13,76	13,76	14,02	14,02	13,63	13,95	13,89
V	903	801	801	754	787	773	804	837	919	973
E	12,77	10,81	10,92	10,37	10,85	10,83	11,27	11,40	12,82	13,52
			Umkehr-Schichten							

Diese Beobachtungsreihe zeigt namentlich bei der langen Röhre A grosse Unregelmässigkeiten, wie sie gerade bei Luft sehr häufig sind. Zwischen den mit 2,3 und 2,4 überschriebenen Beobachtungen war nicht evacuiert worden, sondern die Röhren waren längere Zeit unbenutzt gewesen; man sieht, dass Veränderungen Platz gegriffen hatten, welche den regelmässigen Gang der folgenden Werte beeinträchtigten. Die deutliche Umkehr trat bei dem längeren Rohre aber erst drei Evacuationen später auf. Zur Controle wurde die Beobachtungsreihe in dem charakteristischen Teile wiederholt.

Tabelle 9b. **Luft.**

Röhre A.

d	2,5	3,0	4,0	4,5
i	13,76	13,82	13,89	13,09
V	1059	1013	1007	1042
E	14,56	14,01	13,98	13,66
				Umkehr

auf dieses kommt, so zeigen im Allgemeinen verschiedene Füllungen desselben Gases in demselben Rohre nicht immer genau die gleichen Werte der Grössen *i*, *V* und *E*.

Digitized by Google

Röhre B.

i	13,63	13,63	13,37	13,37
V	765	801	834	839
E	10,42	10,92	11,15	11,21
Umkehr				

Hier kommt die spätere Umkehr in dem längeren Rohre ganz deutlich zum Ausdruck.

Tabelle 10. Wasserstoff.

Röhre A.

p	3,05	2,04	1,37	0,95	0,72	0,54	0,40
d	1,5	2,0	2,8	4,0	5,0	5,6	7,0
i	12,40	12,40	12,40	12,40	12,11	12,11	12,40
V	1553	1276	1104	1024	1019	1024	1104
E	19,25	15,81	13,69	12,70	12,33	12,40	13,69
					Umkehr		

Röhre B.

i	13,23	12,54	12,54	12,11	12,40	12,40	12,54
V	801	715	767	(767)	1027	(923)	(967)
E	10,60	8,96	9,62	(9,29)	12,73	(11,45)	(12,13)
		Umkehr					

Die letzte Reihe ist in den Spannungswerten und damit in den E-Werten durch kleine Unregelmässigkeiten etwas entstellt; worauf es hier allein ankommt, die Aufeinanderfolge der Umkehrungen, geht aber dennoch mit genügender Sicherheit hervor.

Tabelle 11. Stickstoff.

Röhre A.

p	2,81	1,91	1,28	0,93	0,65	0,45	0,30
d	0,5	1,5	2,1	2,5	3,5	4,0	6,0
i	11,05	12,13	12,65	12,97	12,80	12,80	12,97
V	1758	1472	1264	1114	1039	1033	1128
E	19,41	17,86	15,99	14,46	13,30	13,23	14,63
						Umkehr	

Digitized by Google

Röhre B.

i	12,80	12,97	12,97	12,97	12,97	12,97	12,97
V	1051	901	796	743	737	812	984
E	13,46	11,69	10,33	9,64	9,57	10,53	12,77
					Umkehr		

Dem Umstande entsprechend, dass die Umkehr in dem längeren Rohre erst bei erheblich tieferen Drucken eintritt, zeigen sich hier auch die Schichten erst sehr viel später als in dem mit ihm in Communication stehenden kürzeren Rohre. Beide Erscheinungen, Umkehr und Schichtenbildung, machen ganz den Eindruck, als beruhten sie auf einer Art Stauwirkung; das vollkommen entsprechende Verhalten derselben in vorliegendem Falle macht diese Anschauung nur noch wahrscheinlicher.

Bei den sehr schnellen, aber verhältnismässig rasch gedämpften Schwingungen des Lecherschen Systems war die Begrenzung der Dunkelräume bei kürzeren cylindrischen Röhren immer prägnanter als bei längeren, wo sie merklich unschärfer war.[1]) Bei den hier verwendeten ungedämpften Wechselstromschwingungen war dies nicht der Fall.

Auch bei den sogleich zu beschreibenden Versuchen mit einer beweglichen Elektrode behielten beide Dunkelräume ihre scharfe Grenze gegen die Glimmlichter bei allen Abständen der Elektroden von einander bei.

4. Versuche mit einem Cylinderrohre mit einer feststehenden und einer beweglichen Elektrode. — Die die Umkehr von Stromstärke, Spannung und Energieconsum bedingenden Vorgänge scheinen nach dem Vorhergehenden ihren Sitz in dem ganzen Glimmlichtraume bis in den vorderen, unsichtbaren Saum desselben hinein zu haben. Es musste von entscheidender Wichtigkeit sein, diesen Schluss in demselben Entladungsraume bei demselben Drucke und der gleichen Gasfüllung an einem Rohre zu prüfen, welches gestattete, während der Entladung selbst die vorderen Punkte der Glimment-

[1]) H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. **50**, p. 239. 1893.

Digitized by Google

ladung gegen einander zu führen und so bei denselben äusseren Entladungsbedingungen, namentlich bei demselben Drucke jene eigentümliche Umkehr nach Willkür hervorzurufen. Die Glimmlichtgebilde folgen ihrer Kathode, an der sie angeheftet zu sein scheinen; die die Umkehr herbeiführende Wirkung musste also lediglich durch Verkürzung des Elektrodenabstandes herbeizuführen sein.

Um dies zu bewerkstelligen, wurde eine Anordnung mit einer festen und einer beweglichen Elektrode benutzt, wie sie ähnlich schon von Herrn R. W. Wood beschrieben worden ist.[1])

Das 3,5 cm weite, 30 cm lange cylindrische Rohr A Fig. 3 trägt oben die feststehende Elektrode E_1 (Kreisscheibe aus Aluminium von 2,7 cm Durchmesser); die Stromzuleitung geschieht von oben her mittels des angesetzten Quecksilbernäpfchens *a*, um Funkenstrecken zu vermeiden; durch *b* steht das Rohr *A* dauernd mit der Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Unten trägt es den weiten Schliff *S*, an dem das 14 mm weite, 80 cm lange vertikale Rohr *R* angesetzt ist. Durch *S* kann die untere, ebenfalls 2,7 cm im Durchmesser haltende Elektrode E_2 eingeführt werden, welche von einem Glasrohre *r* getragen wird, welches durch *R* hindurchgeführt und das unten *U*-förmig umgebogen ist. Die Zuleitung geschieht mittels eines durch *r*

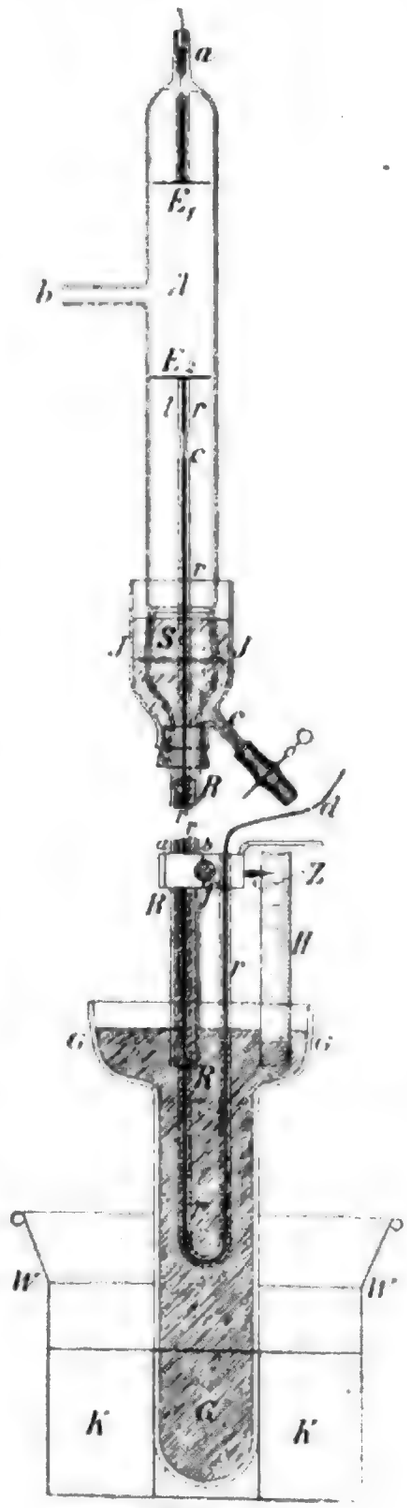


Fig. 3.

[1]) R. W. Wood, Wied. Ann. **59**, p. 246, 1896.

Digitized by Google

hindurchgezogenen Kupferdrahtes, der oben bei c an einem Platindraht hart angelötet ist; auf diesen wird der Aluminiumstiel l der Elektrode E_2 fest aufgedrückt, so dass ein vollkommen metallischer Contact besteht. Bei c liess man das Rohr r vor der Gebläselampe zusammenfallen, bis sich das Glas allseitig dicht an das Platin anlegte; so wurde hier ein völlig gasdichter Abschluss erzielt.

Das untere Ende des Rohres R taucht in das mit Quecksilber gefüllte, oben napfartig erweiterte Standgefäss S, welches von einem in der Schwarzblechwanne W befindlichen Holzklotze K gehalten wird. Wird A durch b hindurch evacuiert, so steigt das Quecksilber in R in die Höhe und bildet einen Barometerabschluss, der dem Rohre r dennoch völlige Bewegungsfreiheit gestattet. Mittels desselben kann die Elektrode E_2 in jede beliebige Höhe gebracht und durch Festklemmen des Rohres r bei f in dieser erhalten werden; der Zeiger Z gestattet auf einer Skala H den Elektrodenabstand $E_1 E_2 = a$ direkt abzulesen.

Damit an dem Schliffe S eine völlige Dichtung bei Anwendung möglichst geringer Mengen von Fett und dergleichen erzielt wird, ist von unten her um denselben herum der Glasbecher J mittels Kautschuckstopfens befestigt, der mit Quecksilber gefüllt wird, welches durch e wieder abgelassen werden kann.

Die Resultate der mit diesem Apparate angestellten Beobachtungsreihen enthalten die folgenden Tabellen.

Tabelle 12. Luft.

	d				1,5	2,2	3,2	5,0	7,5	10,0
$a = 22$ cm	i	11,50	11,65	12,96	13,63	14,02	14,02	13,89	13,63	13,76
	V	1826	1732	1312	846	759	734	794	992	1208
	E	20,94	20,18	17,00	11,53	10,64	10,30	11,03	13,52	16,62
							Umkehr			
$a = 12$ cm	i	13,23		14,02	14,02	14,02	14,02	14,15	13,89	14,27
	V	1076		819	578	541	585	746	1015	1240
	E	14,23		11,49	8,10	7,58	8,20	10,54	14,09	17,68
						Umkehr				
$a = 2$ cm	i	14,02		14,40	14,27	14,15	14,27	14,15	13,76	14,27
	V	430		406	351	396	497	715	996	1193
	E	6,04		5,84	5,02	5,60	7,09	10,11	13,71	17,03
					Umkehr					

Digitized by Google

Tabelle 13. Wasserstoff.

	p	4,39	2,89	1,94	1,28	0,85	0,59	0,43
	d	1,0	2,0	3,0	3,5	4,2	5,5	6,5
$a = 22$ cm	i	12,54	12,25	12,82	12,68	12,82	12,68	12,54
	V	1083	851	726	679	706	773	880
	E	13,58	10,42	9,31	8,61	9,05	9,80	11,01
						Umkehr		
$a = 12$ cm	i	12,96	12,82	13,09	12,96	12,82	13,09	12,96
	V	679	556	521	525	588	676	817
	E	8,78	7,12	6,83	6,81	7,54	8,85	10,58
				Umkehr				
$a = 2$ cm	i	13,37	13,23	13,09	12,96	13,09	13,09	13,37
	V	363	346	380	421	517	642	781
	E	4,85	4,57	4,97	5,45	6,77	8,40	10,43
			Umkehr					

Tabelle 14. Stickstoff.

	p	2,85	1,91	1,25	0,82	0,54	0,35	0,26
	d	1,0	1,5	2,0	2,7	4,0	6,5	8,0
$a = 22$ cm	i	12,13	12,30	12,30	12,47	12,65	12,65	12,47
	V	1119	925	849	740	720	791	965
	E	13,58	11,39	10,45	9,23	9,11	10,00	12,03
						Umkehr		
$a = 12$ cm	i	12,65	12,47	12,47	12,47	12,80	12,65	12,47
	V	667	567	509	533	592	723	984
	E	8,43	7,07	6,35	6,65	7,58	9,14	12,27
				Umkehr				
$a = 2$ cm	i	13,13	12,80	12,80	12,65	12,65	12,97	12,65
	V	321	333	363	411	513	694	930
	E	4,21	4,27	4,65	5,20	6,49	9,00	11,76
		Umkehr						

Die Tabellen 12—14 lassen übereinstimmend den folgenden Gang der Erscheinung deutlich erkennen: Bei demselben Drucke wird die Stromstärke um so grösser, je näher die Elektroden einander kommen, die Spannung sowie der Wattconsum werden

kleiner.[1]) Dies ist ohne Weiteres verständlich, denn mit abnehmendem *a* wird die zum Leuchten zu bringende Gassäule und damit die Widerstandsstrecke kürzer; doch besteht augenscheinlich keine einfache Beziehung zwischen der auf die 10 cm, um welche Länge die Gassäule je zweimal verkürzt wurde, entfallenden Spannungsdifferenz und der Stromstärke, etwa wie bei dem Ohmschen Gesetz; der Widerstand des Gases ist selbst wieder von der letzteren abhängig; auch sind die Spannungsabfälle auf den beiden gleichlangen Strecken, um die die Säule verkürzt wurde, nicht einander gleich, was darauf hinweist, dass die einzelnen Teile der Säule in ihren Widerstandsverhältnissen einander sehr ungleichwertig sind.[2]) Die Zahlen zeigen aber ferner die folgenden, für unseren Zweck wichtigeren Eigentümlichkeiten: Bei grossen Elektrodenabständen tritt die Umkehr ganz in Uebereinstimmung mit § 2 und 3 bei viel tieferen Drucken ein als bei kleinen Abständen. Wenn ferner beim Annähern der beweglichen Elektrode auch die Spannung sinkt, die Stromstärke wächst, so geht dies doch immer langsamer vor sich, je näher die Glimmlichter einander rücken. Für die Spannung tritt dies am deutlichsten hervor, vergl. Tabelle 15. Es findet eine Rückstauung statt. Ja, bei der Begegnung der Glimmlichter, in der Nähe der Umkehrdrucke kann die Spannungsabnahme in Folge der Annäherung sogar durch die von der Begegnung bedingte Spannungssteigerung überwunden werden, so dass die Spannung bei nahen Elektroden gleich oder sogar noch grösser ist als diejenige bei grösserem Elektrodenabstande. Analoges gilt für die Stromstärke. In den Tabellen sind die Werte, welche diese Stauwirkung ganz besonders gut veranschaulichen, fett gedruckt. Man sieht, dass sie sich durchaus um die Umkehrdrucke gruppieren und erst häufiger werden, nachdem die Begegnung stattgefunden hat. Zu beachten ist

[1]) Wie aus der Vergleichung der *d*- und der *a*-Werte hervorgeht, wurde eine so grosse Annäherung der Elektroden, dass die eine in den Dunkelraum der anderen eindrang, wobei sich ausserordentliche Spannungssteigerungen ergeben, vermieden.

[2]) Vergl. auch Ed. Riecke, Wied. Ann. **63**, p. 227, 1897.

Digitized by Google

Tabelle 15.

Luft	d				1,5	2,2	3,2	5,0	7,5	10,0
$a = 22$ cm	V_1	1826	1732	1312	846	759	734	794	992	1208
$a = 12$ cm	V_2	1076		819	578	541	585	746	1015	1240
$a = 2$ cm	V_3	430		406	351	396	497	715	996	1193
$V_1 - V_2$		750		493	268	218	149	48	— 23	— 32
$V_2 - V_3$		646		413	227	145	88	31	19	47
H_2	p		4,39	2,89	1,94	1,28	0,85	0,59	0,43	
	d		1,0	2,0	3,0	3,5	4,2	5,5	6,5	
$a = 22$ cm	V_1		1083	851	726	679	706	773	880	
$a = 12$ cm	V_2		679	556	521	525	588	676	817	
$a = 2$ cm	V_3		363	346	380	421	517	642	781	
$V_1 - V_2$			404	295	205	154	118	97	63	
$V_2 - V_3$			316	210	141	104	71	34	36	
N_2	p	2,85	1,91	1,25	0,82		0,54		0,35	0,26
	d	1,0	1,5	2,0	2,7		4,0		6,5	8,0
$a = 22$ cm	V_1	1119	925	849	740		720		791	965
$a = 12$ cm	V_2	667	567	509	533		592		723	984
$a = 2$ cm	V_3	321	333	363	411		513		694	930
$V_1 - V_2$		452	358	340	207		128		68	— 19
$V_2 - V_3$		316	234	146	122		79		29	54

dabei immer, dass es sich um eine Durchdringung nur der Glimmlichter, nicht aber der Hittorfschen Dunkelräume handelt, und dass die Durchdringung desselben Raumes zeitlich nacheinander stattfindet. Auch treten die Umkehrungen immer schon bei so hohen Drucken und so kleinen d auf, dass die Anoden der jedesmaligen Entladungen bei den hier eingehaltenen Abständen a noch vollkommen ausserhalb ihrer eigenen zugehörigen Glimmlichter liegen, wie schon das Vorhandensein einer merklich ausgedehnten Anodensäule und die Controle im Drehspiegel erkennen lassen. Das Phänomen ist also nicht etwa auf die bekannte, in neuester Zeit von Herrn Wehnelt[1])

[1]) A. Wehnelt, Wied. Ann. **65**, p. 521 f., 1898.

Digitized by Google

durch Messungen genauer verfolgte Potentialsteigerung zurückzuführen, welche eintritt, wenn man die Anode durch ihr eigenes Glimmlicht hindurch gegen den Dunkelraum der der gleichen Entladung angehörenden Kathode voranschiebt.

5. Verhalten gekreuzter Entladungen. — Bei allen bisher verwendeten Entladungsröhren lagen sich die Elektroden direkt gegenüber und es war die eine von der anderen aus sichtbar; jede Elektrode wird also, auch wenn sie Anode ist, von Kathodenlicht getroffen. Nun ist bekannt, wie stark elektrische Entladungen, namentlich in gasverdünnten Räumen durch die von der Kathode ausgehenden Strahlungen, das ultraviolette Licht der Glimmlichtstrahlen, bei tiefen Drucken durch die Kathoden- und Röntgenstrahlen beeinflusst werden. Es war demnach zu untersuchen, ob die oben beschriebenen Ergebnisse eine Modification erfahren, wenn die Elektroden so angeordnet werden, dass sie sich nicht direkt gegenüber stehen und die genannten Strahlungen nicht von einer zur anderen übergehen können, wofür schon das Dazwischentreten der Glaswände des Rohres selbst genügt. Insbesondere war zu prüfen, ob die beschriebene Umkehr nur eintritt, wenn die Glimmlichtstrahlen gegen einander geschickt werden, oder ob die spannungssteigernde Wirkung auch eintritt, wenn diese Strahlen etwa rechtwinklig gegen einander verlaufen.

Um beide Fälle bei demselben Drucke in dem gleichen Entladungsrohre direkt mit einander vergleichen zu können, wurde das Kreuzrohr Fig. 4 verwendet, welches aus vier rechtwinkelig gegen einander stossenden, je 10 cm langen, 2,5 cm weiten Cylinderröhren besteht; alle vier Arme tragen genau gleiche Scheibenelektroden von 2,0 cm Durchmesser, welche so genau als irgend möglich gleichweit (6,5 cm) von dem Kreuzungspunkte der Rohraxen entfernt angebracht sind.[1])

[1]) Das Rohr ist mit grosser Sorgfalt in dem glastechnischen Institute von Louis Müller-Unkel, jetzt Müller-Uri in Braunschweig hergestellt worden und hat auch bei genauester Prüfung keine Ungleichartigkeit seiner einzelnen Teile erkennen lassen.

Digitized by Google

Die Rohraxen liegen in einer Ebene; senkrecht zu derselben verläuft das zur Evacuation angesetzte Biegerohr *(b)*.

Schliesst man die Punkte *ab* oder *cd* an den Hochspannungstransformator an, so wirkt der Entladungsapparat wie eine der bisher benutzen cylindrischen Röhren; werden *ac*, *cb*, *bd* oder *da* angeschlossen, so erhält man gekreuzte Glimmlichter.

Sowie die Glimmlichter von irgend einer Seite her bis zur Mitte bei den aufeinander folgenden Phasen

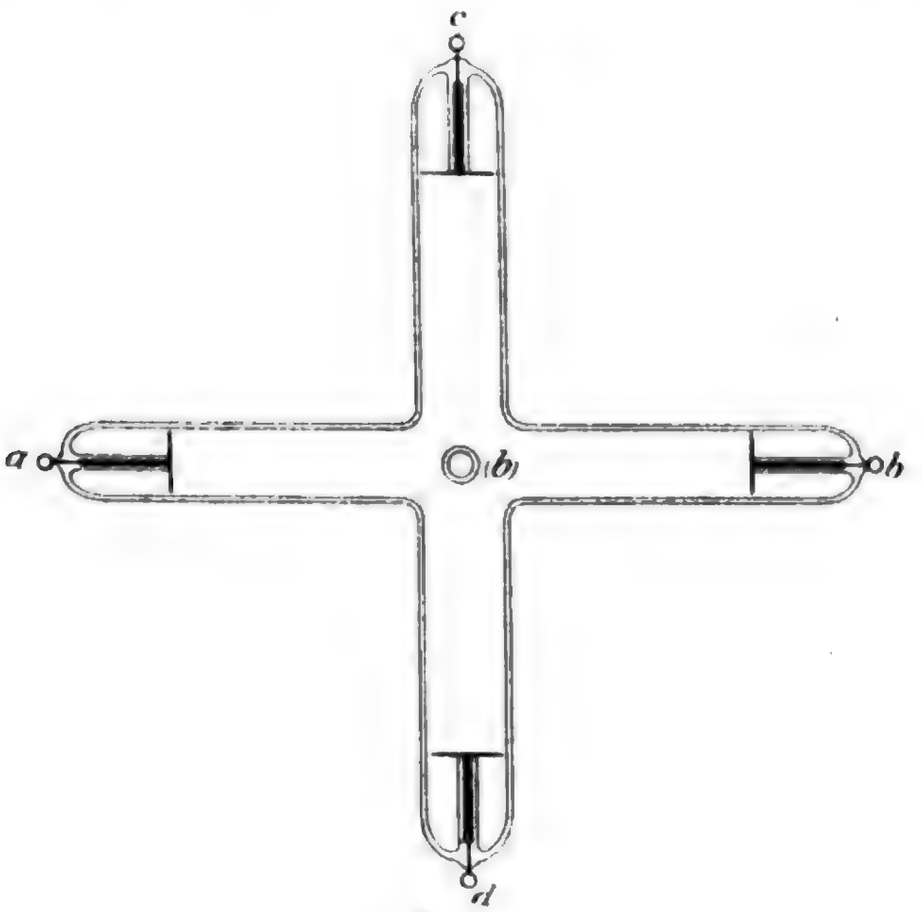


Fig. 4.

der Wechselstromentladungen vordringen, tritt die Umkehr ein, gleichgiltig, ob einander gegenüber liegende Elektroden benutzt werden, oder die Entladungsbahnen sich kreuzen.

Die Abweichungen der gemessenen elektrischen Grössen bei dem einen oder anderen Entladungswege von einander liegen stets innerhalb der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Es sind also nicht die Glimmlichtstrahlen selbst,

Digitized

etwa eine Art Nachleuchten derselben, welche die Erscheinung bedingen, sondern eine nachdauernde Veränderung in dem von ihnen durchstrahlten Gasraume. Auch auf die Rolle, welche man den Wandladungen der Röhre hierbei zuzuschreiben etwa geneigt sein könnte, werfen die genannten Versuche Licht. Diese Ladungen müssen offenbar im Falle gekreuzter Entladungen wesentlich anders verteilt sein, als in dem Falle direkter Entladungen, wie sie in den früher benutzten Röhren vorliegen.

6. Zwei gleiche Cylinderröhren in Parallelschaltung. — Mit Hilfe der Spannungssteigerung in Folge von Vorgängen bei der Entladung selbst innerhalb desselben Rohres musste es möglich sein, eine Art Auto-Ventilwirkung zu erzielen, d. h. die Entladung zu veranlassen, sich selbst von einem von ihr bisher allein eingenommenen Entladungswege abzudrängen und z. T. in einen parallel geschlossenen mit hinüber zu gehen. Dieser Versuch gelang.

Zwei einander vollkommen gleiche Cylinderröhren Fig. 1 R_1 und R_2 werden neben einander nach dem Schaltschema Fig. 5 in den Hochspannungswechselstromkreis eingeschaltet; die von dem Transformator TT kommenden Kabel wurden zwischen beiden Röhren so verzweigt, dass beiden der Strom durch kurze gleichlange und gleichdicke Leitungen von beiden Seiten her zugeführt wurde.

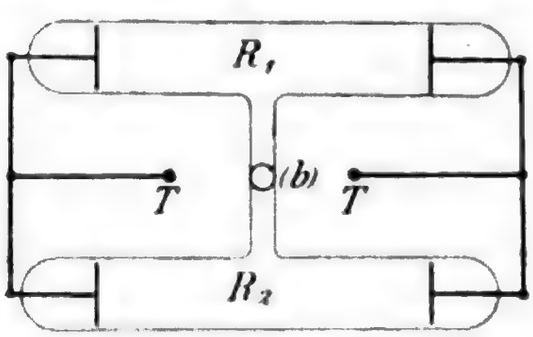


Fig. 5.

Dass sowohl die Röhren wie die Zuleitungen zu beiden wirklich als fast vollkommen identisch betrachtet werden konnten, wurde daran erkannt, dass bei höheren Drucken bald die eine, bald die andere Röhre aufleuchtete, ohne dass eine derselben irgendwie in auffallender Weise bevorzugt wurde.[1])

[1]) Bei Füllung mit Luft und im Anfange, als die Röhren eben frisch an die Pumpe angesetzt worden waren, konnte der schmale röthliche

Digitized by Google

Bei tieferen Drucken wurde die Verteilung der Entladung insofern stabiler, als die Entladung bei Stromschluss immer mehr dasjenige Rohr bevorzugte, welches schon vorher geleuchtet hatte. In demselben waren die Elektroden warm geworden und es ist bekannt, wie eine Entladung das Eintreten der nachfolgenden erleichtert, entweder dadurch, dass die Elektroden gereinigt und aufgelockert sind, oder durch Bildung von Jonen (vergl. die Anregbarkeit von elektrodenlosen Röhren in elektrischen Wechselfeldern). Näherte man sich dem von uns als „Umkehrdruck" bezeichneten Druckwert, so setzte die Entladung nach jeder Unterbrechung mit Bestimmtheit immer wieder in demselben Rohre ein, dessen Elektroden dadurch sehr heiss gemacht werden konnten. In dem Momente aber, wo der rotierende Spiegel zeigte, dass die äussersten Glimmlichtspitzen nach einander von beiden Seiten her die Mitte des Rohres trafen, begann das andere Rohr regelmässig mitzuleuchten, die Entladung ging gleichzeitig durch beide Röhren. Wiewohl also die Röhre, welche bis dahin den Ausgleich allein vermittelt hatte, erheblich prädisponiert war auch zur weiteren Stromführung, setzte doch die Entladung im genannten Augenblicke in dem anderen Rohre mit kalten Elektroden und ohne die unterstützende Wirkung vorhergehender Entladungen ein, augenscheinlich, weil sich in dem ersten Rohre bei der Begegnung der Glimmlichter die zur Entladung nötige Spannung erheblich steigert. Es ist hier wie in allen früheren Fällen, als ob sich in diesem Momente

Lichtfaden, der von den mit einem bläulichen Glimmlichtbüschel bedeckten Elektroden nach der Rohrmitte zu sich erstreckte, leicht durch äussere Ableitungen derart beeinflusst werden, dass die Entladung von dem einen Rohre auf das andere übersprang. Ging die Entladung etwa durch R_1, so genügte das Anlegen eines 4 cm breiten Staniolstreifens an R_1 in der Nähe der Elektroden, um hier die Entladung sofort erlöschen und durch R_2 hindurch gehen zu lassen. Bei späteren Versuchen, als die Röhren trockener waren, sich Quecksilberdampf in reichlicherer Menge von der Pumpe her in sie hineingezogen hatte, zeigten die Entladungen auch bei hohen Drucken nicht mehr diese Empfindlichkeit.

Digitized by Google

der Gasdruck in dem stromdurchflossenen Rohre erhöhe. Dass diese Druckerhöhung aber nur eine scheinbare ist, wurde durch sehr häufige Controlen an dem Manometer nachgewiesen; jedenfalls sind die durch die Entladung von den Elektroden etwa losgerissenen Spuren von Gasresten bei weitem nicht hinreichend, um die Umkehr und die im vorliegenden Falle damit in Verbindung stehende Ventilwirkung herbeizuführen. Durch die Wirkung schon eines schwachen transversalen Magnetfeldes wurde die Entladung in einem Rohre ausgelöscht, angelegte Ableitungen riefen sie wieder hervor.

Also nicht einfach deshalb, weil ein gewisser Druckwert erreicht wird, tritt die Umkehr, die Spannungssteigerung und Stromabnahme ein, sondern, weil sich im Rohre selbst gewissermassen elektromotorische Gegenkräfte entwickeln. Denn sonst wäre kein Grund vorhanden, warum die Entladung auf die andere Röhre überspringen sollte, in der ja genau der gleiche Gasdruck herrscht. Durch die Entladung selbst muss also ein Hindernis geschafft werden. Das Auftreten der Gegenkraft ist an den Moment gebunden, wo das Glimmlicht der einen Entladung gezwungen wird, in einen Raum einzudringen, den vorher das Glimmlicht einer anderen Entladung, wenn auch nur zum kleinen Teile, inne gehabt hatte. Der Process der Auslösung der eigentlichen, sichtbaren Entladung wird demnach in den vordersten Saum des Glimmlichtes verlegt, wo auch anderweitige Beobachtungen den Sitz des eigentlichen Ausgleiches beider Elektricitäten vermuten liessen.

Der genannte Ventilversuch gelingt mit allen Gasen, besonders gut mit Luft, Stickstoff, Kohlensäure und Wasserstoff. Das Mitleuchten einer parallel geschalteten gleichbeschaffenen Entladungsröhre giebt ein sehr einfaches und empfindliches Kriterium an die Hand zur Entscheidung der Frage, wann man beim Evacuieren bei dem Umkehrdrucke U angelangt ist.

So ergab sich z. B. bei einer Versuchsreihe mit Stickstoff U zu 0,70 mm, bei einer Reihe mit denselben Röhren bei Füllung mit Kohlensäure zu 0,47 mm. Das Verhältnis dieser

Digitized by Google

Umkehrdrucke ist 1,49, das ist sehr nahe dasselbe wie das Verhältnis der freien Weglängen bei demselben Drucke: 1,46. Hierdurch wird das schon in § 1 ausgesprochene Gesetz bestätigt.

Was die Erklärung des im Vorstehenden nach verschiedenen Seiten hin studierten Phänomens betrifft, so würde man bis vor Kurzem wahrscheinlich zu andauernden Aetherbewegungen gegriffen haben, welche die Kathodenphänomene begleiten sollten. Seit indessen für die Ueberzeugung sichere, namentlich auch quantitative Anhaltspunkte gewonnen worden sind, dass die Canal- und Kathodenstrahlen aus positiv bezw. negativ geladenen kleinsten Teilchen bestehen, die mit grosser Geschwindigkeit von den Elektroden los- und in den Gasraum hineingeschleudert werden, wird man eher geneigt sein, an das Auftreten ähnlicher Teilchen, etwa Jonen, und eine Art Diffusionsprocess derselben durch das Gas hindurch zu denken. Die Production solcher Teilchen muss auch schon bei höheren Gasdrucken stattfinden, wenn sie hier auch in Folge häufigerer Zusammenstösse mit den elektrisch neutralen Gasmolekülen sehr bald ihre grossen translatorischen Geschwindigkeiten einbüssen, und daher nicht zu dem Phänomen ausgedehnterer Strahlungen mit geradliniger Fortpflanzung führen können. Herr E. Riecke hat eine, wie mir scheint, höchst beachtenswerte Theorie der Gasentladungen in diesem Sinne angedeutet.[1]) Auf Grund der Annahme, dass den unelektrischen Molecülen des Gases positive und negative, einwertige Jonen in verhältnismässig kleiner Zahl beigemischt sind, wird es ihm möglich, auf den Elektricitätsausgleich in den Gasen analoge Betrachtungen in Anwendung zu bringen, wie sie ihn zu einer molecularen Theorie der Diffusion und Elektrolyse geführt hatten. Aus Beobachtungsdaten der Herren Hittorf und Warburg leitet er ab, dass die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen an der Kathode für die angenommenen Jonen beträchtlich kleiner

[1]) Ed. Riecke, Wied. Ann. **63**, p. 220, 1897.

Digitized by Google

als für die Molecüle neutraler Gase ist. Die mit grösseren als den mittleren molecularen Geschwindigkeiten behafteten positiv geladenen Teilchen, deren Concentration an der Kathode relativ sehr gross ist, und die, wie die Messungen des Potentialgefälles zeigen, das ganze Glimmlicht erfüllen, müssen verhältnismässig rasch durch das Gas hindurch diffundieren. Die erhöhte Zahl ihrer Zusammenstösse mit den Gasmolecülen verhält sich so, als ob das Gas entsprechend dichter, der Gasdruck grösser wäre. In der That wirkt die Begegnung der Glimmlichter nach einander in der Mitte des Rohres ganz im gleichen Sinne wie eine Druckerhöhung, wie namentlich aus den in § 6 beschriebenen Versuchen hervorgeht: Die Spannung wird erhöht, die Stromstärke herabgedrückt, gerade, als ob man von dem „Umkehrdrucke" nicht zu niedrigen Drucken überginge, wie es thatsächlich der Fall ist, sondern zu höheren. Dass die bis in die vordersten Spitzen des Glimmlichtes vorgedrungenen, mit freier positiver Ladung versehenen Teilchen, welche hier eine merkliche räumliche Dichte der $+E$ bedingen, auch noch eine gewisse Zeit lang in dem Gase verbleiben, ehe sie sich etwa an die Wände anlagern, scheint mit Rücksicht auf die endliche Diffusionsgeschwindigkeit wahrscheinlich. Eine positiv geladene Glimmlichtsäule findet aber in einem z. T. mit solchen $+$ Jonen bereits erfüllten Gasraume offenbar andere Bedingungen zu ihrer Ausbildung vor, als in einem nur von neutralen Gasmolecülen eingenommenen Raume; dass dazu höhere Spannungswerte erforderlich sind, folgt aus der elektrostatischen Abstossung der bereits vorhandenen und der neuen Teilchen, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit durch denselben Raum getrieben werden sollen.[1]) Daher die Spannungssteigerung bei dem Umkehrpunkte, welche eine Verminderung der Stromstärke zur unmittelbaren Folge hat. Diese an sich unsichtbaren Diffusionsvorgänge der mit freier Ladung versehenen

[1]) Da diese relativ stärker bewegten Teilchen nicht zu gleicher Zeit die leuchtenden zu sein brauchen, so ist nicht zu verwundern, dass das Spectroskop keine Linienverschiebungen zeigt.

Digitized by Google

und schon bei der ersten Entladung in das Gas hineingeschleuderten Jonen haben daher einen maassgebenden Einfluss auf die Ausgestaltung des sichtbaren Teiles der Entladung, das Vorschiessen der Glimmlichtsäule, die Abschnürung der Anodensäule u. s. w.[1])

So dürfte die Rieckesche Theorie im Stande sein, eine Erläuterung der in Rede stehenden Erscheinung zu geben. Dieselbe tritt hier bei Anwendung des Hochfrequenzstromes besonders auffallend zu Tage. Die genannten intermolecularen Vorgänge müssen aber auch bei einer Aufeinanderfolge gleichgerichteter Entladungen in Wirksamkeit treten. Erregen wir durch den Oeffnungsstrom eines Inductoriums, durch eine Influenzmaschine oder eine Hochspannungsbatterie, so folgt eine grosse Zahl von Einzelentladungen, — im letzteren Falle vielleicht unendlich viele — gleichsinnig aufeinander. Durch jede einzelne werden + Jonen in den vom Glimmlicht eingenommenen Gasraum hineingeschleudert. Daher kann auch hier bei fortschreitender Evacuation die Umkehrerscheinung auftreten, das Spielen der Entladung selbst wirkt wie Druckerhöhung, was gelegentlich auch schon beobachtet wurde. Ebenso ist das hier verwendete Zeitintervall nicht das einzige, bei dem die Erscheinung beobachtbar ist; da die Ladung der Glimmlichtatmosphäre sich längere Zeit, wenn auch mit rasch abnehmender Raumdichte, erhält, so lassen sich deren Wirkungen auch schon bei langsamerem Zeichenwechsel nachweisen, deutlicher treten sie natürlich bei höheren Frequenzen auf, vergl. auch S. 528.

Für die letztgenannten Ausführungen sprechen eine Reihe von anderweitigen Erfahrungen: 1. Mit Hilfe des hochempfindlichen Neesenschen Verdampfungscalorimeters war es den Herren A. Paalzow und F. Neesen[2]) gelegentlich ihrer

---

[1]) Auch Herr A. Righi (Mem. della R. Acc. di Bologna (5), **3**, p. 115, 1893; Beibl. **17**, p. 978, 1893) hält eine Erklärung seiner Resultate über Sondenpotentiale durch die Annahme für möglich, dass sich um jede Elektrode (und hauptsächlich um die Kathode) eine Atmosphäre von elektrisiertem Gas bildet.

[2]) A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. **56**, p. 276 u. p. 700, 1895.

Digitized by Google

Untersuchung über den Durchgang der Elektricität durch Gase möglich, auch die elektrischen Grössen für eine einzige Entladung bei verschiedenen Drucken zu messen. Betrachtet man die hierbei erhaltenen, a. a. O. p. 298 in Tabelle I zusammengestellten, in Fig. 5 graphisch veranschaulichten Werte, so erkennt man, dass ein Minimum der Spannung (durch W/Q gemessen), wie es unserer „Umkehrungserscheinung" entspricht, absolut nicht angezeigt ist. Liessen aber die genannten Forscher den Strom ihrer Hochspannungsbatterie während 20 Secunden durch dieselben Entladungsröhren gehen (p. 298, Tabelle II, Fig. 6), so trat die Maximumserscheinung des Stromes, das Minimum der Spannung (W/Q) deutlich hervor, vergl. p. 301. Auch die Coincidenz beider Punkte ist ihnen bei direkten Messungen nicht entgangen, vergl. p. 289.

2. Legt man eine Entladungsröhre an eine ergiebige Spannungsquelle, so beobachtet man oft, dass die typische Lichterscheinung sich nicht sofort herstellt; mitunter erfolgt die Ausbildung so allmählich, dass man ihre einzelnen Stadien mit dem Auge verfolgen kann u. s. w. —

Die obigen Andeutungen über die Art des Zustandekommens der Erscheinung mögen genügen; wichtiger erscheint mir der Hinweis, dass durch dieselbe eine Reihe früher beobachteter, seither noch der Deutung harrender Phänomene auf eine sehr einfache Weise erklärt wird; ich führe nur die folgenden an:

1. Die älteste Beobachtung über eine Nachdauer oder ein Vorherrschen der Kathodenerscheinung rührt wohl von Herrn A. Schuster[1]) her. Er fand bei seinen eingehenden Studien über das Sauerstoffspectrum, dass das für die Kathodenerscheinung in Sauerstoff charakteristische Licht bei einer Umkehr des Primärstromes des erregenden Inductoriums noch eine Zeit lang andauert an derjenigen Elektrode, welche durch die Umkehr Anode geworden, vorher aber Kathode gewesen war; erst allmählich, d. h. nach mehreren Entladungen tritt das für

[1]) A. Schuster, Phil. Trans. London, **170**, P. I, p. 41, 1879.

Digitized by Google

die Anodenerscheinung charakteristische Licht an der neuen Anode auf. Schusters Röhren hatten enge capillare Verbindungsstücke zwischen den Elektrodenräumen, durch die nur eine verhältnismässig langsame Diffusion hindurch stattfinden konnte. Wendet man so geringe Wechselzahlen, wie sie sich beim Inductorium durch Commutieren eben nur herstellen lassen, an, so bedarf man enger Capillaren, die den Diffusionsstrom genügend verlangsamen, um die Erscheinung hervorzurufen; bei den 800—1000 Wechseln in der Secunde, wie ich sie anwendete, erscheint das Schustersche Phänomen in jeder noch so weiten Röhre.

2. Herr E. Wiedemann und ich selbst[1]) beobachteten in dem Hochfrequenzfelde des Endcondensators eines einmal überbrückten Lecherschen Drahtsystems, dass irgend ein elektrodenloses, mit verdünntem Gase gefülltes, in dem Wechselfelde leuchtendes Glasgefäss in dem Momente erlischt, in welchem sich die von beiden Seiten her bei abnehmenden Drucken vorrückenden Glimmlichter in seiner Mitte begegnen. Die Folge davon war, dass kleinere Entladungsgefässe, bei denen dies früher eintrat, schon bei höheren Drucken erloschen als grössere, bei denen die Glimmlichter die den tieferen Drucken entsprechende grössere Ausbreitung annehmen konnten, ehe die Begegnung stattfand; kasten- oder cylinderförmige Gefässe leuchteten länger, wenn sie mit der grösseren Längskante, als wenn sie mit der kürzeren Breitseite den Kraftlinien parallel gestellt wurden; das Gas leuchtet hell auf, wenn man die eben sich begegnenden Glimmlichtstrahlen durch einen Magneten zur Seite biegt, so dass sie nicht mehr zusammentreffen u. s. w. Wir haben s. Z. diese auffallenden Erscheinungen beschrieben, ohne im Stande zu sein, für dieselben eine befriedigende Erklärung zu geben. Dieselbe folgt aus dem Obigen. In dem Momente der Begegnung beginnt die zum Unterhalten der Entladung nötige Spannung (genauer gesagt der nötige Spannungsgradient) erheblich zu wachsen in Folge der unsichtbaren Nach-

[1]) H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. 62, p. 182, 1897.

Digitized by Google

wirkung der eben vorhergehenden sichtbaren Entladung; bei der sehr viel schnelleren Aufeinanderfolge der Einzelerregungen bei dem Lecherschen System ist die Spannungssteigerung und Abnahme der Stromstärke noch viel ausgeprägter als in den oben angeführten Tabellen für die hier angewendete viel niedrigere Frequenz. Das Lechersche System stellt aber an seinem Endcondensator nur eine ganz bestimmte, und zwar verhältnismässig kleine Spannungsamplitude zur Verfügung. Folglich muss das in denselben gebrachte Entladungsgefäss in dem Momente erlöschen, in welchem erheblich höhere Spannungswerte erfordert werden, und dieses findet statt, wenn sich die Glimmlichter begegnen; dieses wiederum hängt in unmittelbar ersichtlicher Weise von den Dimensionen der Gefässe ab.

3. Eigentümliche Rückstauungsphänomene der Entladung hat Herr J. Monckman[1]) an rechteckig gebogenen Entladungsröhren beobachtet, an denen an symmetrischen Stellen die die Elektroden enthaltenden Räume seitlich angeschmolzen waren, an Röhren also, welche der Entladung zwei völlig gleichartige und gleichlange Wege darboten. Wird die Entladung eine Zeit lang den einen Weg geschickt (Ableitungen bestimmen den Entladungsweg) und commutiert man, so geht die Entladung innerhalb gewisser Drucke niemals denselben Weg im umgekehrten Sinne, sondern schlägt stets den anderen, vorher nicht betretenen Weg ein. Durch die ersten Entladungen werden Jonen in den ersten Entladungsweg geschafft, welche sich durch Diffusion verbreiten und in dem neutralen Gase eine längere Zeit verbleiben. Dadurch erschweren sie allmählich immer mehr diesen Weg, sie wirken so, als ob sich hier der Druck erhöhte. So lange Entladung auf Entladung im gleichen Sinne folgt, überwiegt die Förderung, welche Erwärmungen der Gasstrecke u. s. w. auf den Entladungsvorgang selbst ausüben. Wird aber der Entladungsstrom unterbrochen, so ist es nach der Commutation der Entladung (innerhalb der entsprechenden Druckgrenzen) leichter den anderen jonenfreien

[1]) J. Monckman, Cambridge Phil. Soc. 9, P. IV, p. 216, 1897.

Digitized by Google

Weg zu gehen. Der Versuch hat viel Aehnlichkeit mit dem in § 6 beschriebenen; dieser lässt freilich die Bedingungen klarer übersehen und messend verfolgen. Da bei den Monckmanschen Röhren auch Ableitungen eine grosse Rolle spielen, so dürften hier die naturgemäss auftretenden, sehr kräftigen Wandladungen das Phänomen stark mit beeinflussen. Von diesen sind seine Versuche mit zwei Kugelpaaren in einer grossen Luftpumpenglocke frei, die zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie die Versuche in § 6 führten.

Digitized by Google

Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 12. November 1898.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, Excellenz, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die bayerische Akademie der Wissenschaften feiert heute das Namensfest ihres Protektors, Seiner königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser. Ich bin in der angenehmen Lage, über zahlreiche Zeichen des regen und warmen Interesses zu berichten, welches unser erhabener Protektor auch in diesem Jahre der Akademie und den damit verbundenen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates zuzuwenden allergnädigst geruht hat.

Für werthvolle Schenkungen an unsere Sammlungen und Förderung bayerischer Gelehrter bei Untersuchungen und Reisen verlieh Seine königliche Hoheit unterm 17. Juni 1898 den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael I. Classe dem Direktor der kaiserlich russischen mineralogischen Gesellschaft, Herrn Paul Wladimirowitsch Jeremejeff in St. Petersburg, und den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael II. Classe dem Direktor der wissenschaftlichen botanischen Anstalt in Buitenzorg auf Java, Herrn Dr. Melchior Treub.

Unterm 15. August 1898 verlieh Seine königliche Hoheit den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael dem Vollstrecker des

Digitized by Google

Testamentes des Dr. Dioneisios Thereianos, über welches reiche Geschenk ich in der Festsitzung im März dieses Jahres berichtet habe, Herrn Aristides Caracaris in Triest, sowie dem Sachwalter der Akademie in dieser Angelegenheit, Herrn Hof- und Gerichtsadvokaten Dr. Gustav Wolf Krauseneck in Triest. Es kostete viel Mühe und Arbeit, diese für unsere philosophisch-philologische Klasse so werthvolle Schenkung gerichtlich und finanziell zu ordnen. Nun können im kommenden Jahre für Arbeiten über Geschichte, Sprache, Literatur oder Kunst der Griechen von den ältesten Zeiten bis zur Eroberung Konstantinopels durch die Türken aus dem Thereianos-Fond Preise vertheilt werden.

Auch die von Sr. Excellenz dem Herrn Staatsminister Dr. von Landmann wärmstens befürworteten und vom bayerischen Landtage gut geheissenen Zuschüsse für die Kryptogamensammlung des pflanzen-physiologischen Instituts, die Erhöhung der Realexigenz der mineralogischen Sammlung, des Münzkabinets, des Gypsmuseums, des physikalisch-metronomischen Instituts und der zoologisch-zootomischen Sammlung wurden allerhöchst genehmigt, ebenso ein ausserordentlicher Zuschuss von 40000 M. für Ergänzung der mathematisch-physikalischen historischen Sammlung.

Die Pflanzengruppe der Orchideen hat in neuerer Zeit an Bedeutung gewonnen. Unser hochverehrtes Ehrenmitglied, Ihre königliche Hoheit Prinzessin Dr. Therese von Bayern schenkte dem botanischen Garten verschiedene Orchideen aus Brasilien. Nachdem bis jetzt der botanische Garten nur sehr mangelhaft dafür eingerichtet war, bewilligte das kgl. Kultusministerium eine entsprechende Summe für Orchideenkultur.

Unser Mitglied Herr Prof. Dr. Göbel, Konservator des pflanzen-physiologischen Instituts, hat den kühnen Entschluss gefasst, auf eigene Kosten nach Ceylon und Australien zu reisen und hat die Reise bereits im August d. J. angetreten. Falls er Gelegenheit findet, Demonstrations- und Untersuchungsmaterial

Digitized by Google

für das pflanzen-physiologische Institut zu erwerben, konnten ihm für diesen Zweck aus Mitteln der Akademie 3000 M. zur Verfügung gestellt werden. Das kgl. Staatsministerium für Kirchen- und Schulangelegenheiten hat durch Vermittlung des kgl. Staatsministeriums des kgl. Hauses und des Aeussern dem Reisenden alle möglichen Verkehrserleichterungen verschafft. — Ich erinnere daran, dass vor 80 Jahren ein bayerischer Botaniker und Mitglied unserer Akademie, Herr von Martius mit dem Zoologen Spix nach Brasilien reiste und mit botanischen Schätzen reich beladen heimkehrte. Wir begleiten nun Göbel mit unsern besten Wünschen nach Australien und hoffen auf seine glückliche Heimkehr im kommenden Jahre.

Eine andere wissenschaftliche Reise für zoologische und embryologische Zwecke nach dem grossen Ozean an der Westküste Nordamerika's konnte durch Verwendung von Mitteln aus der Münchener Bürgerstiftung und der Cramer-Klett-stiftung unternommen werden. Unsere Mitglieder, die Herren von Kupffer und Hertwig, beauftragten den Assistenten der zoologisch-zootomischen Sammlung, Herrn Dr. F. Doflein, dahin zu reisen, namentlich, um die Entwicklungsverhältnisse von Bdellostoma Dombeyi, eines Repräsentanten der niedersten Wirbelthiergruppe, der Myxinoiden zu beobachten, der nur an dieser Küste vorkommt. Herr Dr. Doflein ist bereits wieder glücklich heimgekehrt. Auf seiner Reise besuchte Dr. Doflein zuerst Barbados und daran anschliessend eine Reihe der kleineren Antillen, namentlich auf Martinique einen Monat verweilend. Daselbst wurden grössere Sammlungen von marinen Thieren angelegt, wobei hauptsächlich den Verhältnissen der Korallenriffe und des Planktons Beachtung geschenkt wurde. Doch wurden auch Landthiere gesammelt und einzelne in ihren Lebensgewohnheiten beobachtet. Ausschliesslich wurden letztere gesammelt während des kurzen Aufenthalts in Dominica, Nevis und San Christoforo und während des etwas längeren Aufenthalts auf St. Thomas. Auf der letzten Insel wurde der Reisende einige Zeit durch die mangelhaften Schifffahrtsverhältnisse aufgehalten, die durch den Ausbruch des spanisch-

Digitized by Google

amerikanischen Krieges bedingt waren. Die Weiterreise erfolgte längs der Küsten von Porto-Rico, Hayti und Cuba. Jedoch in Folge des Krieges war eine Landung nur in Hayti möglich. Ein kurzer Besuch von Cap Haytien und Port au Prince war in Folge des kurzen Aufenthalts nicht zu wissenschaftlichen Untersuchungen auszubeuten. Sodann führte die Reise nach Mexiko und erfolgte die Landung auf dem amerikanischen Kontinent in Tambico. Ein 3 wöchentlicher Aufenthalt hauptsächlich in der Gegend der Hauptstadt diente dem Reisenden mehr zu seiner speziellen Information als zu wissenschaftlichen Studien. Das Hauptziel der Reise — Kalifornien — wurde auf dem Wege durch Central-Mexiko und Arizona erreicht. Daselbst fand Dr. Doflein zu Pacific Grove in der biologischen Station der Universität von Palo Alto freundliche Aufnahme. Seine speziellen Forschungszwecke jedoch erreichte er ohne eine weitgehende Ausnützung der Hilfsmittel dieses Instituts. Es gelang ihm ausser der Beobachtung des lebenden Objektes ein reiches Material von Eiern und Embryonen von Bdellostoma zu sammeln und sorgfältig konservirt nach München zu bringen. Ausserdem wurden viele Spezies der dortigen Land- und Meerfauna gesammelt. Mit freudiger Anerkennung erwähnt Dr. Doflein die Liebenswürdigkeit der Professoren und Assistensten des Laboratoriums in Pacific Grove im persönlichen Umgang. Die Weiterreise erfolgte über die nördliche Route, wobei der Reisende zu seiner Information die Museen und Universitäts-Einrichtungen in S. Francisco, Chicago, Washington und New-York besuchte, ferner den Columbiafluss, den Yellowstone Park, den Niagara und die hauptsächliche marine Station der amerikanischen Biologen in Woods Holl in Massachusetts. Die Rückreise ging auf einem deutschen Dampfer über London glücklich von statten. Dr. Doflein ist mit Ausarbeitung eines eingehenden Reiseberichtes an die Akademie befasst.

Unserer paläontologischen Sammlung gingen wieder werthvolle Geschenke zu. Herr Dr. David Rüst in Hannover übergab eine von ihm hergestellte Sammlung von 1350 Dünn-

Digitized by Google

schliffen von Radiolarien der verschiedensten Arten, die Originalien zu seiner in der „Paläontographica“ veröffentlichten Abhandlung. Herr Kommerzienrath Stützel, dem unsere paläontologische Sammlung schon so viel verdankt, begab sich auf die Insel Samos und veranstaltete dort Ausgrabungen fossiler Thiere in grossem Maassstabe. Mit reicher Ausbeute zurückgekehrt, schenkte er uns, was in 73 Kisten verladen war.

Die Akademie verlieh Herrn Dr. Rüst und Herrn Kommerzienrath Stützel die höchste Auszeichnung, die sie zu verleihen hat, die goldene Medaille Bene merenti.

Zum Schlusse sei noch eines Unternehmens der kartellierten deutschen Akademien gedacht, bei welchem unsere Akademie durch unseren Delegirten, Herrn von Wölfflin, vertreten ist, des Thesaurus linguae latinae, welches Unternehmen ich bereits im vorigen Jahre bei dieser feierlichen Gelegenheit erwähnt habe. In dieser Richtung wurde rüstig weiter gearbeitet und ist der baldige praktische Abschluss der Arbeit gesichert, die viel Interessantes und Neues zu Tage fördern wird. Es wird kein gewöhnliches lateinisches Lexikon. Während bisher für unsere lateinischen Wörterbücher, auch die grössten, doch nur die bekanntesten Autoren herangezogen worden sind, weil ein einzelner Bearbeiter nicht mehr zu leisten vermag, beabsichtigt die von mehreren hundert Mitarbeitern unterstützte Thesaurus-Kommission die ganze Literatur bis gegen das Jahr 600 nach Christus auszubeuten, und zwar in der Textgestaltung, welche die neuesten kritischen Ausgaben gesichert haben. Dadurch werden zwar viele Wörter, als durch die handschriftliche Ueberlieferung nicht hinreichend geschützt und gestützt, in Wegfall kommen, aber sicher auch viele Tausend neue dem Wortschatz zugefügt werden. Vor Allem aber hat der Vertreter unserer Akademie den neuen Gesichtspunkt aufgestellt und zur Annahme gebracht, dass jeder Lexikonartikel die Geschichte und den Lebenslauf jedes Wortes geben soll, sein erstes Auftauchen, sein Wachsthum und sein Absterben, und namentlich die Veränderung und Entwicklung

Digitized by Google

seiner Bedeutungen. Denn wie schon Horaz gesungen hat, gleichen die Wörter den Baumblättern; sie fallen und grünen von neuem. Auch auf das Entstehen der romanischen Sprachen, der italienischen, französischen und spanischen Sprache, sowie auf viele ins Deutsche übergegangene Bezeichnungen und Ausdrücke wird der Thesaurus linguae latinae Licht werfen.

Die Kartellkommission musste jüngst für Abschluss ihres Werkes einen festen Sitz wählen. Sie hat München gewählt. Genau mit Ablauf des Jahrhunderts sollen die seit 1894 gesammelten Materialien im dritten Stockwerke unserer Akademie in 4 geräumigen Zimmern geordnet beisammen stehen und ein zahlreiches, aus allen deutschen Stämmen gemischtes Redaktionspersonal wird mit dem Jahre 1900 die Verarbeitung in 12 Folianten in Angriff nehmen. Aber auch nach Vollendung der Riesenarbeit werden die vielen tausend Schachteln mit Millionen von Zetteln als Repertorium aufgestellt bleiben, damit alle Anfragen der Gelehrten in prompter Weise erledigt werden können. Dadurch wird München für immer ein Centralsitz der lateinischen Studien bleiben, und damit auch ein Wunsch des seeligen Königs Max II. erfüllt sein, der München zu einem hervorragenden Sitz der Wissenschaft zu machen strebte.

Nun bitte ich die Herren Classensekretäre, die am 16. Juli vorgenommenen und von unserem Protektor allergnädigst bestätigten Neuwahlen von Mitgliedern kund zu geben.

Hierauf verkündeten die Classensekretäre die weiteren Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, folgende Wahlen für die mathematisch-physikalische Classe:

als ordentliche Mitglieder:

1. Dr. Robert Hartig, ordentlicher Professor der Anatomie, Physiologie und Pathologie der Pflanzen an der Universität München;
2. Dr. Alfred Pringsheim, ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Universität München;

Digitized by Google

als korrespondirende Mitglieder:

1. Dr. Charles Barrois, Professor der Geologie an der Universität Lille;
2. Dr. Lazarus Fuchs, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Berlin;
3. Dr. Sophus Lie, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Christiania.

Digitized by Google

Sitzung vom 3. Dezember 1898.

1. Herr Wilhelm Königs erstattet einen Bericht über die „Gedenkfeier des 50. Todestages von Berzelius“ am 7. Oktober d. J. in Stockholm, zu welcher er als Vertreter unserer Akademie vom Präsidium gesandt worden war.

2. Herr W. Dyck legt den ersten Theil der von den kartellirten Akademien zu Wien, Göttingen und München herausgegebenen „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“ mit einigen Worten über dessen Inhalt vor.

3. Die Herren Richard Hertwig und Carl v. Kupffer überreichen den von Herrn Dr. F. Doflein erstatteten Bericht über seine mit Unterstützung unserer Akademie gemachte „Reise nach Westindien und Nordamerika“, wobei er vor Allem Eier von Bdellostoma sammeln sollte.

Digitized by Google

Bericht über meine Reise nach Westindien und Nordamerika.

Ausgeführt im März bis August 1898 im Auftrage der k. b. Akademie der Wissenschaften

von **F. Doflein.**

(*Eingelaufen 3. Dezember.*)

I. Die Antillen.

Eine glückliche Seefahrt führte mich in den ersten Wochen des März von Southampton nach Barbados. Die See war besonders während des ersten Teils der Reise sehr unruhig, so dass unterwegs sehr wenige Oberflächentiere beobachtet wurden. Bei der Annäherung des westindischen Archipels mehrten sich dieselben und ich beobachtete besonders zahlreiche fliegende Fische, Delphine, Quallen. Sargasso war überaus häufig und oft zu starken Bänken vereinigt.

Barbados, die erste westindische Insel, welche ich besuchte, ist der Typus einer flachen, reich angebauten Tropeninsel. Bekanntlich scheiden sich die kleinen Antillen in eine östliche Kette flacher Inseln mit Korallenbildungen, und eine westliche Kette vulkanischer gebirgischer Inseln. Zu den ersteren gehört Barbados, und zwar zeigt sie in deutlichster Weise den Anteil der Korallen am Aufbau der Landfläche. Weit entfernt vom Ufer kann man noch deutlich erhaltene Riffüberreste erkennen, wie ich sie später auf der Insel St. Thomas in noch ausgeprägterer Form studieren konnte. Barbados ist in seinem gesamten anbaufähigen Areal ausgenützt und bietet somit dem Biologen bei

Digitized by Google

einem kurzen Besuch nicht viel auffallendes. Die marine Fauna, besonders auf den lebenden Korallenriffen und in deren Umgebung, scheint sehr reich zu sein. Am Lande konnte ich nicht viel erreichen. Vereinzelte Vögel, nicht selten Kolibris, wenige Schmetterlinge, Heuschrecken, Bienen und Gallwespen fielen mir auf und es gelang mir, einzelne davon zu sammeln. Auch Eidechsen waren zahlreich. Diese kurze Beobachtung gibt nur den Eindruck eines Tages in der trockensten Zeit des Jahres wieder; es war Mitte März, vor den ersten Regenfällen. Von einem Hügel aus liess sich erkennen, dass fast die ganze Insel mit Zuckerrohr angepflanzt ist; Rohrzucker wird trotz der starken Konkurrenz des Rübenbaues von hier aus noch in sehr grossen Mengen ausgeführt. Doch erfuhr ich später in Martinique, dass viel Melasse dorthin importiert und zu Rum verarbeitet wird.

Eine äusserst stürmische Nachtfahrt in einem kleineren Dampfer brachte mich nach St. Lucia, der nächsten nördlich gelegenen der kleinen Antillen. Hier überraschte mich eine Ueppigkeit der Tropenvegetation, wie sie nicht einmal in Martinique und Dominica gänzlich erreicht wird. Wie diese Inseln ist St. Lucia von vulkanischer Entstehung und sehr reich an kleinen Wasserläufen. Die Tierwelt ist reich und für Insekten und Vögel scheint St. Lucia ein ausgezeichnetes Sammelgebiet zu sein, kann sich jedoch nicht mit dem später zu besprechenden Dominica messen. Hier schon hörte ich viel von der berüchtigten Lanzettschlange reden, welche in ihrer Verbreitung bekanntlich auf St. Lucia und Martinique beschränkt ist. In St. Lucia ist es gelungen, sie durch Einführung der Mangus wenigstens in der Umgebung der grösseren Ansiedlungen gänzlich auszurotten. Hier Sammlungen anzulegen, erlaubte mir die Kürze meines Aufenthaltes nicht.

Von St. Lucia ist Martinique in wenigen Stunden erreicht. Wenn diese grosse Insel mit ihren stattlichen Bergketten in der Ferne auftaucht, so glaubt man zwei nahe vereinigte Nachbarinseln zu sehen; denn die Insel ist in ihrem mittleren Teile stark eingeschnürt und zudem sind die Gebirge beider

Digitized by Google

Hälften gerade in diesem Teile durch eine bedeutende Einsenkung von einander geschieden. Erst wenn man sich mehr genähert hat, erkennt man die weite Bucht von Fort de France, welche jene Einschnürung veranlasst. Die schönen Formen der Berge, deren Gipfel von Wolken fast stets umschattet sind, entzücken das Auge. Schon aus grosser Entfernung kann man an ihren Hängen mächtige Bäume erkennen. Die Berge verraten selbst dem Laienauge ohne weiteres ihren vulkanischen Ursprung; an geologischen Aufschlüssen wird man durch die alles überwuchernde Vegetation behindert.

Nachdem wir längere Zeit nicht fern von der Küste nordwärts gefahren waren, erreichten wir den Hafen von St. Pierre, wo ich für einige Zeit mich niederlassen wollte. Die Stadt St. Pierre, welche der Bedeutung nach der erste Platz der Insel ist, obwohl Fort de France offizielle Hauptstadt ist, stellt sich beim ersten Anblick sehr gross und stattlich dar.

Zahlreiche Neger und besonders Knaben in allen Schattierungen der Hautfarbe umschwärmten unser Schiff und tauchten nach Geldstücken. Ein furchtbares Lärmen und Schreien machte eine Verständigung fast unmöglich; dennoch kamen alle meine zahlreichen Kisten glücklich ans Ufer. Es ist überhaupt für Westindien zu bemerken, dass die ausschiffenden Neger gewissenhaft und geschickt sind; man darf sich durch die Begleiterscheinungen ihrer Thätigkeit nicht erschrecken lassen. Fehlt ein Stück des Gepäcks, so kann man meistens davon überzeugt sein, dass man es selbst an Bord vergessen hat.

Ein Begleitbrief, den mir die deutsche Botschaft in Paris besorgt hatte, machte mir die Zollbeamten, welche von vornherein sehr freundlich und höflich waren, noch gefälliger, so dass ich meine Kisten und Kasten ungeöffnet zum Hotel bringen konnte.

Das Hotel „des bains“ ist ein altes verwahrlostes Haus, welches in der alten guten Zeit der Sklaverei mit ziemlicher Pracht ausgestattet worden war; jetzt ist es sehr vernachlässigt; es wird offenbar kein Schaden ausgebessert, es fehlen Schlüssel, es ist überhaupt ächt westindisch, jedoch nicht unreinlich.

Digitized by Google

In den ersten Tagen sah ich mich in der unmittelbaren Umgebung von St. Pierre um, und suchte zu gleicher Zeit ein kleines Haus in der Nähe des Meeresstrandes zu mieten. Da ich aber nichts geeignetes fand, entschloss ich mich, im Hotel zu bleiben, wo man mir geeignete Räume überliess und wo ich ausserdem mit einem kühlen Hause die Vorteile einer centralen Lage verband. Trotzdem wäre es bei längerem Aufenthalt und besonders wenn man mit einem Genossen reist, weit geeigneter, ein eigenes Haus zu mieten.

Meine ersten Besuche galten den Wäldern, welche sich in einigen Schluchten der Stadt nähern und ausserdem dem botanischen Garten. Der letztere ist ebenso schön, als für den Neuling in den Tropen interessant. Dr. Nollet, der Direktor des Gartens, machte in der liebenswürdigsten Weise meinen Führer, da er aber selbst von dem Interesse für die Agrikulturbotanik gänzlich in Anspruch genommen wird, so konnte er mir in wissenschaftlicher Beziehung wenig Auskunft geben.

Dasjenige, was er mir jedoch von den Schädlingen der hervorragendsten tropischen Nutzpflanzen zeigte, war sehr merkwürdig und wissenswert. Es zeigte sich, dass auch hier Rostpilze ein Hauptkontingent der Schädlinge stellen, jedoch auch die Insektenwelt ist erheblich vertreten. Auf den Cafebäumen war sehr häufig die Raupe eines Microlepidopters, welche die Blätter desselben zerstört. Die Eier werden auf der Unterseite abgelegt, die Larve frisst grosse Stücke aus den Blättern heraus und verpuppt sich ebenfalls auf der Unterseite der absterbenden Blätter in einem Cocon. — Die Cacaobäume werden in den letzten Jahren häufig von einem langhornigen Käfer befallen; die Larve desselben lebt unter der Borke und hat die merkwürdige Gewohnheit, das lebende Gewebe des Baumes in Ringen auszufressen; indem sie so die Nahrungsleitung unterbricht, bringt sie den ganzen oberen Teil des angegriffenen Astes zum Absterben. Dieses Insekt hat in den letzten Jahren in westindischen Cacaopflanzungen wiederholt grossen Schaden angerichtet.

Der mit Nutzpflanzen bebaute Gartenabschnitt nimmt

Digitized by Google

übrigens nur einen sehr geringen Teil des botanischen Gartens ein. Im Grossen und Ganzen bietet derselbe den frischen Eindruck eines Stückes wilder Natur dar, ja man kann sagen, er besteht aus einem fast unberührten Urwald, in dem die menschliche Hand Lichtungen mit importierten Gewächsen bepflanzt hat. Er zieht sich an einer Schlucht einen Berg hinauf, ein schöner Bergbach durchbraust dieselbe und den Abschluss bildet ein gewaltiger Felsbrocken, der gänzlich mit üppiger Vegetation bekleidet ist. Zu seinen beiden Seiten stürzt das Wasser herab, auf der einen in einer prächtigen Cascade. Trotzdem ich in der trockenen Zeit Martinique besuchte, führten alle Wasserläufe sehr reichliche Fluten.

Ich habe noch oft den Garten und seine Umgebung aufgesucht, nicht nur wegen der prächtigen Szenerie, sondern auch der reichen Tierwelt zuliebe, welche dort hauste. Frösche und Schlangen, Spinnen, Skorpione, Skolopendren und Insekten aller Gruppen wurden von mir dort in grosser Menge gefangen. Der Blütenflor der Beete des angelegten Teiles, sowie das Wasser des Waldbachs lockten zahlreiche Tagfalter an, unter ihnen sehr schöne Papilioniden und Danaiden. Am Wasser waren Libellen sehr zahlreich; doch infolge deren Gewandtheit und des gefährlichen Terrains habe ich mehr Arten gesehen als erbeutet.

In den nächsten Tagen durchstreifte ich die Stadt und deren Umgebung, machte mancherlei wertvolle Bekanntschaften und warb einen schwarzen Fischer an, welcher sich sehr anstellig zeigte und mir von grossem Nutzen war.

Die Stadt St. Pierre ist durch ihre Lage und Bauart für das Auge sehr reizvoll; und wenn man sich nicht gerade in die Häuser und Höfe der armen Negerbevölkerung begibt, so hat man auch den Eindruck einer sauberen Stadt. Mit ihren Vorstädten umfasst sie eine weite Bucht, welche im Charakter ein wenig an den Golf von Neapel erinnert. Den Norden beherrscht ein schöngeformter Vulkan, der Mt. Pelée, welcher bis zum Gipfel in grüne Vegetation gehüllt ist. Wie alle Berge der Antillen zeigt er nur selten seinen Gipfel frei von

Digitized by Google

Bewölkung; die gewaltigen Wolkenmassen erzeugen stets prachtvolle und pompöse Landschaftsbilder. Wie der Mt. Pelée als isolierter Kegel, erhebt sich im Südosten der Piton du Carbet ebenfalls ein Berg von vulkanischem Ursprung; doch hat er sich seit unvordenklichen Zeiten nicht mehr gerührt, während der Mt. Pelée im Jahre 1853 einen leichten Ausbruch mit reichlichem Aschenregen hatte.

Die Stadt ist von zahlreichen Gärten umgeben, in denen alle Produkte der Tropen üppig gedeihen: auf meinem Tisch gab es stets in reicher Fülle Bananen, Ananas, Sapotillen, Mangos, Aleghetta Pears etc. Sonst sind die Berghänge und glatten Flächen weithin mit Zuckerrohrpflanzungen bedeckt. Obwohl die Zuckerkrise in ganz Westindien eine grosse Misere hervorgebracht hat, baut man auf Martinique noch sehr viel Rohr zur Rumproduktion an. Rum wird in ganz modern ausgestatteten grossen Fabriken in ausgezeichneter Qualität angefertigt und vermag immer noch Leute reich zu machen.

Während die Schluchten und die dem Innern zustrebenden Hügel vielfach an den unbebauten Stellen von Urwald und üppigen Gesträuchen erfüllt sind, ziehen sich der Küste entlang dürre Hügel. Dieselben sind mit einem stachlichen wilden Gestrüpp erfüllt, wechselnd mit rasigen Lichtungen und erinnern im Gesamteindruck sehr an die Macchien der mediterranen Region. Einen erheblichen Unterschied machte allerdings der trotz der trockenen Zeit sehr reiche Blumenschmuck: Mimosen blühten in verschiedenen Farben, ebenso Akazien mit furchtbaren, hohlen Dornen, welche aber hier keine Ameisen beherbergten. Dazwischen hie und da höhere Bäume, welche jetzt gerade blattlos waren und statt dessen über und über mit scharlachroten Blüten bedeckt waren. Um diese Bäume rankten sich zahlreiche Schlingpflanzen, die sog. indischen Bohnen, ferner blaue, weisse, violette und rote Convolvulaceen. Den Boden schmücken an einzelnen Stellen weisse und rote Blüten einer Phlox-artigen Pflanze. Alle diese Pflanzen sind ein Anzeichen, dass die Dürre hier nur temporär ist, während die dazwischen wachsenden Cakteen (Echinocactus und Cereus)

Digitized by Google

und Agaven schon verdächtiger sind. Derartige Trockenpflanzen scheinen sich auf Martinique immer weiter auszubreiten, wie sie das auf anderen Inseln der Gruppe schon in sehr hohem Masse gethan haben.

Dieses Gestrüpp wird von einer sehr zahlreichen Tierwelt belebt, unter welchen neben einzelnen Vögeln Eidechsen und Heuschrecken durch ihre Menge auffielen. Hie und da findet man eine schöne dunkle Schlange mit grell orangeroten Flecken, eine ungiftige Colubride.

Solche trockene Oertlichkeiten sind besonders in dem südlichen Teil der Insel, den ich etwas später besuchte, vorherrschend. Dort sind sie nach der Entwaldung der viel niedrigeren Berge durch deren relative Wasserarmut bedingt. Es nehmen dort die sog. Savannen weite Flächen ein: dürres mit kurzem Rasen bedecktes Gelände, das sich über Hügel und Einschnitte erstreckt; es wechseln mit den kahlen Flächen ausgedehnte Gebüsche, die hauptsächlich aus Akazien, Mimosen etc. zusammengesetzt sind. Doch auch in dieser Gegend entwickelt sich, wo Wasser sich findet und die Kultur ruht, eine üppige Tropenvegetation.

Die hohen Berge um St. Pierre und deren sämtliche Abhänge und Ausläufer bis gegen Fort de France hin sind noch mit dickem Urwald bedeckt, dessen Bestände an vielen Orten noch gewaltige Spuren des Cyklons von 1889 zeigen. Diese Waldbestände sind bei Fort de France durch sehr grosse Lücken unterbrochen; denn die Ebene östlich und südlich von dieser Stadt ist mit Anpflanzungen von Zucker und wenigem Kaffee ganz bedeckt. Im Süden sind dann die Berge wieder bewaldet; der Urwald steigt oft bis zum Meer hernieder, was der Landschaft viel romantischen Reiz verleiht. Denn die Küste ist steil und felsig. Dazwischen sind überall Thäler und Ebenen zum Anbau sehr ausgenützt. Man muss bedenken, dass die Insel eine Bewohnerzahl von etwa 180000 Menschen ernährt.

Bei einer Besteigung des Mt. Pelée lernte ich diese Waldregion und zum teil auch ihre tierischen Bewohner etwas genauer kennen. Leider war der zweite Teil dieser Bergfahrt

Digitized by Google

durch Nebel in den höheren Regionen und durch tropische Regengüsse beim Abstieg sehr beeinträchtigt, und so konnte ich nichts von der in diesen Regionen jedenfalls sehr reichen Insektenfauna beobachten. Ich lernte später die Bergfauna auf St. Kitts (St. Christoforo) kennen und der Reichtum der Höhen besonders an prächtigen Schmetterlingen liess mich jene Nebelhaube des Mt. Pelée umsomehr bedauern. Da ich jedoch meine hauptsächlichsten Anstrengungen der Erforschung mariner Tiere widmete, fand ich keine weitere Zeit, um jene Besteigung zu wiederholen.

Wenn man von St. Pierre aus den Mt. Pelée ersteigt, so führt der Weg zunächst lange Zeit durch das angebaute Gebiet; man passiert eine Anzahl von Zucker- und Rumfabriken, dann unendliche Felder, die mit Zuckerrohr bepflanzt sind. Dieses erstreckt sich bis hoch auf die Vorberge hinauf. Die Felder werden, je höher man steigt, immer häufiger von Waldparzellen unterbrochen. Man sieht auch hier öfter die alte Natur in verlassene Positionen der Kultur vordringen. Hie und da trifft man leicht gebaute Hütten, bewohnt von Negern, welche raschen Schrittes den alten Naturzuständen der afrikanischen Heimat in kultureller Beziehung wieder zustreben.

In etwa 400—500 m Höhe, doch wechselnd nach dem jeweiligen Vordringen der angebauten Region, beginnt der Urwald. Wir nahten demselben über eine Wiese an einer von Baumfarnen verschleierten Schlucht entlang klimmend. Er stellte sich an seinem Rand schwarz und undurchdringlich wie eine Mauer dar; die Stelle, wo der Pfad eintrat, erschien wie ein finsteres Loch und da die Sonne auf die Westseite des Berges noch nicht herüber gekommen war, so war der Wald lichtleer; unser Pfad erschien fast wie ein Gang im Bergwerk.

Als aber die Sonne herüber kam — sie schien mir an diesem Tag nur kurze Zeit — da flimmerte oben durch die Wipfel wunderbares Licht und ich konnte selbst ziemlich ferne Details erkennen. Ich war überrascht von der Pracht dieses Bergwaldes; denn vorbereitet durch die Schriften der meisten modernen Tropenreisenden, hatte ich Einförmigkeit und Farben-

Digitized by Google

armut erwartet. Statt dessen umgab mich ein Reichtum verschiedenartiger Formen, viele wundervolle Baumfarne und Palmenarten und herrliche uralte Riesenbäume. Dazwischen zahllose rote, gelbe, violette Farbflecke, von Blüten und farbigen Blättern herrührend. Der Wald beherbergt viele Arten von Bromeliaceen, welche durch ihre grell gefärbten Blattumfassungen um die Blüten die schönsten und farbigsten Blumen vortäuschen. Ferner fanden sich zahlreiche Aroïdeen, z. t. mit bunten Blättern, dann Nitidularien, Compositen und vor allem zahlreiche, schön blühende Pflanzen, welche sehr unseren vielgezüchteten Cannaarten gleichen. Dazwischen war der Waldboden von schönen grossblättrigen Farnen bedeckt; hier im Innern des Waldes gab es kaum mehr vereinzelte hochstämmige Baumfarne.

Dagegen fanden sich nicht selten kleine Krautpalmen; der Pfad oder vielmehr die Spur, welche wir verfolgten, war von Krautpalmsuchern getreten; es sind dies im gewöhnlichen Lauf des Jahres die einzigen Menschen, welche den Berg in seinen höheren Regionen betreten. Denn es herrscht eine geradezu unglaubliche Furcht vor der Lanzettschlange, der „fer de lance", unter allen Einwohnern der Insel. Gerade diese mittlere Waldregion soll ihr bevorzugter Schlupfwinkel sein, und bei der Beschaffenheit des Pfades konnte man jeden Moment befürchten, auf eine Schlange zu treten. Man sah meist den Ort nicht, wohin man den Fuss setzte; jeden Augenblick musste man über einen riesigen Baumstamm klettern. Die Spuren des grossen Cyklon sind hier in schrecklicher Weise zu sehen; ganze Lichtungen sind hier zwischen den alten Beständen gebildet, Lichtungen, die man aber nicht betreten kann, denn man würde in den Massen morschen Holzes, dem Gewirr von Schlingpflanzen und Aesten und Sträuchern bis über den Kopf versinken. Der Weg war sehr schwierig und zudem mit der steigenden Sonne durch eine wirkliche Treibhaustemperatur sehr anstrengend. Wir hatten Glück und wurden von keiner Schlange auf unserem Wege belästigt. Meine schwarzen Führer mit ihren nackten Füssen riskierten zwar eine grössere Gefahr,

Digitized by Google

waren aber beim Klettern in dieser Feuchtigkeit und Hitze mir weit überlegen, der ich schwere Bergschuhe trug. Meine Führer waren im gewöhnlichen Leben Krautpalmensammler.

Von Tierleben zeigte sich sehr wenig; einzelne Vögel flogen schreiend über den Pfad, einzelne Eidechsen liessen sich sehen; Kolibris schwirrten um Blüten der Lichtungen. Als wir jedoch in die Region der Wolken und des Nebels gelangten, reduzierte sich das gesamte sichtbare Leben auf einige wenige Schnecken am Wege und auf den Baumstämmen. Der erhoffte Insektenreichtum der Lichtungen schlummerte, vor der Feuchtigkeit fliehend, unter den grossen Blättern. Sonst ist diese Region thatsächlich durchaus nicht tierarm, d. h. für Westindien. Wiederholt brachte man mir von dort eine Opossumart mit weissem Schwanzende herunter, der Mangu haust verwildert dort, dazu eine reiche Vogel- und Insektenfauna.

Nach $1^1/_2$ Stunden Steigens wird der Urwald niedriger und bald kommt man in eine Region, welche durchaus mit niederem Gebüsch von Pflanzen mit harten glänzenden Blättern bedeckt war, wohl in der Mehrzahl Lorbeer- und Myrthengewächse. Das Gehen ist in diesem Gebiet fast noch schwieriger als im Urwald; man sieht seinen eigenen Weg nicht mehr und wandelt bis über die Hüften in den Büschen verborgen. Auch hier gibt es noch viele blühende Pflanzen und hier wären nach der Analogie viele Schmetterlinge zu erwarten gewesen, wenn nicht ein starker Wind gewaltige Wolkenmassen vom Ozean herüber gewälzt hätte und ein kalter Regen die ganze Gipfelregion überschüttet hätte. Dadurch wurde das Vorwärtsdringen immer beschwerlicher; dabei verhüllte der Nebel meist die Aussicht, nur dann und wann entstand ein Spalt in den Wolken und zeigte uns die Insel im schönsten Glanze der Sonne: ein wunderbares Bild bei der reichen Bildung der Landschaft, und weit darum sich spannend das dunkelblaue Meer, nahe dem Lande erfüllt von dem weissen Schaum über den Korallenriffen. In der Ferne konnte man duftig auf der See schwimmend die Gebirge von St. Lucia im Süden, Dominica im Norden erkennen.

Unser Weg erreichte eine Höhe, senkte sich sodann wieder

Digitized by Google

eine Strecke und führte wieder in einen Wald; dieser war licht, die Bäume zum grössten Teile abgestorben, vielfach von langen Flechten gänzlich überzogen. Wir durchwateten Moräste und Wasserpfützen; die Nähe des vulkanischen Gipfels kündigte sich durch starken Schwefelgeruch und seltsame Erdspalten an, welche sich oft auf weite Strecken hinzogen und deren Tiefe nicht zu erschauen war. Es war allmählich der Nebel so dicht geworden, dass wir mit Mühe den vorhandenen Spuren zu folgen vermochten.

Indem wir weiter stiegen, waren wir bald so gänzlich in den Nebel gehüllt, dass wir von der Umgebung nichts mehr wahrnahmen. Man hörte nur in der allgemeinen Oede fast unheimlich das Pfeifen eines kleinen Vogels, den man hier den „sifflet de montagne" nennt. In der Bevölkerung gehen allerhand Erzählungen über diesen Vogel um, der sich soll unsichtbar machen können u. s. w. Hier oben ist er sehr häufig, leicht zu sehen; ja ich bekam sogar ein junges Exemplar mit der Hand zu fassen.

Die Bildung dieser Erzählungen vom „sifflet de montagne" sind überhaupt sehr bezeichnend für die Art der Naturbetrachtung der französischen Creolen. Ueber allerhand relativ leicht erreichbare Dinge ihrer eigenen Insel bilden sie eine Menge von Sagen, glauben dieselben und erzählen sie weiter, ohne dass einer das Bedürfnis hätte, sich von den thatsächlichen Grundlagen derselben selbst zu überzeugen.

Binnen kurzem langten wir bei dem Krater an, welcher von einem kleinen See erfüllt ist. Die höchste Spitze des Berges erhebt sich etwas höher als der Krater. Jedoch der Nebel war immer noch so dicht, dass wir weder diese, noch auch nur das andere Ufer des kleinen Sees erblicken konnten. Ich umschritt die Ufer, welche zum teil schlammig waren, zum grössten teil aber aus trachytartigem festem Gestein bestanden. An einer Stelle befand sich ein etwa 15 cm weites Loch, in welchem das Wasser unter lautem Gurgeln abfloss. Das Wasser des Sees ist kalt und sehr angenehm zu trinken. Organismen nahm ich in demselben nicht wahr.

Digitized by Google

An mehreren Stellen rieselten dem Kratersee kleine Zuflüsse zu, von denen man aber nicht sagen konnte, ob sie regelmässig waren oder dem gegenwärtigen Regen ihre Entstehung verdankten. Jedenfalls ist aber anzunehmen, dass der See sein Wasser aus den fast stets um ihn lagernden Wolken erhält. Die Bildung von Quellen erscheint mir in dieser Gipfelnähe bei der Porosität des Untergesteins nicht wahrscheinlich. Die ganze Umgebung des Sees war an jenem Tag so mit Feuchtigkeit erfüllt, dass wir bei unserer Rast uns nicht niedersetzen konnten. Wenn auch die Bäume hier niedrig und meist abgestorben waren, so grünte doch hier ein überaus üppiges Niederholz und die wuchernden Kräuter hatten keinen Stein ohne ein weiches, mit Wasser vollgesogenes Pflanzenpolster gelassen.

Da es zudem empfindlich kalt war, wurden wir bald zum Rückweg gezwungen. Der Abstieg erfolgte nach Südosten, dann Süden, während wir von Westen aufgestiegen waren. Ausser sehr prächtigen Baumfarnen und wundervollen Blicken in die östlichen Waldthäler bot der Weg nicht viel neues und bemerkenswertes. In mancher Beziehung erwies er sich als geeigneter als der westliche Weg, wenn auch der letztere an ganz sonnigen Tagen dennoch vorzuziehen sein mag. Von einer oben noch nicht erwähnten Plage des Aufstiegs blieben wir auf diesem Wege auch verschont, der „plante couteau". Diese ist eine Rotang-artige Kletterpalme mit zweischneidigen Blättern, welche so scharf sind, dass sie durch die Kleider hindurch schneidend empfindliche Verletzungen, ja selbst gefährliche Wunden beibringen können. — Der Abstieg führte uns schliesslich wieder in die bebaute Region und zur Sommerfrische der Bewohner von St. Pierre, dem Morne rouge. Nach 11 stündigem Marsche langte ich sehr ermüdet in der Stadt wieder an.

Die Schilderung einer weiteren Landschaftsform, der sumpfigen Region um die Saline im Süden der Insel und der Mangrovewälder ziehe ich vor, im Zusammenhang mit der Küstenbeschreibung jener Gegend zu bringen. Jetzt zunächst will

Digitized by Google

ich mich der Darstellung meiner marinen Untersuchungen zuwenden.

Wie ich schon oben erwähnte, hatte ich einen intelligenten Fischer mit Namen Matthieu entdeckt, welcher mir sehr von Nutzen war. Er kannte sehr gut die Verteilung der einzelnen Tierformen, so weit er dieselben beachtet hatte, war aber leider in manchen Fällen etwas zu ängstlich. Die ersten Ausfahrten, die ich mit ihm machte, zeigten mir einen ziemlich grossen Tierreichtum des Meeres und bewogen mich, in St. Pierre zu bleiben, statt, wie ich ursprünglich vor hatte, mein Hauptquartier in Fort de France aufzuschlagen. Wie meine Erfahrungen in der Folge zeigten, wäre übrigens einer der Orte an der Südspitze, etwa das von mir besuchte St. Anne noch erheblich günstiger gewesen.

Die Küste fällt, wie bei der Mehrzahl der „Inseln unter dem Winde", auf der Westseite viel plötzlicher ab, als auf der Ostseite. Die Küstenbildung ist sehr reich und erzeugt eine Menge anziehender Landschaftsbilder. Die Felsen in der Gegend von St. Pierre sind meist Laven und Bimsteintuffe, welche von den Eruptionen der grossen Vulkane stammen; sie fallen an vielen Stellen senkrecht zum Meere ab und wechseln mit sandigen Buchten, welche gewöhnlich in ihrem inneren Winkel zu einer Ansiedlung Anlass geboten haben. Der Meeresboden in der Landnähe ist unter 20 Faden tief, oft viel seichter und beherbergt ein reiches Tierleben.

Jedoch schon in geringer Entfernung von der Küste stürzt der Boden zu sehr grossen Tiefen ab. Ich habe an verschiedenen Stellen der Küste gedregt und mit tauchenden Negern oder auf halb untergetauchten Felsen selbst Tiere gesammelt und will im nachfolgenden ein Bild der örtlichen Verhältnisse möglichst im Zusammenhange geben.

Im Norden der Insel — hier untersuchte ich nur an der Westküste — ist der Strand fast überall felsig, steile Abfälle von Tufffelsen herrschen vor, dazwischen hie und da die oben erwähnten Buchten. Ganz im Norden tritt der Wald in den Buchten hie und da bis ans Meer heran und es gibt zahlreiche

Digitized by Google

Landschaftsbilder von grosser Romantik. Hier sind auf den Felsen Krabben zahlreich, auf dem Grunde liegen Spongien in Menge, einzelne Ascidien, einfache, wie zusammengesetzte. Die Löcher in den Felsen sind von Seeigeln bewohnt, sowohl einer kleinen Art, als auch den langstacheligen unangenehmen Diademen. Alle diese sind mit grosser Mühe aus den Felsenlöchern herauszuarbeiten, da sie sich mit den Ambulakralfüssen sehr fest saugen. Seesterne sind vereinzelt vorhanden. Ueberhaupt fällt an der ganzen Küste sowohl an Arten wie an Individuen das Ueberwiegen der Seeigel gegenüber den Seesternen auf. Ferner sind Gorgonien hier zahlreich.

Wo der Boden so seicht ist, dass man den Grund sieht, ist er meist sandig, grosse Felsblöcke liegen dazwischen vereinzelt. Auf den letzteren wachsen die Gorgonien; doch stehen sie auch daneben im Sand. Dadurch unterscheiden sie sich von den Steinkorallen, welche hier nur sehr vereinzelt vorkommen und dabei stets auf den Felsblöcken angesiedelt sind.

An Fischen sind neben Rochen und verschiedenen eigentlichen Flachfischen in dieser Region nicht viel interessante Formen vorhanden.

Etwas weiter im Süden, d. h. südlich der Stadt St. Pierre setzt sich dieselbe Küstenbildung fort. Die Tufffelsen sind zum teil noch höher als im Norden und stark zerklüftet; doch gibt es auch viele Trachytfelsen, welche an einzelnen Stellen einen regelrechten Klippenstrand erzeugen. Hier wimmelt es von allerhand Tieren. Das Wasser ist bei ruhigem Wetter wunderbar klar, so dass man selbst in beträchtlicher Tiefe alle Einzelheiten deutlich erkennt. Die Korallen sind hier viel häufiger, überziehen die Steine oft mit ganzen Krusten und zwar gibt es viele Madreporen, Maeandrinen u. s. w. ebenso wie Gorgonien und andere Hornkorallen. Aber trotz des Reichtums an Steinkorallen kommt es auch hier nicht zu einer wirklichen Riffbildung; was der Grund hiezu ist, scheint mir nicht ohne weiteres klar zu sein. Denn es handelt sich um genau die-

Digitized by Google

selben Arten, welche ich im Süden und Osten der Insel riffbildend fand.

Einen Punkt, der zur Erklärung beitragen kann, will ich hier erwähnen. Während nämlich die Süd- und Ostküste meist von Felsen aus harten Gesteinsarten zusammengesetzt sind, treten hier im Westen Tuffe und Bimsteine, vulkanische Aschen und Laven bis ans Meer heran und bilden zum grossen Teile die Küste. Diese Gesteine werden von den Wellen zu einem feinen glänzenden Sand zermahlen, welcher den Strand der flachen Buchten so lieblich macht. Bei jeder einigermassen erheblichen Wellenbewegung wird aber dieser feine Sand aufgewühlt und trübt das Wasser bis zu ziemlicher Entfernung vom Ufer. Dieser Umstand muss aber, worauf schon Semper hinwies, das Korallenwachstum sehr beeinträchtigen.

Hier gibt es ferner zahlreiche Anneliden, Aktinien, Seeigel, Ophiuren u. s. w. Von den letzteren halten sich viele kletternd auf den Gorgonien und Korallen auf; doch weisen sie nicht die Eigentümlichkeiten auf, welche Doederlein von epizoischen Ophiuren der östlichen Meere beschrieben hat. Zwischen all diesen Tieren bewegen sich die üblichen „Korallenfische"; diese Lebensgemeinschaft weist unter den Fischen die auffallendsten Farben und Formen auf. Es ist dies jedem Naturforscher eine wohlbekannte Erscheinung; aber jeder, der sie mit eigenen Augen sieht, muss von neuem über die grosse Pracht staunen, die hier entfaltet wird, und jeder sich die Frage vorlegen, welche Ursachen wirksam waren, um gerade hier alle diese zierlichen Formen zu versammeln. Die Beantwortung einer solchen Frage erfordert eine tiefe Kenntnis der gesamten Lebensverhältnisse der in Betracht kommenden Arten, eine Kenntnis, zu der wir nur geringe Anfänge besitzen. Einen Anfang zur Erklärung mögen aber schon die folgenden Thatsachen enthalten: Einmal sind zwischen den Aesten der Korallenbäumchen die Fische vor Feinden fast gänzlich geschützt; kein Hai und kein grösserer Raubfisch wagt sich zwischen die gefährlichen Zacken hinein. Somit werden nach der einen Seite hin auftretende buntfarbige u. s. w. Variationen

Digitized by Google

nicht so leicht ausgemerzt und unterdrückt werden. Vielleicht kann für die eine oder andere Art auch die Annahme zu einer Erklärung führen, dass die betreffenden Arten, die unter anderen Lebensbedingungen die schönen Farben erworben hatten, vor aufgetretenen Verfolgern sich in den bequemen Schutz der Korallen begaben und infolge dessen hier als Arten erhalten blieben, während sie anderswo ausstarben. Uebrigens würden derartige Annahmen nicht die Entstehung des Kleides jener Tiere, vielmehr nur ihr Vorhandensein auf den Korallenriffen erklären.

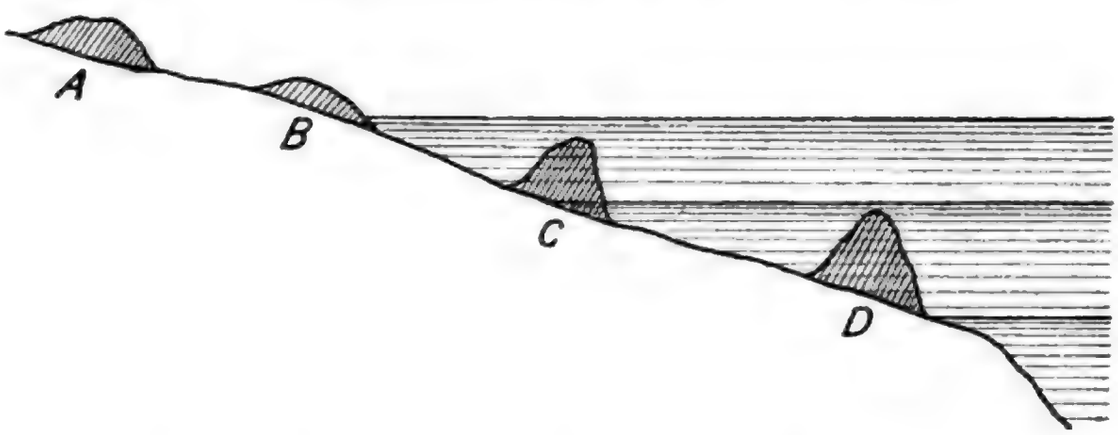
Die Tufffelsen, welche hier das Meer begrenzen, sind sehr hoch und steil und zahlreiche Höhlungen in ihren Wänden sind von Tropikvögeln (Phaëton) bewohnt, daneben von anderen Seevögeln. Es ist bemerkenswert, dass die Phaëton hier in Höhlungen nisten, während sonst von ihnen angegeben wird, dass sie auf dem flachen Boden brüten.

Weiter südwärts habe ich die Küstenfauna nicht genauer kennen gelernt bis zur Gegend der Südspitze, wo ich meine Dredgungen und Planktonfänge wieder aufnahm. Wie bei den obigen Angaben können hier sich alle Mitteilungen nur auf den allgemeinen Charakter der Fauna beschränken; genaue Mitteilungen über die gesammelten Formen werde ich später in einer Liste der Akademie vorlegen.

Nahe der Südspitze der Insel Martinique wird ihre Küstenlinie nochmals durch einen Busen stark nordwärts eingebuchtet; es ist dies die Bai du Marin. An der östlichen Küste derselben liegt das Dörflein St. Anne, wo ich bei der Familie Dejean eine sehr freundliche Aufnahme fand und von wo aus ich mit meinen Fischern das umgebende Meer durchstreifte. Hier im Süden beginnen nun die Korallen echte Riffe zu bilden, insbesondere jedoch auf der östlichen Seite der Insel gibt es grössere zusammenhängende Riffbildungen. Die Arten sind bemerkenswerter Weise dieselben, welche an der nördlichen Küste sich nur zu lockeren Ansiedlungen niederlassen. Die Formen der Riffe sind meist bandförmig; die kleineren sind unregelmässig gestaltet; ihre Form hängt offenbar von derjenigen des felsigen Untergrundes ab. Für die Formen der

Digitized by Google

grösseren Bänder muss die gleichmässige Hebung der Küste von bestimmendem Einfluss sein. Denn wie ich z. t. hier und insbesondere später bei St. Thomas beobachtete, findet man oft eine Reihe von Riffen auf einander folgen, von denen die meist gehobenen alle abgestorben sind, während dasjenige, welches noch vom mindesten Wasserstand bedeckt war, einzig überlebte. Dass die Riffbildungen durch korallenlose Strecken getrennt sind, weist auf zwar gleichmässig verlaufende, aber in bestimmten Intervallen beschleunigte Hebungen der ganzen Küste hin. Wie dies gemeint ist, zeigt die hier stehende Skizze, welche Riffe an der Südküste von St. Thomas darstellt.



Das Riff *D*, welches unter dem tiefsten Wasserstande sich befindet, besteht aus lebenden Korallentieren und ist in weiterem Wachstum begriffen. Dass es nicht weiter nach aussen wächst, ist wahrscheinlich auf den zu raschen Abfall des Meeresbodens zurückzuführen. Das Riff *C* befindet sich zwar unter Wasser bei höchstem Wasserstande, liegt aber bei niedrigstem völlig trocken; es ist demgemäss vollständig abgestorben, ebenso das Riff *B*, welches vom höchsten Wasser gerade noch berührt wird. Das Riff *A* liegt bereits oben auf der gänzlich trockenen Küste. Alle 4 Riffe sind aber durch gänzlich korallenlose versandete Strecken getrennt. Infolge dessen muss man periodische Hebungen annehmen, was ja in einem so vulkanischen Gebiet nicht verwunderlich erscheint. Erdbeben sind dort häufig, ich erlebte während meines kurzen Aufenthaltes in St. Thomas ein ziemlich heftiges, welches aber keinen Schaden anrichtete.

Digitized by Google

Das Wasser der Bucht von St. Anne ist von einer wundervollen blauen Farbe und die hellen Korallenriffe schimmern durch dies Wasser in unbeschreiblich schönen Tönen. Die Klarheit lässt das Wasser viel seichter erscheinen, als es thatsächlich ist; man glaubt Gegenstände mit dem Handnetze erhaschen zu können, welche sich thatsächlich in 20—30 m Tiefe befinden. In Tiefen von 15 m ja bis zu etwa 20 m tauchte der eine meiner Fischer vorzüglich und brachte mir auf diese Weise manche Beute herauf. Der innere Teil der Bucht ist schlammig und tierarm, während nach aussen mit der felsigen Bildung der Tierreichtum zunimmt; die westliche Küste der Bucht ist ebenfalls etwas versandet, zeigt sogar einige schwache Mangroveansiedelungen, ist jedoch an Tieren, besonders Echinodermen, noch ziemlich reich.

Hier fiel mir, wie noch nie vorher die Farbenpracht der marinen Tierwelt auf: wir brachten Seeigel herauf, die grasgrün gefärbt waren und lange weisse Stacheln hatten, dann weisse mit schwarzen Stacheln. Grosse Schnecken, Tritoniumartig, gab es in Menge und prächtige Schwämme in leuchtenden Farben: violett, rot, orange und ultramarin! In einem rotgefärbten Schwamm fand ich einen kleinen ebenso gefärbten dekapoden Krebs (ähnlich dem Alpheus); ob wohl hier die Ernährung mit Teilen des Schwamms bestimmend auf die Farbe einwirkte? Jedenfalls kann bei einem Tier, welches Hohlräume in einem anderen bewohnt, die Farbe keinen Schutz gewähren.

Ein Ausflug auf die Ostseite der Insel hinüber zeigte hier die Fauna im grossen und ganzen ähnlich. Hier sind die Korallenriffe sehr zahlreich und ich bedauerte sehr, nicht mehr Zeit auf ihre Untersuchung verwenden zu können. Ziemlich im Süden machen zahlreiche Felsenriffe eine Landung sehr schwierig und gefährlich. In unserem alten gebrechlichen Negerkahn hatten wir manche Fährlichkeiten auszustehen. Einer dieser Riffe, durch seine Form sehr auffallend, heisst im Volksmund table du Diable. In der Nähe desselben sammelte ich in Felsenlöchern ziemlich viele Tiere der Flutgrenze. Ich fand schöne Aktinien, Hydroïdpolypen, zum teil sehr grosse

Digitized by Google

Arten von schön weisser und karminroter Farbe; ferner Seeigel, Seesterne und Ophiuren, Holothurien und viele Krebse und Krabben. Von den Aktinien lebte eine in den Höhlungen grosser Hornschwämme.

Hier wie im Norden der Insel habe ich wiederholt sehr reiche Planktonfänge gemacht. Die Zusammensetzung in beiden Gegenden war verschieden, doch sind meine Fänge nicht zahlreich genug und aus einer zu kurzen Zeit, um irgend eine Gesetzmässigkeit herausfinden zu können. Jedenfalls war die Windrichtung von grossem Einfluss. Im Norden waren öfter im Plankton die pflanzlichen Bestandteile kolossal dominierend, besonders kleine Phaeophyceen liessen die Tierwelt kaum aufkommen. Doch fanden sich da an andern Tagen viele auffallend geformte und gefärbte Copepoden und andere Krebse und Krebslarven; zahlreich waren Radiolarien, kleine Medusen u. s. w. An einem Tage war das Meer weithin bedeckt mit Exemplaren einer Eucharisart mit 4 auffallenden braunen Flecken auf den Lappen.

Im Süden fielen ausser vielen Larven ziemlich grosse Anneliden, dann ganz riesige Sagitten, Medusen u. s. w. auf. Die Fänge harren noch der genaueren Sichtung und Bestimmung. —

An die oben erwähnte table du diable schliesst sich eine Bucht mit einem weiten Sandstrande an; auf demselben waren grosse weisse Sandkrabben sehr häufig. Der Strand verläuft gegen Lagunen hin, um welche ein undurchdringliches Dickicht von Mangroven sich erstreckt. Ein grosser Teil der Gegend hier besteht aus tertiärem Kalk. Ein Berg und eine Ebene führen ihren Namen von den zahlreich dort vorkommenden Versteinerungen; doch scheint mir die Natur der dort als versteinertes Holz bezeichneten Steine sehr zweifelhaft. Proben davon habe ich zur Untersuchung mitgenommen.

Vom Süden kehrte ich selbst auf einem Ritt durch das Land nach Fort de France zurück; doch will ich auf meine Exkursionen in Martinique nicht weiter eingehen, da sie mehr für mich interessant und lehrreich waren, als hervorragend durch neue wissenschaftliche Beobachtungen.

Digitized by Google

Ehe ich die Schilderung meiner Reise fortsetze, will ich kurz zwei Dinge erwähnen: Einmal die Trigonocephale, oder fer de lance, die berüchtigte Lanzettschlange (Trigonocephalus lanceolatus). Ich erwähnte oben schon die grosse Furcht, die sämtliche Einwohner vor ihr haben. Bis zu einem gewissen Grade ist diese Furcht sehr berechtigt, denn die Schlange ist eine der grössten und bissigsten Giftschlangen. Wenige Menschen werden von ihrem Biss geheilt, die meisten sterben in wenigen Stunden. Viele geheilte bleiben aber dauernd gelähmt und ich habe verschiedene untersucht, welche sogar infolge des Bisses dauernd blödsinnig geworden waren.

Ferner möchte ich nicht unerwähnt lassen, dass Martinique ein Durchgangspunkt für zahlreiche Wandervögel ist. In der Nähe von St. Anne befindet sich die sog. Saline, ein See und halbsalziger Sumpf, welcher zu allen Zeiten grosse Mengen von Vögeln beherbergt. Ich habe hier viele Arten von Wasservögeln erbeutet. Im Frühjahr und Herbst jedoch sollen, wie mir die Anwohner erzählten, Unmassen von Wandervögeln aus Süd- und Nordamerika hier einfallen. Sie rühmen die grossartige Jagd zu der Zeit; es sollen viele Entenartige Vögel darunter sein. —

Ich verliess Martinique am 17. April 1898 und besuchte von da aus mit einem amerikanischen Schiffe die ganze Reihe der kleinen Antillen, ohne jedoch irgendwo Zeit und Gelegenheit zu ausführlicheren Studien zu gewinnen. Doch will ich über einige der Inseln kurze Bemerkungen anfügen, welche vielleicht späteren Reisenden von Nutzen sein können.

Der nächste Besuch galt der englischen Insel Dominika. Zunächst fiel sofort die grössere Reinlichkeit und bessere Haltung gegenüber der französischen Kolonie auf. Ich bedauerte sehr, nicht Zeit zu haben, um die interessante Landfauna der Insel etwas zu studieren. Dieselbe ist besonders in der Vogel- und Insektenwelt viel reicher als in Martinique. Urwälder überziehen noch alle Berge und das Innere ist noch ganz unkultiviert. Für marine Untersuchungen erschienen mir aber die Küsten nicht so günstig und der Wellengang viel zu

Digitized by Google

stark. Im Nordosten der Insel soll sich noch eine gänzlich isolierte Karibenkolonie befinden.

Ueber die Inseln Guadelupe und Antigua kann ich nichts berichten, da ich sie zu flüchtig sah. Jedoch Nevis und St. Kitts (St. Christof) sah ich etwas genauer. Beide Inseln sind wegen der Zuckerkultur früher in ihrem ganzen flacheren Gebiet entwaldet worden. Die schön geformten Berggipfel sind zwar noch bewaldet, aber zu der Zeit meines Besuches machte sich grosse Dürre geltend, welche sehr zu den Verhältnissen der südlichen Inseln kontrastierte. Dieser Trockenheit entsprechend zeigte sich auf beiden Inseln in den Niederungen vor allem die Orthopterenfauna sehr entwickelt. Vor allem waren Heuschrecken in zahlreichen Arten und Individuen auf Nevis vertreten. Jedoch wurden daselbst auch viele Wespen und Schmetterlinge gesammelt. Von letzteren wurde jedoch die Hauptausbeute auf den Bergen von St. Kitts gemacht; und ich bedauere es ausserordentlich, dass ich meinen Aufenthalt nicht länger ausdehnen konnte; denn gerade zu der Zeit, wo ich dort war, waren die Umstände zur Anlegung einer grossen Insektensammlung sehr günstig. Hätte ich geahnt, dass ich auf der weit weniger interessanten Insel St. Thomas so lange würde aufgehalten werden, so hätte ich viel lieber diesen Aufenthalt auf eine dieser südlichen Inseln verlegt. Auf den Bergen von St. Kitts habe ich aber einmal kennen lernen können, was Schmetterlingsleben in den Tropen bedeuten kann. Um blühende Bäume und Sträucher schwebten und flatterten da gerade zu Legionen von diesen schönen Geschöpfen: Danaïden, Heliconiden, Pieriden, Papilioniden und viele Andere.

Von St. Kitts, wo man von der Bevölkerung nichts als Klagen über den Niedergang des Zuckerbaues hörte, kam ich über St. Croix nach St. Thomas. Während wir in den Hafen einfuhren, verliess das deutsche Schiff, mit dem ich weiter reisen wollte, denselben; ich konnte nicht mehr mitkommen und war damit für eine Zeit lang auf St. Thomas festgebannt. Denn mittlerweile brach der Krieg aus und die spanischen und

Digitized by Google

amerikanischen Schiffe, auf welche ich gerechnet hatte, stellten sofort ihre Fahrten ein.

Ich mietete mich, da das Hotel schreklich schmutzig war, bei dem vortrefflichen Quarantäneinspektor Eggert ein und habe da, abgesehen von meiner Ungeduld, weiter zu kommen, köstliche Tage verlebt. St. Thomas ist von so vielen Naturforschern schon besucht worden, dass ich meine wenigen Beobachtungen nicht ausführlich hier schildern will. Für die Untersuchung von mariner Fauna wäre die Insel wohl nicht ungünstig gewesen, jedoch konnte ich, von Tag zu Tag auf einen Dampfer wartend, meine Kisten nicht auspacken. Ich begnügte mich damit, eine Anzahl von Insekten zu sammeln und hatte vor allen Dingen hier Gelegenheit, den Uebergang von Trocken- zur Regenzeit vollständig mitzumachen. Als ich mich der Insel nahte, bot sie einen braunen dürren Anblick dar; es war seit Monaten kein Regen gefallen: sogar die Cisternen waren fast leer. Kurz nach meiner Ankunft stellten sich die ersten Regen ein und als ich nach etwa 16 Tagen die Insel wieder verliess, prangte sie im herrlichsten Grün. Viele Bäume blühten; besonders auffallend waren die verschiedenartigen Papilionaceen, so der Flamboyant, dann Albizzia Lebbek u. A. Zahlreich sind auf der Insel die Mahagonibäume, aber stets angepflanzt als Zierbäume und besonders beliebt auf Gräbern. — Erwähnen will ich an dieser Stelle nur noch, dass man am sandigen Strand der Insel an manchen Stellen sehr häufig die Schalen von Spirula findet. Dieselben hängen fast immer in Haufen von angeschwemmtem Sargasso, mit welchem sie offenbar zusammen vom Ozean hergetrieben worden sind.

Ich verliess St. Thomas mit dem Dampfer der Hamburg-Amerikanischen P.-A.-Gesellschaft „Castilia", dessen Kapitän Grommeyer mir während der Reise viele grosse Liebenswürdigkeiten erwies. Die Fahrt ging an der Nordküste von Porto Rico und Hispaniola entlang; in Porto Rico war eine Landung wegen des Krieges unmöglich; doch fuhren wir so nahe der Küste, dass wir manches Interessante sehen konnten, so die

Digitized by Google

Stadt S. Juan mit ihren Befestigungen und den eifrig exerzierenden Soldaten. Als wir an der Küste von Hayti entlang segelten, begegnete uns des abends die amerikanische Kriegsflotte, welche am Tag darauf S. Juan bombardierte.

Von der Insel Hayti bekam ich die Hafen Cap Haytien und Port au Prince zu sehen. Die wenigen Dredgungen, welche ich in dem ersteren vornahm, hatten wenig Erfolg: einige Seeigel, grosse Seesterne und eine Anzahl solitärer Korallen wurden erbeutet. Die landschaftliche Schönheit, welche diesen Hafen, wie ganz Hayti, auszeichnet, liess mich ohne Schwierigkeiten über den Schmutz und all die Liederlichkeit, welche in diesem Negerstaat herrschen, hinwegsehen.

Zoologisch weit interessanter scheint die Bucht von Port au Prince zu sein; die weiter draussen liegenden wundervollen Korallenriffe versprechen eine Menge interessanter Formen. Hier wie überhaupt in ganz Westindien konnte man deutlich noch den tiefen Eindruck der vor wenigen Monaten erfolgten deutschen Flottendemonstration konstatieren.

Die Weiterfahrt erfolgte längs der Südküste von Cuba, wobei ich einen kurzen Blick auf Santiago und das Castel Morro werfen konnte; doch geschah dies nur im Vorüberfahren, denn die Blokade war bereits erklärt und eine Landung für uns ausgeschlossen, obwohl recht gut möglich; denn an der ganzen Südküste der grossen Insel sahen wir kein einziges amerikanisches Schiff.

Nachdem wir das Cap S. Antonio, die westliche Spitze von Cuba, passiert hatten, traten wir in die Strasse von Yucatan ein, um sodann den Golf von Mexiko zu durchqueren und in Tampiko zu landen. Während wir fern der Küste von Yucatan über die Campêchebank segelten, ohne jemals auch nur annähernd in Sehweite vom Land zu kommen, brachte uns ein heftiger Wind Scharen von Vögeln und Insekten aufs Schiff. So fiel mit einem male eine Wolke von kleinen grünen Cikaden auf den Dampfer nieder. Vögel, welche sich niederliessen, waren zum teil so erschöpft, dass sie sehr bald starben.

Digitized by Google

Ein ähnliches Schauspiel wiederholte sich, als wir uns der Mündung des Tampikoflusses näherten, nur mit dem Unterschiede, dass hier ein nordwestlicher Wind die Tiere über den ganzen Golf herübergetragen hatte.

Meinen Aufenthalt in Mexiko und die Weiterreise nach Californien will ich nur in aller Kürze erwähnen; denn es haben so zahlreiche Reisende bereits diese Gegenden besucht, dass ich meine nur auf der Durchreise gewonnenen Eindrücke nicht an die Seite der Schilderungen gründlicher Forscher stellen darf.

Meine Route war die folgende: ich reiste von Tampico mit der Eisenbahn nach der Stadt Mexiko. Daselbst verweilte ich etwa 14 Tage, besuchte die grossen Lavorfelder der Umgebung, sowie einige der aztekischen Ruinenstätten und den Fuss der grossen Vulkane Popocatepetl und Ixtaccihuatl. Eine Besteigung derselben zu unternehmen, verbot mir meine gemessene Zeit und die Ungunst der Jahreszeit. Nach San Francisco gelangte ich auf dem Wege durch Centralmexiko, durch Arizona und den Süden Californiens.

Eine Beobachtung, allerdings nicht naturwissenschaftlicher Art, möchte ich dabei nicht unterlassen, der Akademie vorzulegen.

Als ich mit dem Münchener Arzt Dr. E. Schmidtlein, dessen Freundlichkeit ich vieles verdanke, einen Ausflug nach der Ruinenstätte bei S. Juan di Teotihuacan machte, fiel es mir auf, dass hier ein Feld voll der interessantesten archäologischen Schätze unausgebeutet daliegt. Die mexikanischen Forscher scheinen nicht im stande zu sein, diese Schätze in der richtigen Weise zu heben; und nach allem, was ich sah, sind dort ausserordentliche Befunde zu hoffen.

Ein Indianer hatte daselbst ein Haus ausgegraben, welches in sehr merkwürdiger Weise an den Wänden mit reichlichem Bilderschmuck ausgestattet war, in den Tönen ähnlich den pompejanischen Malereien, in der Zeichnung natürlich den Geschmack der alten Mexikaner bekundend; es fiel mir aber auf, dass die Malereien mit viel Technik und Sicherheit ausgeführt waren.

Digitized by Google

Kleinere Reste, wie Pfeilspitzen, kleine Masken, Vasenreste findet man dort in Masse, und wir fanden selbst einige sehr hübsche Stücke, sogar einige edle Steine.

Bei einem Versuch zur Ausgrabung haben die Mexikaner nur ein Haus zum Einsturz gebracht, und dann nichts weiter gethan. Obwohl die mexikanische Regierung ein Ausfuhrverbot für Altertümer erlassen hat, wäre für eine richtig eingeleitete Unternehmung auf diplomatischem Wege leicht die Zustimmung derselben zu erlangen. Jedenfalls scheint dort für deutsche Forscher sich eine sehr lohnende Aufgabe zu bieten. —

II. Nordamerika.

Nach einer mehrtägigen Eisenbahnreise durch die wunderbaren Wüstenlandschaften Centralmexikos und der südlichen Unionsstaaten, mit ihren vielen überraschenden Paradigmen recenter geologischer Phänomene, langte ich in S. Francisco an. Von dort führte mich eine weitere Fahrt von wenigen Stunden nach Pacific Grove bei Monterey, dem eigentlichen Ziel meiner Reise.

Ich wurde dort schon am Bahnhof von Dr. Mc. Farland, Assistant Professor an der Palo Alto Universität, welcher vor wenigen Jahren an der Universität zu Würzburg promoviert hatte, mit viel Liebenswürdigkeit und Kollegialität empfangen. Auch die übrigen Herren, unter welchen ich besonders Dr. Price, einen Schüler von Geheimrat v. Kupffer, Mr. Heath, Mr. Green, und den Botaniker Mr. Nott erwähne, bezeugten mir eine sehr freundschaftliche Gesinnung; von den jüngeren Assistenten war mir besonders Mr. Abbot bei verschiedenartigen Gelegenheiten sehr behilflich.

Jedoch die Ausrüstung, welche ich dem zoologischen Institute resp. der Güte meines Chefs, Prof. Hertwig, verdankte, war so vorzüglich, dass ich die spärlichen Hilfsmittel der Station kaum zu benutzen brauchte; zudem schickte mir Prof. v. Kupffer noch einen ganzen Vorrat von Glassachen und Chemikalien nach.

Für spätere Besucher, welche die reiche Flora und Fauna der kalifornischen Küste zum Gegenstand ihrer Untersuchungen machen wollen, möchte ich bemerken, dass es unnütz ist, sich

Digitized by Google

die allgemein gebräuchlichen Gläser und Chemikalien dorthin mitzunehmen. In S. Francisco kann man alle Wünsche dieser Art, wenn es nicht gar zu spezielle sind, befriedigen.

Die Station zu Pacific Grove liegt auf einer kleinen Landzunge, welche in die weite Bucht von Monterey hineinragt. Die Bucht mag etwa an Grösse dem Golf von Neapel nahe kommen. Jedoch fehlen ein Vesuv, ein Capri und Ischia; auch die Hügelketten der Vorgebirge stellen sich nicht so stattlich dar, wie der Posilipp und die Berge von Sorrent. Aber in der Tiefe des Meeresblau, in der Pracht der farbigen Stimmungen zu den verschiedenen Tageszeiten kann die mittelkalifornische Küste wohl mit der italienischen wetteifern.

Eine Reihe von Städtchen und Ortschaften ziehen sich an den Ufern der Bucht hin von St. Cruz im Norden bis Pacific Grove im Süden; dieselben weichen in ihrem allgemeinen Charakter sehr von einander ab. Insbesondere kontrastieren die beiden Nachbarorte Monterey und Pacific Grove ganz ausserordentlich. Während das erstere noch einen durchaus spanischen Charakter bewahrt hat — viele der Einwohner sprechen im Familienverkehr nur spanisch —, ist das erst vor einer kurzen Reihe von Jahren gegründete Pacific Grove ein echt amerikanisches Nest, welches zudem als methodistische Gründung noch eine Reihe von speziellen Charakterzügen erhalten hat.

Trotzdem in Monterey eine Reihe von älteren malerischen Bauten, so die alte spanische Missionskirche, vorhanden sind, so wirkt doch Pacific Grove durch seine wundervolle Reinlichkeit und die nette Art, wie seine kleinen Holzhäuser zwischen die Bäume eines alten Waldes hineingebaut sind, noch anziehender. Während das üppige Hotel del Monte die reichen Leute, Santa Cruz die guten Bürgersfamilien im Sommer beherbergt, ziehen sich nach Pacific Grove mehr die Leute, welche einen schönen Sommeraufenthalt für weniges Geld haben wollen. Und man muss gestehen, wer mit seiner Familie abgeschlossen in einer der kleinen reizenden Villen in aller Ruhe lebt, der kann hier eine ganz wundervolle Sommerfrische verbringen. Für den Junggesellen ist weniger gut gesorgt; doch kann man

Digitized by Google

bei einiger Anpassung an die Landesverhältnisse ganz gut existieren. Als Temperenzlergemeinde gewährt Pacific Grove dem Manne mit eigenem Haushalt viel bessere Bedingungen; denn in Amerika kann man überall die Erfahrung machen: wo es nichts zu trinken gibt, ist auch das Essen in den Wirtshäusern recht mangelhaft.

Die biologische Station, nach ihrem Stifter „Hopkins Seaside laboratory" genannt, besteht aus zwei geräumigen Holzgebäuden mit je einem ebenfalls hölzernen Wasserturm, auf welchen in grosse Tanks das zur Speisung der Aquarien notwendige Seewasser hinaufgepumpt wird. Wenn ich anfangs von den Einrichtungen der Station enttäuscht war, so hatte das seinen Grund darin, dass ich nach der Schilderung Bashford Deans (in Natural Science Vol. XI) die ganze Art der Stationsanlage missverstanden hatte. Die Station ist nämlich in erster Linie Schulstation, d. h. ein marines Laboratorium, in welchem die biologischen Sommerkurse der Leland Stanford Universität abgehalten werden; für diese Zwecke ist die Anstalt ganz ausreichend ausgerüstet. In zweiter Linie aber erst beherbergt sie Forscher zu speziellen Studien; und da muss sich ein jeder selbst helfen, so gut es geht. In den unteren Stockwerken der beiden Gebäude befinden sich grössere Kurssäle und in denselben wird täglich Unterricht erteilt. Während der Ebbezeit ziehen Lehrer und Schüler zu gemeinsamen Exkursionen aus, wobei sich die Untersuchungen fast ausschliesslich auf die Gezeitenzone beschränken. Systematische Fänge mit Planktonnetz oder Dredge werden gar nicht kultiviert, man begnügt sich vorläufig mit dem, was man von der Küste aus erlangen kann oder den gelegentlichen Fängen der chinesischen Fischer. Man ist gewohnt, dass Leute, welche spezielle Zwecke verfolgen, sich für diese selbst ausrüsten.

Man stellte mir in dem östlichen Gebäude einen netten, hellen Raum zur Verfügung, sowie zwei Tische, einige Aquarien und grössere Gläser. Sonst erhielt ich von der Station nur noch etwas Alkohol. Viele kleine Gefälligkeiten erwiesen mir jedoch sämtliche Herren des Laboratoriums.

Digitized by Google

Da die Station mit Booten schlecht versehen ist und vor allem keinerlei Bedienung irgend welcher Art vorhanden ist, so war ich genötigt, mein Material mir selbst zu verschaffen. Ich habe vielfach an der Küste gesammelt, ferner Plankton gefischt und mehrere male gedregt. Letzteres musste ich aber bald aufgeben; denn meine Dredge erwies sich als viel zu schwer für die kleinen Bote von Pacific Grove. Das Plankton im Innern der Bucht ist ziemlich arm und eintönig gewesen; doch hängt es darin offenbar von den Winden und Strömungen ab. Denn an einzelnen Tagen fing ich viel grössere Mengen als an anderen. Auffallend war der Reichtum an Protozoen: Flagellaten verschiedener Gruppen und Infusorien waren oft in Mengen vorhanden. Eines Tages war das Meer gänzlich gerötet von ungeheuren Schwärmen von Noctiluca. Es gelang mir, ein grosses Material von dieser interessanten Cystoflagellate zur Untersuchung der Fortpflanzungsvorgänge zu konservieren.

Den wertvollsten Teil meiner Sammlungen verdanke ich jedoch den chinesischen Fischern, deren Tüchtigkeit bereits B. Dean so sehr rühmt.

In der Mitte zwischen Pacific Grove und Monterey liegt auf einem felsigen Vorsprung das Dorf dieser Fischer; es ist durchaus ein chinesisches Dorf und wie überall in der Welt haben die Chinesen ihre sämtlichen Lebensgewohnheiten auch fern der Heimat beibehalten. Häuser, Fahrzeuge und Trachten sind dieselben, welche bei Kanton üblich sind und ihre Eigentümer haben so gut wie nichts von der fortgeschrittenen amerikanischen Kultur angenommen. Nur in einem Punkte unterscheidet sich speziell diese Kolonie von den meisten chinesischen Siedelungen der Welt: die Fischer sterben ohne Gewissensbisse auf dem fremden Boden und lassen sich auch da begraben, ohne ihre Gebeine der heiligen chinesischen Erde wieder zuführen zu lassen.

Hier fand ich die geeigneten Fischer, welche bereits durch den Besuch B. Deans auf den Wert der Eier von Bdellostoma aufmerksam gemacht, sich bereit erklärten, solche auch für mich zu sammeln. Die Methode, mit welcher diese Fischer

Digitized by Google

ausschliesslich oder doch fast ausschliesslich arbeiten, ist sehr bemerkenswert, indem dieselbe für das Erlangen der Eier von Bdellostoma speziell günstig ist. An einem mehrere Hundert Meter langen Seil sind eine sehr grosse Anzahl von Angelhaken an kurzen Schnüren befestigt. Der Abstand der einzelnen von einander beträgt etwa 40 cm. Jede Angel ist mit einem Stück gesalzenen Fisches besteckt; um Bdellostoma zu fangen, nimmt man kleinere Haken, als für die Lachse und anderen grösseren Fische. Dieses lange Seil lässt der Fischer bei seiner Ausfahrt allmählich hinab und lässt es dann mehrere Stunden lang hinter seinem Schiffe herflottieren.

Mit Hilfe dieser Haken bringt man die Eier von Bdellostoma entweder in den Schleimbeuteln der Weibchen oder direkt in den Schnüren und Haken verfangen herauf. Die den Weibchen so sehr zäh anhaftenden Schleimbeutel, welche B. Dean bereits abgebildet und beschrieben hat (a. a. O.), ermöglichen, wie es scheint, eine Art von Brutpflege. Das Weibchen behält die Eier offenbar anhängend, bis die jungen Tiere ausschlüpfen. Denn ich erhielt Embryonen von ganz jungen Stadien an bis zu gänzlich dottersacklosen Exemplaren und manchmal fanden sich auch leere Eikapseln dabei. An dem Schleimsack und unter einander sind die Eier durch die bekannten Hakenapparate festgehalten.

Ein Umstand, welcher die Annahme der Brutpflege zu bestätigen scheint, ist ferner darin zu erblicken, dass die Eier hegenden Weibchen sich in Scharen zusammenhalten. Mein Fischer fing oft Tage lang an beliebigen Orten nur Männchen und junge Weibchen, bis er schliesslich einen „Platz" fand, von dem er täglich Weibchen mit Eiern und Embryonen heraufbrachte. Dem Fischer war ferner aufgefallen, dass die Weibchen mit Eiern sehr schwer auf den Köder beissen, und insbesondere kurz nach der Eiablage; dass sie jedoch in der vorgerückteren Jahreszeit, wenn sie meist schon ausgebildete „Babies" in den Eikapseln tragen, wieder viel leichter zu fangen sind.

Aus der allgemeinen Biologie von Bdellostoma möchte ich zwei Punkte hervorheben; der Schleim, welchen die Tiere ab-

Digitized by Google

sondern, ist sehr zähe und ein einzelnes Tier vermag eine kolossale Menge zu produzieren. Der Schleim besteht bekanntlich aus lauter ganz feinen Fäden, welche Bildungen entstammen, die an die Nesselkapseln der Coelenteraten erinnern. Greift man in solchen Schleim hinein, so klebt er an den Fingern und es kostet viel Mühe, ihn wieder wegzubekommen. Das Gefühl dabei ist ganz ähnlich demjenigen, welches beim Anfassen einer kleineren Aktinie erzeugt wird. Transportiert man andere gesammelte Tiere mit den Bdellostomen im gleichen Gefäss, so werden dieselben, insbesondere z. B. Echinodermen dermassen von den Fäden umsponnen, dass man eine grosse Mühe hat, sie wieder zu reinigen.

Von Interesse ist ferner, dass die Tiere, wie ich beobachten konnte, nicht nur in tote Fische eindringen, sondern auch in lebende. Einen Torpedo, den ich mit anderen Fischen und Bdellostomen in einem Kübel vom Chinesendorf nach der Station schleppte, bewahrte auch sein elektrisches Organ nicht vor der Invasion. Bei der Ankunft in meinem Arbeitszimmer vermisste ich in dem Kübel sämtliche Bdellostomen und fand sie dann in der Bauchhöhle der übrigen grösseren Fische wieder. Sie hatten sich durch Löcher in der Bauchdecke eingebohrt, wobei ihnen ihre mit scharfen Hornzähnen besetzte, stark verstülpbare Zunge sehr vorteilhaft ist.

Das Material an Eiern und Embryonen war anfangs spärlich, mehrte sich im Laufe des Juni, um im Juli ziemlich reichlich zu werden; in der letzten Zeit waren besonders vorgerücktere Stadien nicht selten. Eines Tages erklärten mir jedoch die Chinesen, dass sie keine Bdellostomaeier für mich sammeln würden; denn es waren, wie alljährlich die grossen Salmschwärme in der Bucht eingetroffen und damit ergab sich für die Fischer die Möglichkeit, an einem Tage an Salmen das 3 bis 4 fache von dem zu verdienen, was ich ihnen bieten konnte. Da nun die Möglichkeit, weiteres Material zu erhalten, sich damit auf Wochen hinausschob, ich ausserdem schon eine ziemlich befriedigende Collektion zustande gebracht hatte, so beschloss ich, meine Reise fortzusetzen.

Digitized by Google

Was ich von Beobachtungen an den frischen Objekten machen konnte, werde ich an anderem Orte veröffentlichen. Hier will ich nur einige Bemerkungen anfügen. Wie schon Dean in einer kurzen Mitteilung erwähnt, beginnt die Entwickelung stets von dem operkularen Pol des Eies. Dort befindet sich auch die Mikropyle. Der Embryo entwickelt sich auf der konkaven Seite des, einer Bananenfrucht ähnlich, leicht gebogenen Eies. Die Kopfanlage liegt dabei ungeführt unter der Stelle, wo der Operkularspalt um das Ei herumgreift. Das Schwanzende wächst langsam dem aboperkularen Ende zu, wobei im Gegensatz zu der Behauptung Deans ein Umwachsungsrand deutlich zu sehen ist.

Die Wachstumsverhältnisse des Embryos sind eigenartig und verdienen ausführlicher berücksichtigt zu werden, was aber an dieser Stelle nicht geschehen soll, da sie sich sehr schwer ohne Abbildungen klar machen lassen.

Wenn das Schwanzende ungefähr den aboperkularen Pol erreicht hat und sich umzuschlagen beginnt, beginnt das Wachstum an Kopf- und Schwanzende gleichmässig einzusetzen. Der Kopf erreicht bald den operkularen Pol, und nachdem er sich ebenfalls herumgebogen, beginnen beide Enden auf der konvexen Seite des Eies auf einander loszuwachsen.

Vorher, als der Schwanz etwa gerade am aboperkularen angelangt war, zeigten sich die ersten Spuren von rotem Blut deutlich von aussen sichtbar. Sie traten auf in Form von Kanälen und Lakunen, welche die Seitenbegrenzung des Embryos bildeten, und besonders am Kopf- und Schwanzende stark ausgebildet erschienen. Aus der vor dem Kopfe gelagerten Lakune bildete sich bald ein starker Gefässast hervor, welcher auf der konvexen Seite des Eies geradeaus vorwärts wachsend, sich bald in zahlreiche Dottergefässe spaltete. Im weiteren Verlauf bilden sich zahlreiche weitere Dotterblutgefässe, von den seitlichen Lakunen ausgehend, so dass schliesslich der ganze Dotter von einem feinen Blutgefässnetz überzogen ist.

Das gerade vor dem Kopfe entspringende Hauptgefäss bezeichnet in seiner Richtung die Wachstumsbahn des Kopfes;

Digitized by Google

schliesslich wird es vom Schwanze bei dessen Wachstum bei Seite gedrängt.

Späterhin treten bedeutende Veränderungen an den Blutgefässen auf, der Dottersack ist zu der Zeit, wo Kopf und Schwanz sich im Wachstum ausweichen müssen, schon ziemlich aufgezehrt. Doch erscheint der Embryo noch in sehr späten Stadien ganz in den Dotter eingesenkt, da die enge Eischale ihn hindert, sich von demselben abzuheben.

Auf weitere Einzelheiten der Entwickelung will ich an dieser Stelle, ehe eine genaue Untersuchung des konservierten Materiales vorher gegangen ist, nicht eingehen. Nur eine Beobachtung will ich noch anführen. In den älteren Embryonalstadien, besonders, wenn der Embryo schon anfängt, sich zu bewegen, löst sich der Deckel (das Operculum) immer leichter von der übrigen Schale ab, so dass man ohne weiteres annehmen kann, dass das ausgebildete junge Tier durch seine Bewegungen den Deckel zu öffnen vermag und so ins Freie gelangt. —

Ueber die sonstige Fauna der Bucht von Monterey kann ich noch folgendes mitteilen: Vom Plankton habe ich oben schon gesprochen. Sonst kenne ich nur die Fauna der Gezeitenzone, eine ziemlich grosse Anzahl von Fischen aus allen Zonen und die gelegentlichen Tiefenfänge der Chinesen.

Die Küste besteht meist aus wild durch einander getürmten Felsmassen, mit welchen an einigen Stellen lange Strecken flachsten Sandstrandes abwechseln. Letztere Strecken sind landeinwärts meist von Dünen begrenzt. Die marinen Tiere sind wenige und nicht besonders interessante Formen: Krabben und amphibische Isopoden sind häufig.

An der felsigen Küste entwickelt sich jedoch ein Tierleben von einem kaum glaublichen Reichtum der Formen. Ein weiter Raum der Gezeitenregion — die Ebbe ist hier im Sommer sehr tief — ist mit Algen bewachsen, welche ebenfalls einen riesigen Artenreichtum aufweisen. Zwischen denselben wimmelt es von tierischem Leben. Es gibt da ungezählte Arten von Protozoen, Hydroidpolypen, Aktinien. Unter letzteren fällt besonders eine

Digitized by Google

knospende Form auf. Aus dem Stamm der Würmer sind besonders schöne Turbellarien, Nemertinen, Anneliden und Gephyreen zu nennen. Von Echinodermen sind besonders zahlreich Seesterne und Holothurien, während Seeigel, Ophiuren und Crinoiden nur durch wenige Arten vertreten scheinen. An Mollusken erscheint die Artenfülle unerschöpflich: es kommen 23 Chitonen dort vor, darunter der riesengrosse Cryptochiton kamtschatkensis, viele Fissurellen und Patellen und verschiedene Haliotisarten. Unter ersteren zeichnet sich, ebenfalls durch ihre gigantischen Formen die Lucupina crenulata aus. Dadurch, dass Prof. M. Farland eine Monographie der Nacktschnecken der Küste vorbereitet, hatte ich Gelegenheit, eine Unmenge der wundervollsten Arten dieser farbenprächtigen Geschöpfe zu sehen. Zahlreiche Krabben und Fische beleben ferner die Algengebüsche.

Unter den Fischen der Bucht hebe ich besonders eine sehr häufige Chimaera hervor, von der ich auch Eier zu sehen bekam. Da jedoch Prof. Dean den Fischer beauftragt hatte, die Eier für ihn zu sammeln und in Fischkästen zu halten, so machte ich selbstverständlich keinen Versuch, ihm seine Kreise zu stören.

Von den Formen der etwas tieferen Zone waren sehr interessant verschiedene Arten von Pennatuliden, welche wundervoll leuchteten; ferner verschiedene Seesterne: Solastriden und Asteracanthionarten, dazu eine wundervolle Spezies von Astrophyton. Auch mehrere Cephalopoden gibt es; in ungeheuerlichen Massen kommt ein Loligo vor, welcher von den Chinesen in Netzen gefangen und am Strand auf den Felsen getrocknet, in Säcke gepackt und nach China geschickt wird, um, wie man sagt, als Dung für die Reisfelder zu dienen. Ich kann den Verdacht nicht unterdrücken, dass am Ende die langzopfigen Herren doch irgend eine Suppe davon bereiten.

Ich will mich nicht weiter in Aufzählungen verlieren, man ersieht aus dem Mitgeteilten bereits, wie reich das Tierleben dort sein muss. Dazu kommt noch, dass gerade in den Sommermonaten die meisten dieser Tiere auch laichen. Ich

Digitized by Google

habe wenige Tiere in Pacific Grove gesehen, von denen ich nicht auch Eier oder Embryonen gesehen habe. Für eine Station ist also die Lage ideal.

Soweit ich bis jetzt die gesammelten Arten übersehe, trägt die Fauna einen ausgesprochen nördlichen Charakter, was ja gut stimmt zu der Thatsache, dass an der Küste ein nördlicher Strom entlang streicht.

Auch die Landfauna ist ziemlich reich, die Insektenwelt ist bunt und auffallend. Doch diese Dinge sind zu wohl bekannt: meine geringen Erfahrungen enthalten keine neuen Befunde.

Von meiner Weiterreise und Heimkehr will ich nur kurze Züge mitteilen; sie war für mich von äusserstem Interesse und sehr lehrreich, doch habe ich aus dieser Zeit keine für die Wissenschaft neuen Resultate mitzuteilen.

Auf dem Wege nach Norden besuchte ich zunächst S. Cruz, schlug mich dann durch die Wälder der Küstengebirge — die wundervollen Wälder des Riesenbaumes Sequoia sempervirens — nach San José und dem durch seine Fruchtbarkeit berühmten Santa Clarathal durch. Dann besuchte ich die Universität von Palo Alto; der liebenswürdigen Aufnahme daselbst, besonders durch die Familie des deutschen Professors Flügel gedenke ich mit grösster Dankbarkeit.

Von San Francisco, wo ich die Sammlungen und Institute eingehend besichtigte, gelangte ich zunächst nach Portland in Oregon, sah dort den Willamettefluss und machte eine Fahrt auf demselben und auf dem riesenhaften, fischreichen Columbia River.

Mit Hilfe der Northern Pacificbahn fuhr ich sodann über Tacoma und Spokanefalls nach Livingstone, um von da aus den Yellowstonepark zu besuchen. Dann besuchte ich Chicago und seine wundervolle Universität, weiterhin den Niagara, Washington, New-York. Besonders an beiden letzteren Orten war die Besichtigung der grossen Sammlungen und Institute für mich von grossem Interesse und Wert.

Von New-York aus machte ich einen Abstecher nach dem nördlich in Massachusetts gelegenen Woods Hall, der biolo-

Digitized by Google

gischen Station der amerikanischen Naturforscher. Hier hatte ich Gelegenheit, die meisten der angesehensten Vertreter der Zoologie und vergleichenden Physiologie in Amerika kennen zu lernen. Es war sehr anregend, die Einrichtung der Station sowie des Laboratoriums der Fish Commission kennen zu lernen und zugleich einen Einblick in die Arbeitsweise so vieler vortrefflicher Forscher zu gewinnen.

Auf dem Dampfer Augusta Victoria der Hamburg-Amerika Linie trat ich die Heimreise an, um nach einem kurzen Aufenthalt in London in den letzten Tagen des August wohlbehalten wieder in München einzutreffen.

Ausser den Empfehlungen, welche die Akademie mir mitgab, waren mir solche von der deutschen Botschaft in Paris, der deutschen Gesandschaft in Mexiko, vom Direktorium der „badischen Soda- und Anilinfabrik", und von vielen befreundeten Privatleuten vom grössten Nutzen. Ihnen allen sowie den vielen Deutschen in der Fremde, welche mich wohlwollend in meinen Absichten unterstützten, sei auch an dieser Stelle herzlicher Dank gesagt. Derselbe gilt auch ehrerbietigst der Akademie, welche durch ihre Bewilligung meine Reise möglich machte.

Digitized by Google

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1898.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

Société d'Émulation in Abbeville:

Mémoires. Tome 2. 1897. 4⁰.
Mémoires. Tome 17. partie 2. 1897. 8⁰.
Bulletin trimestriel 1896 et 1897. 8⁰.

Royal Society of South-Australia in Adelaide:

Transactions. Vol. XXII, part 1. 1898. 8⁰.

Observatory in Adelaide:

Meteorological Observations during 1895. 1898. fol.

Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:

Ljetopis za godinu. 1897. 1898. 8⁰.
Rad. Vol. 134. 135. 1898. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik za narodni život Bd. III, 1. 1898. 8⁰.

Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:

Bulletin. Année 1897 No. 3. 4. 1898. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I Sectie. Deel VI, No. 1—5. II Sectie Deel VI, No. 1. 2. 1897/98. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. N. Reeks. Deel II, No. 1. 2. 1898. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1897/98. Deel VI. 1898. 4⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel I. II. 1897/98. 8⁰.
Jaarboek voor 1897. 1898. 4⁰.
Prijsvers Laus Mitiae. 1898. 8⁰.

K. Zoologisch Genootschap in Amsterdam:

Festschrift 1838 — 1. Mei — 1898. 1898. 4⁰.

Peabody Institute in Baltimore:

31th annual Report, June 1, 1898. 8⁰.

Johns Hopkins University in Baltimore:

Circulars. Vol. XVII, No. 136—138. 1898. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XX, No. 2. 3. 1898. 4⁰.

Digitized by Google

The American Journal of Philology. Vol. XVIII, 4; XIX, 1. 1897/98. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. 20, No. 2—7. 1898. 8⁰.
Studies in historical and political Science. Ser. XVI. No. 1—9. 1898. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. IX, No. 87—89. 1898. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VII, No. 1. 2. 1898. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Basel:

Verhandlungen. Band XII, 1. 1898. 8⁰.

Universitätsbibliothek in Basel:

Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98. 4⁰ und 8⁰.
Jahresverzeichniss der Schweizerischen Universitätsschriften 1897/98. 1898. 8⁰.

K. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 57. 1898. 8⁰.
Boekwerken ter tafel gebracht gadurende heet jaar 1897. 1898. 8⁰.

K. Kanzleibibliothek in Bayreuth:

Fortsetzung des Kataloges vom Jahre 1868, die 1869 bis 1898 zugegangenen Bücher enthaltend. 1898. 8⁰.

K. Serbische Akademie in Belgrad:

Godischniak. X. 1896. 1898. 8⁰.
Aktenstücke betreffend den Transport der Asche des Vuk. Stef. Karagić aus Wien nach Belgrad 1897 von Andr. Gavrilović. 1898. 8⁰.

Museum in Bergen (Norwegen):

G. O. Sars, An Account on the Crustacea of Norway. Vol. II. part XI. XII. 1898. 4⁰.

University of California in Berkeley:

Schriften aus dem Jahre 1897.

K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:

Sitzungsberichte. 1898, No. XXIV—XXXIX; 1898. 4⁰.
Inscriptiones graecae insularum maris Aegaei Fasc. III. 1898. fol.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 31. Jahrg., No. 11—17. 1898. 8⁰.

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Band 50, Heft 1. 2. 1898. 8⁰.

Physikalische Gesellschaft in Berlin:

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897 in 3 Abtheilungen. Braunschweig 1898. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 17, No. 7—11. 1898. 8⁰.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie. Bd. XI. Register, Bd. XII, No. 8—19. 1898. 8⁰.
Verhandlungen. Jahrg. 1897/98, No. 11—17. 1898. 8⁰.

Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:

Jahrbuch. Band XIII, Heft 2. 3. 1898. 8⁰.
Antike Denkmäler. Bd. II, Heft 3. 1898. fol.

Geodätisches Institut in Berlin:

Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Potsdam 1898. 4⁰.
Beiträge zur Berechnung von Lothabweichungssystemen. Potsdam 1898. 4⁰.

Digitized by Google

K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:

Veröffentlichungen. 1897. Heft 2. 1898. 4⁰.
Bericht über die Thätigkeit im Jahre 1897. 1898. 8⁰.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam 1892 und 1893. 1898. 4⁰.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:

Jahrbuch. Band 27, Heft 1. 2. 1898. 8⁰.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:

Gartenflora. Jahrg. 1898, Heft 14—24. 8⁰.

Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XI, 2. Hälfte. Leipzig 1898. 8⁰.

Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen in Berlin:

Protokoll der in München am 31. August, 1. und 2. September 1898 abgehaltenen Vereinsversammlung. Berlin 1898. fol.

Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:

Wochenschrift. Band XIII, Heft 7—12. 1898. fol.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 18. Jahrg., Heft 7—12. 1898. 4⁰.

Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band XXIII. Zürich 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Bern:

Archiv. Band XV, 2. 1898. 8⁰.

R. Accademia delle Scienze dell' Istituto Bologna:

Memorie. Ser. V, Tom. 6, fasc. 1—4. 1896—97. 4⁰.

Universität in Bonn:

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:

Bonner Jahrbücher. Heft 103. 1898. 4⁰.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:

Mémoires. V. Série, Tome III, cahier 1. Paris 1898. 8⁰.

Société Linnéenne in Bordeaux:

Actes. Vol. 51. 52. 1897. 8⁰.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:

Bulletin. 1898, No. 13. 14; 17—22. 8⁰.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:

Proceedings. Vol. 33, No. 13—27; Vol. 34, No. 1. 1898. 8⁰.
Memoirs. Vol. XII, 4. Cambridge 1898. 4⁰.

Boston Society of natural History in Boston:

Proceedings. Vol. 28, No. 6—12. 1897/98. 8⁰.
Memoirs. Vol. V, No. 3. 1898. 4⁰.

Meteorologische Station in Bremen:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1897. Jahrg. VIII. 1898. 4⁰.

Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:

75. Jahresbericht für das Jahr 1897 nebst Ergänzungsheft. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:

Zeitschrift. 2. Jahrg., Heft 3. 4. 1898. 8⁰.

Académie Royale de médecine in Brüssel:

Bulletin. 4. Série, Tome XII, 6—9. 1898. 8⁰.

Académie Royale des sciences in Brüssel:

Bulletin. 3. Série, Tome 35, No. 6; Tome 36, No. 7—10. 1898. 8⁰.
Classe des lettres. Concours pour les années 1899—1901. 1898. 8⁰.

Société des Bollandistes in Brüssel:

Analecta Bollandiana. Tome 17, fasc. 3. 4. 1898. 8⁰.

Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:

Annales. Tome 28—30, 31, fasc. 1; 1893—96. 8⁰.
Procès-verbaux. Tome 24, p. LXXXV—CLII; Tome 25—27. 1895—98. 8⁰.

K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:

Almanach. 1898. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mittheilungen.) Bd. XXVII, 3. 4; Bd. XXVIII, 1. 2. 1897/98. 8⁰.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) Bd. XVII, 2—8. 1897/98. 8⁰.
Monumenta comitiorum regni Transylvaniae. Vol. 20. 1897. 8⁰.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäologischer Anzeiger.) Vol. XVII, 4. 5; XVIII, 1—3. 1897/98. 4⁰.
Archaeologiai Közlemények. (Archäologische Mittheilungen.) Bd. 20. 1897. fol.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) Bd. XVI, 10. 1897. 8⁰.
Corpus statutorum Hungariae Municipalium. Vol. IV, 2. 1897. 8⁰.
Monumenta Hungariae historica. Sectio I. Vol. 29. 1898. 8⁰.
Hampel J., A régibb Középkor emlékei. Magyarhonban. (Denkmäler des früheren Mittelalters.) Vol. II. 1897. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XV, 4. 5; XVI, 1. 2. 1897/98. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathemat. Mittheilungen.) Bd. XXVII, 1. 2. 1897/98 8⁰.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. 1898. 8⁰.
Chyzer C., Araneae Hungariae. Vol. II, 2. 1897. 4⁰.
J. Bayer, A Magyar drámairodalom története (Geschichte des Dramas in Ungarn.) Bd. 1. 2. 1897. 8⁰.
Csànki Dezsö, Magyarország történelmi földrajza a Hungadyak Korabán. Bd. 3. (Geschichtl. Geogr. Ungarns im XV. Jahrh.). 1897. 8⁰.
Rapport sur les travaux de l'Acad. en 1897. 1898. 8⁰.

K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:

General-Register der Bände I—X der Mittheilungen aus dem Jahrbuche. 1898. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 28. Heft 5. 6. 1898. 4⁰.
Jahresbericht für 1896. 1898. 4⁰.
A Magyar Kir Földtani Intézet Evkönyve. Bd. XII, 2. 3. 1898. 4⁰.
A Magyar Kir Földtani Intézet Kiadványai. 1898. 4⁰.

Digitized by Google

Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:

Publikationen. Vol. XXV, 3; XXVI—XXVIII. 1898. 4⁰.
Die Natalitäts- und Mortalitätsverhältnisse ungarischer Städte von Jos. von Körösy und G. Thirring. 1897. 8⁰.

K. ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:

Francé, Craspedomonadinae. 1897. 8⁰.
Róna, Luftdruckverhältnisse Ungarns. 1897. 8⁰.
Szádeczky, Geologie d. Zempléni-szigethegysèg. 1897. 4⁰.
Kurländer, Erdmagnetische Messungen in Ungarn. 1896. 4⁰.
Kohaut, Libellulidae Hungariae. 1896. 4⁰.
Geologie der Csetrás-Gebirge. 1896. 4⁰.

Museo nacional in Buenos Aires:

Anales. Tom. XII. 1898. 8⁰.
Comunicaciones. Tom. I, No. 1. 1898. 8⁰.

Dirección general de estadística de la Provincia in Buenos Aires:

Memoria demográfica año 1895. La Plata. 1898. 4⁰.

Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):

Mededeelingen. No. XIX, XXV—XXVII. Batavia 1898. 4⁰.
Verslag over het jaar 1897. Batavia 1898. 4⁰.
Conspectus hepaticarum Archipelagi Indici von Victor Schiffner. Batavia 1898. 8⁰.

Society of natural sciences in Buffalo:

Bulletin. Vol. V, 5; VI, 1. 1897/98. 8⁰.

Academia Romana in Bukarest:

Analele. Ser. II. Tome 18. Sect. sciintif.
" 19. " istor.
" 20. Partea administr. 1897/98. 4⁰.
Artur Gorovei, Cimiliturile Românilor. 1898. 8⁰.
Etymologicum Magnum Romaniae. Tom. IV. Introducerea. 1898. 8⁰.

Société Linnéenne de Normandie in Caen:

Bulletin. 5e Sér., Vol. 1, fasc. 2—4. 1898. 8⁰.

Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:

Monthly Weather Review 1898 February—July. 1898. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. X, part 1. Simla. 1898. fol.
Report on the Administration in 1897/98. 1898. fol.

Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:

Memorandum on the snowfall of 1898. Simla. 1898. fol.

Asiatic Society of Bengal in Calcutta:

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 910—921. 1897/98. 8⁰.
Journal. No. 370—374. 1898. 8⁰.
Proceedings. 1898, No. V—VIII. 8⁰.

Superintendent of Government Printing in Calcutta:

Report on the natural history results of the Pamir Boundary Commission by A. W. Alcock. 1898. fol.

Geological Survey of India in Calcutta:

General-Report 1897/98. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:
Astronomical Observations. Vol. 23. 1898. 4⁰.

Philosophical Society in Cambridge:
Proceedings. Vol. IX, part 9. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. XVII, part. 1. 1898. 4⁰.

Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:
Bulletin. Vol. 32, No. 6—8. 1898. 8⁰.

Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:
Atti. Serie IV, Vol. XI. 1897. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 53, 54. 1898. 8⁰.

K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:
Abhandlungen. Heft 3. Leipzig 1898. 4⁰.
Das Klima des Königreichs Sachsens. Heft V. 1898. 4⁰.

Field Columbian Museum in Chicago:
Publications. No. 23. 26—28. 1898. 8⁰.

Zeitschrift „The Monist" in Chicago:
The Monist. Vol. 9, No. 1. 1898. 8⁰.

Zeitschrift „The Open Court" in Chicago:
The Open Court. Vol. XII, No. 8—12. 1898. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:
Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 41. 1897/98. 1898. 8⁰.
P. Lorenz, Die Fische des Kantons Graubünden. Zürich 1898. 8⁰.

Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden 1898/99. 1898. 8⁰.

Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:
K. Adamy, die ehemalige Centralkirche des Stiftes Sct. Peter zu Wimpfen. 1898. fol.

Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:
P. H. van Diest, A mineralogical Mistaké. 1898. 8⁰.

Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:
Sitzungsberichte 1897. 1898. 8⁰.

Union géographique du Nord de la France in Douai:
Bulletin. Tom. XIX, 2. 3. 1898. 8⁰.

K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:
Die Sammlung des Alterthumsvereins. Lief. I, Bl. 1—10. 1898. 4⁰.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 19. 1898. 8⁰.

Verein für Erdkunde in Dresden:
XXVI. Jahresbericht. 1898. 8⁰.

Royal Irish Academy in Dublin:
Proceedings. Ser. III. Vol. V, No. 1. 1898. 8⁰.

American Chemical Society in Easton, Pa.:
The Journal. Vol. XX, No. 8—11. 1898. 8⁰.

Royal Society in Edinburgh:
Proceedings. Vol. XX, No. 2, p. 137—248. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:
Mansfelder Blätter. 12. Jahrg. nebst Beilage zum 11. Jahrg. 1898. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Emden:
82. Jahresbericht für 1896/97. 1898. 8⁰.

K. Universitätsbibliothek in Erlangen:
Schriften aus den Jahren 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:
Atti. IV. Ser. Vol. 20, disp. 3. 4.
„ 21 „ 1. 2. 1897/98. 8⁰.

Società Asiatica Italiana in Florenz:
Giornale. Vol. XI, 1897/98. 1898. 8⁰.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:
Abhandlungen. Band XXI, 2; XXIV, 3. 1898. 4⁰.
Bericht. 1898. 8⁰.

Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:
Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim II. 1898. 4⁰.

Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:
Jahresbericht für die Jahre 1896/97. 1898. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Fulda:
VIII. Bericht 1884—1898. 1898. 8⁰.

Universität Genf:
Schriften aus d. J. 1897/98 in 8⁰.

Universität in Giessen:
Schriften aus d. J. 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:
Abhandlungen. Bd. XXII. 1898. 8⁰.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:
Codex diplomaticus Lusatiae superioris II. Heft 3. 1898. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:
Göttingische gelehrte Anzeigen. 1898. No. VIII—X. Berlin. 8⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1898, Heft 2. 3. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1898, Heft 2. 3. 4⁰.
Abhandlungen. a) Philos.-hist. Classe. N. F. Bd. II, 7.
b) Mathem.-physikal. Classe. N. F. Bd. I, 3. 1898. 4⁰

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:
Göteborgs kgl. Vetenskaps — och Vitterhets — Samhälles Handlingar Följd IV, Heft 1. 1898. 8⁰.

The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):
The Journal. Vol. VIII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:
Nachträge zur Geschichte der Greifswalder Kirchen von Th. Pyl. Heft 2. 1897. 8⁰.

K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:
Catalogus der Land en Zeekaarten. 1898. 8⁰.
Bijdragen. VI. Reeks. Deel 5, aflev. 3. 4. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Teyler's Genootschap in Haarlem:

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. V, partie 4. Vol. VI, partie 1. 2. 1898. 4⁰.

Verhandlingen van Teylers godgeleerd Genootschap N. S. Deel XVI. 1898. 8⁰.

Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II. Tom. 2, livr. 1. La Haye 1898. 8⁰.

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft 34, No. 7—11. 1898. 4⁰.

Nova acta. Tom. 55—69. 1891—98. 4⁰.

Katalog der Bibliothek. Lief. 3—8. 1891—97. 8⁰.

Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:

Zeitschrift. Band 52, Heft 2. 3. Leipzig 1898. 8⁰.

Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XI, No. 1. Leipzig 1898. 8⁰.

Universität in Halle:

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.

Schriften aus d. J. 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 71, Heft 1—3. Leipzig 1898. 8⁰.

Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:

Jahresbericht für 1897/98. 1898. 8⁰.

Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:

Zeitschrift. Bd. X, 2. 1898. 8⁰.

Stadtbibliothek in Hamburg:

Schriften der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten von 1895 und 1896.

Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:

Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen von Carl Schuchhardt. Heft V. VI. 1896—98. fol.

Zeitschrift. Jahrgang 1898. 8⁰.

Universität Heidelberg:

Ferd. Ad. Kehrer. Ueber die Vorgänge bei der Wundheilung. 1898. 4⁰.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:

Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 22. 23. 1897. 4⁰.

Ofversigt XXXIX. 1896/97. 1897. 8⁰.

Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:

Finlands geologiska Undersökning. Kartbladet 32 und 33 (mit erläuterndem Text). 1898. 8⁰.

Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:

Acta. Vol. 13. 14. 1897. 8⁰.

Meddelanden. Heft 23. 1898. 8⁰.

Universität Helsingfors:

Schriften aus d. J. 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

Digitized by Google

Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:
Archiv. N. F. Band XXVIII, Heft 2. 1898. 8⁰.
Jahresbericht für das Jahr 1897/98. 1898. 8⁰.

Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:
Schriften. 30. u. 31. Heft. 1898. 8⁰.

Ferdinandeum in Innsbruck:
Zeitschrift. 3. Folge. Heft 42. 1898. 8⁰.

Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:
The Journal. Vol. II, No. 7. 8. 1898. 4⁰.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:
Denkschriften. Bd. VI, Lfg. 1; Bd. VII, Lfg. 1. Text und Tafeln.
" VIII, " 4. " "
1897/98. fol.

Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:
Zeitschrift. N. F. Bd. X, Heft 3 u. 4; Bd. XI, Heft 1. 1897/98. 8⁰.
Regesta diplomatica historiae Thuringiae. Bd. II, Theil 1 (1152—1210). 1898. 4⁰.

Historischer Verein in Ingolstadt:
Sammelblatt. XXII. Heft. 1897. 8⁰.

Universität Jurjew (Dorpat):
Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98 in 8⁰.
Acta. Bd. VI, No. 1 u. 2. 1898. 8⁰.

Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 8⁰.

Universität Kasan:
Utschenia Sapiski. Bd. 65, No. 5—11. 1898. 8⁰.

Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:
Zeitschrift. N. F. Band 33 und neue Folge Suppl.-Heft 12. 1898. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrgang 1897. 1898. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Kassel:
Abhandlungen und Bericht XLIII. 1898. 8⁰.

Université Impériale in Kharkow:
P. J. Kul, Die Provinzialversammlungen bei den Römern. 1898. 8.
Annales 1898. Vol. 4. 8⁰.
M. Tikhomandritzky, Cours de la théorie des probabilités. 1898. 8⁰.

Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:
Zeitschrift. Bd. 27. 1898. 8.

Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. III, Abtheilung Kiel. 1898. 4⁰.

K. Universität in Kiel:
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Universität in Kiew:
Iswestija. Band 38, No. 6—10. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:

Jahresbericht für 1897. 1898. 8⁰.
Carinthia I. 88. Jahrgang. No. 1—6. 1898. 8⁰.

Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:

Festschrift zum 50jährigen Bestehen. 1898. 4⁰.

Universität in Königsberg:

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Oversigt. 1898. No. 4. 5. 8⁰.
Mémoires. a) Classe des lettres, 6e série, tom. IV, No. 5;
b) Classe des sciences, 5e série, tom. IV, No. 3. 1898. 4⁰.

Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:

Aarböger. II. Raekke, Bd. XIII, 2. 3. 1898. 8⁰.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Anzeiger. 1898, Juni, Juli, Oktober, November. 8⁰.
Rozprawy. filolog. Ser. II, tom. 11. 12; histor.-filoz. Ser. II, tom. 10. 1898. 8⁰.
Collectanea ex Archivio collegii iuridici. Tom. V. 1897. 8⁰.

Société mathèmatique de Kharkow:

Communications. 2e Série, Vol. VI, No. 4. 1898. 8⁰.

Verein für Naturkunde in Krefeld:

III. Jahresbericht für 1896—98. 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Landshut:

Verhandlungen. 34. Band. 1898. 8⁰.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. IV. Série, Vol. 34, No. 128. 129. 1898. 8⁰.

Kansas University in Lawrence, Kansas:

The Kansas University Quarterly. Vol. VII, No. 2, Series A. Vol. VII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:

Tijdschrift. N. Serie. Deel XVII, afl. 3. 4. 1898. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, Jaar 1897—98. 1898. 8⁰.
Levensberichten 1897—98. 1898. 8⁰.

Sternwarte in Leiden:

Annalen. Bd. VII. Haag 1897. 4⁰.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Theil XVI, 3. 4. 1898. 8⁰.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XVIII, No. 2. 3 und Sachregister 1846—95. 1898. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIV, No. 4. 5. 1898. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 50, Heft 3. 4. 1898. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Band 50, Heft 3—5. 1898. 8⁰.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 57, Heft 10—12; Bd. 58, Heft 1—10. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Geschichts- und Alterthumsverein in Leisnig:
Mittheilungen. 11. Heft. 1898. 8⁰.

Société des Sciences in Lille:
Mémoires. Ve Série, fasc. 1—6. 1895/96. 8⁰.

University of Nebraska in Lincoln:
Bulletin. Vol. X, Article 1—5. 1897/98. 8⁰.

Museum Francisco-Carolinum in Linz:
55. und 56. Jahresbericht. 1897/98. 8⁰.

Sociedade de geographia in Lissabon:
Boletin. 16. Serie, No. 9. 1897. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Liverpool:
Proceedings. No. LII. London 1898. 8⁰.

Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:
La Cellule. Tome XV, fasc. 1. 2. 1898. 4⁰.

Institution of civil Engineers in London:
List of Members. 1. July 1898. 8⁰.

The English Historical Review in London:
Historical Review. Vol. XIII, No. 51. 52. July, Oct. 1898. 8⁰.

Royal Society in London:
Proceedings. Vol. 63, No. 399—401. Vol. 64, No. 402—405. 1898. 8⁰.
Philosophical Transactions. Series A, Vol. 189. 190; Series B, Vol. 188. 189. 1897/98. 4⁰.
List of Members. 30th Nov. 1897. 4⁰.

R. Astronomical Society in London:
Monthly Notices. Vol. 58, No. 8. 9 und Appendix Vol. 59, No. 1. 1898. 8⁰.

Chemical Society in London:
Journal. No. 428. 429 and Supplementary Number. No. 430—433.
Proceedings. Session 1898/99. No. 198—200. 8⁰.

Linnean Society in London:
Proceedings. Nov. 1896 — June 1897. 1897. 8⁰.
The Journal. a) Botany. Vol. 33, No. 229—233.
b) Zoology. Vol. 26, No. 168—171. 1897/98. 8⁰.
The Transactions. a) 2. Series. Botany. Vol. V, 7. 8.
b) 2. Series. Zoology. Vol. VII, 4. 1897/98. 4⁰.
List 1897/98. 1897. 8⁰.

Medical and chirurgical Society in London:
Medico-chirurgical Transactions. Vol. 81. 1898. 8⁰.

R. Microscopical Society in London:
Journal. 1898. Part. 4—6. 8⁰.

Zoological Society in London:
Proceedings. 1898. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIV, part 7. 8. Vol. XV, part 1. 1898. 4⁰.
A List of the Fellows. 1898. 8⁰.

Zeitschrift „Nature" in London:
Nature. No. 1496—1522. 1898. 4⁰.

Digitized by Google

Academy of Science in St. Louis:
Transactions. Vol. VII, No. 17—20; Vol. VIII, No. 1—7. 1897/98. 8⁰.

Reale Accademia di scienze in Lucca:
Atti. Vol. 29. 1898. 8⁰.

Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:
Der Geschichtsfreund. Bd. 53. Stans. 1898. 8⁰.

Société Linnéenne in Lyon:
Annales. N. S. Tome 44, Année 1897. 1898. 8⁰.
Saint-Lager, Grandeur et décadence du Nard. Paris 1897. 8⁰.
Saint-Lager, Notice sur Alexis Jordan. Paris 1898. 8⁰.
Meyran Octave, Les noms de genre. Paris 1898. 8⁰.

Université in Lyon:
Annales fasc. 35. 36. Paris 1898. 8⁰.

Wisconsin Academy of Sciences in Madison:
Transactions. Vol. XI. 1898. 8⁰.

Government Museum in Madras:
Bulletin. Vol. 2, No. 2. 1898. 8⁰.

Government Astronomer in Madras:
Report on the Madras Observatory for 1897/98. 1898. 8⁰.

R. Academia de la historia in Madrid:
Boletin. Tomo 33, cuad. 1—3. 5. 6. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:
Jahresbericht und Abhandlungen 1896—98. 1898. 8⁰.

R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:
Rendiconti. Ser. II, Vol. 30. 1897. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. XX, 6.
b) Classe di science matematiche. Vol. XVIII, 4. 5. 1897/98. 4⁰.

Società Italiana di scienze naturali in Mailand:
Memorie. Vol. VI, fasc. 2. 1898. 4⁰.
Atti. Vol. 37, fasc. 3. 1898. 8⁰.

Società Storica Lombarda in Mailand:
Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 25, fasc. 19. 1898. 8⁰.

Literary and philosophical Society in Manchester:
Memoirs and Proceedings. Vol. 42, part 3. 5. 1898. 8⁰.

Universität in Marburg:
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Faculté des sciences in Marseille:
Annales de l'Institut botanico-géologique colonial. Vol. 3. 4. 1897/98. 8⁰.

Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:
Mittheilungen. Bd. V, 1. 1898. 8⁰.

Royal Society of Victoria in Melbourne:
Proceedings. Vol. X, part 2. 1898. 8⁰.

Scientific Association in Meriden, Conn.:
Transactions. Vol. VIII. 1898. 8⁰.

Rivista di Storia Antica in Messina:
Rivista. Anno 3, fasc. 2—4. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:
Jahrbuch. 9. Jahrgang. 1897. 4⁰.

Observatorio meteorológico-magnético central in México:
Boletin mensual. 1898 Marzo—Agosto. 4⁰.

Secretaria de formento etc. in Mexico:
Boletin del Instituto geológico de Mexico. No. 10. 1898. 4⁰.

Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:
Memorias. Tomo XI, No. 5—12. 1898. 8⁰.

Società dei naturalisti in Modena:
Atti. Ser. III, Vol. XV, fasc. 1. 2; Vol. XVI, fasc. 1. 2. 1898. 8⁰.

Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:
Anuario hidrográfico del Rio de la Plata. 1891. 8⁰.

Museo nacional in Montevideo:
Anales. Tom. 3, fasc. 9. 10. 1898. 4⁰.

Numismatic and Antiquarian Society in Montreal:
The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. Series III. Vol. I, No. 3. 1898. 8⁰.

Oeffentliches Rumiantzoff'sches Museum in Moskau:
Ottschet 1897. 1898. 8⁰.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:
Bulletin. Année 1898, No. 1. 1898. 8⁰.

Mathematische Gesellschaft in Moskau Universität Moskau:
Sbornik. Bd. XX, 2. 1898. 8⁰.
Utschenia Sapiski. Bd. XIII. XIV. 1896—98. 8⁰.

Statistisches Amt der Stadt München:
Münchener Jahresübersichten für 1897. 1898. 4⁰.
Gewerbezählung v. 14. Juni 1895. 1898. 4⁰.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:
Correspondenzblatt. 29. Jahrg., No. 7—10. München. 1898. 4⁰.
Beiträge zur Anthropologie Braunschweigs. Festschrift. Braunschweig. 1898. 8⁰.

Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:
Verzeichniss der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen pro 1899 und Nachträge zu 1898. fol.

K. bayer. technische Hochschule in München:
Bericht über das Studienjahr 1897/98. 1898. 4⁰.
Programm für 1898/99. 1898. 8⁰.

Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1898, No. 19—31. 8⁰.

Universität in München:
Amtliches Verzeichniss des Personals. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen im Winter-Semester 1898/99. 1898. 4⁰.
Rede beim Antritt des Rektors. Nov. 1898. 4⁰.

Historischer Verein in München:
Monatsschrift. 1898, No. 11. 12. 8⁰.
Monatsschrift. 1898, No. 5—8. 8⁰.

Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:
Hochschul-Nachrichten. 1898, No. 94—97. 4⁰.

K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:
Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. 1898, Juni—Oktober. fol.

Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:
26. Jahresbericht für 1897/98. 1898. 8⁰.

Académie de Stanislas in Nancy:
Mémoires. 5e Série. Tome 15. 1897. 1898. 8⁰.

Société des sciences in Nancy:
Bulletin. Série II. Tome XV, fasc. 32. Paris 1897. 8⁰.

Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:
Rendiconto. Serie 3. Vol. 4, fasc. 6—11. 1898. 8⁰.

Zoologische Station in Neapel:
Mittheilungen. Band XIII, 3. Berlin 1898. 8⁰.

Historischer Verein in Neuburg a/D.:
Neuburger Kollektaneen-Blatt. 61. Jahrg. 1897. 8⁰.

Académie in Neuchatel:
Programme des cours sem. d'hiver 1898/99. 1898. 8⁰.

North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):
Transactions. Vol. 47, part 4—7; Vol. 48, part. 1. 1898. 8⁰.
Annual Report for the year 1897/98. 1898. 8⁰.

The American Journal of Science in New-Haven:
Journal. Vol. 6, No. 32—36. 1898. 8⁰.

Observatory of the Yale University in New-Haven:
Report for the year 1897/98. 1898. 8⁰.

American Oriental Society in New-Haven:
Journal. Vol. XIX, 2. 1898. 8⁰.

Academy of Sciences in New-York:
Transactions. Vol. 16. 1898. 8⁰.
Annals. Vol. IX (Index). Vol. X, No. 1—12; Vol. XI, part. 2. 1898. 8⁰.

American Museum of Natural History in New-York:
Bulletin. Vol. IX, part. 1. 1898. 8⁰.
Annual Report for the year 1897. 1898. 8⁰.

American Geographical Society in New-York:
Bulletin. Vol. 30, No. 4. 1898. 8⁰.

State Museum in New-York:
Bulletin. Vol. 30, No. 3. 4. 1898. 8⁰.

Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:
Prodromus Florae Batavae. Vol. II, pars 2. 1898. 8⁰.
Nederlandsch kruidkundig Archief. IIIe Serie. Deel I, stuk 3. 1898. 8⁰.

Archaeological Institute of America in Norwood, Mass:
American Journal of Archaeology. Vol. 1, No. 6. 1897. 8⁰.

Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:
Abhandlungen. Bd. XI. 1898. 8⁰.

Geological Survey of Canada in Ottawa:
Annual Report. New Series. Vol. IX. 1896. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Royal Society of Canada in Ottawa:

Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. 3. 1898. 8⁰.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Bullettino. Tom. VI, 3. 1898. 8⁰.

Circolo matematico in Palermo:

Annuario. 1898. 8⁰.
Rendiconti. Tomo XII, 5. 6. 1898. 8⁰.

Collegio degli Ingegneri in Palermo:

Atti. Anno 1898, Maggio—Agosto. 4⁰.

Académie de médecine in Paris:

Rapports annuels de la Commission permanente de l'hygiène de l'enfance pour l'année 1897. No. 37 et 38. 1897. 8⁰.
Rapport sur les vaccinations pendant l'année 1896. Melun 1897. 8⁰.
Bulletin. 1898, No. 28—51. 8⁰.

Académie des sciences in Paris:

Souvenirs de Marine. Par le Vice-Amiral Pâris. 5 vols. fol. 1882—92.
Comptes rendus. Tome 127, No. 2—26. 1898. 4⁰.
Oeuvres de Laplace. 1895—98. 4⁰.

École polytechnique in Paris:

Journal. II. Série. 3e cahier. 1897. 4⁰.

Moniteur Scientifique in Paris:

Moniteur. Livr. 680—684 (Août-Décembre 1898). 4⁰.

Musée Guimet in Paris:

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 6. 7. 1897/98. 8⁰.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 36, No. 3; Tome 37, No. 1. 1897/98. 8⁰.

Muséum d'histoire naturelle in Paris:

Bulletin. Année 1898. No. 1—5. 8⁰.
Nouvelles Archives. III. Série. Tome 9, fasc. 2. 1897. 4⁰.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. IV. Série. Tome VIII, fasc. 5. 6; Tome IX, fasc. 1. 1897/98. 8⁰.

Société de géographie in Paris:

Comptes rendus. 1898. No. 6—8. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome XIX, trim. 2. 1898. 8⁰.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tome 26, No. 4—9. 1898. 8⁰.

Société d'encouragement pour l'industrie nationale in Paris:

Bulletin. 5. Série. Tome 3, No. 8. 1898. 4⁰.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Tome 22. 1897. 8⁰.
Mémoires. Tome X. 1897. 8⁰.

Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:

G. A. Esow, Beziehungen Peters des Grossen zu dem armenischen Volke. 1898. 4⁰.
Byzantina Chronika. Tom. IV, 3 u. 4; Tom. V, 1 u. 2. 1897. 4⁰.

Digitized by Google

Mémoires. a) Classe historico-philologique, Vol. I, No. 7; II, No. 1. 2; III, No. 1.
b) Classe physico-mathématique. Vol. 5, No. 6—13; Vol. 6, No. 1—8. 10. 1897—98. 4⁰.
Mémoires. VIIe Série. Tom. 42, No. 13. 1895. 4⁰.
Bulletin. Ve Série. Tome 7, No. 3—5; Tom. 8, No. 1—4.
Annuaire du Musée zoologique. No. 1. 1898. 8⁰.

Comité géologique in St. Petersburg:

Bulletins. Vol. XVI Supplément et Vol. XVII, No. 1—5. 1897/98. 8⁰.
Mémoires. Vol. XVI, No. 1. 1898. 4⁰.

Botanischer Garten in St. Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. XIV, 2. 1898. 8⁰.

Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 35, Lfg. 2. 1898. 8⁰.

Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:

Schurnal. Tom. XXX, Heft 4—7. 1898. 8⁰.

Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:

Travaux. Vol. II, Livr. 3; Vol. III, Livr. 1. 1898. 8⁰.

Kaiserliche Universität in St. Petersburg:

Obosrenije 1898/99. 1898. 8⁰.
Schriften aus d. J. 1897/98 in 8⁰.

Academy of natural Sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1898, part I. II. 8⁰.

Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 21, No. 4; Vol. 22, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:

Alumni Report. Vol. 34, No. 7. 11. 1898. 8⁰.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. 37, No. 157. 1898. 8⁰.
Transactions. New Series. Vol. XIX, part 2. 3. 1898. 4⁰.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. XII, p. 11—55. 1898. 4⁰.

Historische Gesellschaft in Posen:

Zeitschrift. Jahrg. 13. Heft 1. 2. 8⁰.

K. geodätisches Institut in Potsdam:

Jahresbericht 1897/98. 1898. 8⁰.

Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:

Rozprawy. Třida I, Ročník VI; Třida II, Ročník VI, 1. 2; Třida III, Ročník VI. 1897. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 10—12. 1897/98. 8⁰.
Věstník. Ročník VI, No. 1—9. 1897. 8⁰.
Bulletin international IV. a) Sciences mathématiques No. 1. 2.
b) Médicine. 1897. 8⁰.
Almanach. Ročnik VIII. 1898. 8⁰.
Spisy Jana Amosa Komenského. Číslo I—III. 1897. 8⁰.
Archiv pro lexikografii. Číslo II. 1897. 8⁰.

Digitized by Google

Sbírka promenův, ku poznání literárního života. Skupina I. Rada 1. 1897. 8⁰.
Gustav Gruss, Základové theoretické astronomie. 1897. 8⁰.
Žikmund Winter, Děje vysokých škol pražských. 1897. 8⁰.
Adolf Petr Zaturecký, Slovenská přísloví, pořekadla a úsloví. 1897. 8⁰.
V. Flajšhans, Knihy České. 1897. 8⁰.
Emil Ott, Soustavný úvod ve studium nového řízení soudního. Díl I. 1897. 8⁰.

Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:

Časopis. Vol 28, No. 1. 1898. 8⁰.

Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:

Das Gründungsjahr der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. 1898. 4⁰.

Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:

Personalstand 1898/99. 1898. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.

Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:

Mittheilungen. 36. Jahrg., No. 1—4. 1897/98. 8⁰.

Zeitschrift „Krok" in Prag:

„Krok". Bd. XII, No. 4. 5. 1898. 8⁰.

Verein böhmischer Mathematiker in Prag:

Sbornik. Číslo I. 1898. 8⁰.

Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:

Berichte. VI. Heft, 1896—97. 1898. 8⁰.

Naturforscher-Verein in Riga:

Correspondenzblatt. No. XL und XLI. 1898. 8⁰.

Museu nacional in Rio de Janeiro:

Revista. Vol. I. 1896. 4⁰.

Observatorio in Rio de Janeiro:

Annuario 1898. 1897. 8⁰.

R. Accademia dei Lincei in Rom:

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. VII, semestre 1, fasc. 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1898. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. V, parte 1. Memorie 1898; Vol. VI, parte 2. Notizie degli scavi 1898. Aprile, Maggio, Giugno, Luglio. 1898. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. VII, fasc. 5. 6. 1898. 8⁰.
Rendiconti dell' adunanza solenne del 12. Giugno 1897. 1898. 4⁰.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. Anno 1898, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 51, Sessione 4—7. 1898. 4⁰.

Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:

Mittheilungen. Band XIII, 2. 3. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:

Le opere di Galileo Galilei. Vol. VIII. Firenze 1898. 4⁰.
Cataloghi dei Codici orientali di alcune biblioteche d'Italia. Fasc. VI. Firenze 1897. 8⁰.

Società Italiana delle scienze in Rom:

Memorie di matematica e di fisica. Serie III. Tomo XI. 1898. 4⁰.

R. Società Romana di storia patria in Rom:

Archivio. Vol. XXI, 1. 2. 1898. 8⁰.

Universität Rostock:

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Académie des sciences in Rouen:

Précis analytique des travaux. Année 1896/97. 1898. 8⁰.

R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:

Atti. Serie III. Vol. 4, fasc. 1. 2. 1898. 8⁰.

The American Association for the advancement of science in Salem:

Proceedings for the 46th meeting, held at Detroit, Mich. 1898. 8⁰.
Lth Anniversary-Preliminary Announcement of the Boston Meeting to be held Aug. 22d to 27th. Boston 1898. 8⁰.

Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:

Mittheilungen. 38. Vereinsjahr. 1898. 8⁰.

K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:

Programm für das Jahr 1897/98. 1898. 8⁰.

Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):

Anales. Seccion 2a año 1896. 1897. fol.
Almanaque naútico para el año 1900. 1898. 4⁰.

Commissão geographica e geologica in São Paulo:

Boletin. No. 10—14. 1895—97. 8⁰.

China Branch of the R. Asiatic-Society in Shanghai:

Journal. N. Serie. Vol. 28. 1893/94. 1898. 8⁰.

K. K. archäologisches Museum in Spalato:

Bullettino di Archeologia. Anno XXI, No. 4—11. 1898. 8⁰.

Historischer Verein der Pfalz in Speyer:

Mittheilungen. XXII. 1898. 8⁰.

K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:

Öfversigt (Bulletin). Vol. 54 (1897). 1898. 8⁰.
Handlingar. N. F. Band 30. 1897/98. 4⁰.
Bihang (Collection de memoires in 8⁰) Vol. 23 (1897/98). Section 1—4. 1898. 8⁰.
Astronomiska Jakttagelser. Bd. VI, No. 3. 1898. 4⁰.

Geologiska Förening in Stockholm:

Förhandlingar. Band 20, Heft 5. 6. 1898. 8⁰.

Nordiska Museet in Stockholm:

Ringlekar på Skansen. 1898. 8⁰.
Bilder från Skansen door Artur Hazelius. Heft 1—4. 1896—98. fol.

Digitized by Google

Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:

Monatsbericht. No. 5—8. 1898. 8⁰.

Kais. Universität Strassburg:

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. Jahrg. VII, Heft 1—4. 1898. 8⁰.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Abstract of Proceedings. August—October. 1898. 8⁰.
Journal and Proceedings. Vol. 31. 1897. 8⁰.

Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:

Annual Report for the year 1897. 1898. fol.
Mineral Resources, No. 3. 4. 1898. 8⁰.
Memoirs Palaeontology. No. VI. 1898. fol.

Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:

Boletín. Tomo 2, No. 4. Mexico 1898. 4⁰.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Beobachtungen im Jahr 1896. 1898. fol.

Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:

Die Sprichwörter der japanischen Sprache von P. Ehmann. Th. III, IV. 1898. 8⁰.
Neuerworbene Bücher. 1898. 8⁰.

Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. IV, No. 1. 2. 1898. 4⁰.

Canadian Institute in Toronto:

Proceedings. Vol. I, parts 6. 1898. 8⁰.
Transactions. Supplement to No. 9. Vol. 5, part 1. 1898. 8⁰.

University in Toronto:

Studies. a) Psychological Series No. 1.
b) Biological Series No. 1. 1898. 8⁰.
Studies. History, first Series Vol. 2. 1898. 4⁰.

Faculté des sciences in Toulouse:

Annales. Tome 12, fasc. 3. 4. Paris 1898. 4⁰.

Biblioteca e Museo comunale in Trient:

Archivio Trentino. Anno XVI, 1. 1898. 8⁰.

Società adriatica di scienze naturali in Triest:

Bollettino. Vol. 16—18. 1895—98. 8⁰.

Universität Tübingen:

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:

Studies. No. 5. 1898. 4⁰.

R. Accademia delle scienze in Turin:

Atti. Vol. 33, disp. 14. 15. 1898. 8⁰.
Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1897. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:

Nova Acta. Ser. III. Vol. 17, fasc. 2. 1898. 4⁰.

Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1896. 1898. 4⁰.

Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:

Onderzoekingen. Register zu den Onderzoekingen 1848—1897. 1898. 8⁰.

Ateneo Veneto in Venedig:

L'Ateneo Veneto. Anno XX. Vol. I, fasc. 2. 3; Vol. II, fasc. 1—3.
Anno XXI. Vol. I, fasc. 1. 2. 1897/98. 8⁰.

R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:

Atti. Tomo 55, disp. 3—10, Tomo 56, disp. 1—7. 1896—98. 8⁰.
Memorie. Vol. 26, No. 1. 2. 1897. 4⁰.
Concorsi a premio. 1898. 8⁰.

Redaction der Prace matematyczno-fizyczne in Warschau:

Prace matemat.-fizyczne. Tom. IX. 1898. 4⁰.

American Historical Association in Washington:

Annual Report 1896. Vol. I. II. 1897. 8⁰.

Bureau of Education in Washington:

Annual Report of the Commissioner of Education for 1895/96 Vol. II, 1896/97 Vol. I. 1897/98. 8⁰.

U. S. Department of Agriculture in Washington:

Report. 1898. 8⁰.
Bulletin of the Division of biological Survey. No. 9—11. 1898. 8⁰.
Bulletin. Division of Ornithology. No. 50. 1898. 8⁰.

Smithsonian Institution in Washington:

Annual Report for the year ending Sune 30, 1895. 1897. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1090, Vol. 40; No. 1125. 1126. 1898. 8⁰.

U. S. National-Museum in Washington:

Proceedings. Vol. IX. 1897. 8⁰.

United States Geological Survey in Washington:

Bulletins. No. 88. 89 u. 149. 1897/98. 8⁰.
Monographs. No. XXX. 1898. 4⁰.

Harzverein für Geschichte in Wernigerode:

Zeitschrift. Jahrg. 31. 1898. 8⁰.

Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Bd. 136. 137. 1897/98. 8⁰.
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1897/98. 8⁰.
Abth. I. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1—5.
„ IIa. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1. 2.
„ IIb. Bd. 106, Heft 1—10.
„ III. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1—3.
Register zu Bd. 101—105.

Digitized by Google

Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Bd. 45. 1897. 4⁰.
" Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 64. 1897. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 84, Hälfte I u. II und Register zu Bd. 51—80. 1897/98. 8⁰.
Almanach. 47. Jahrg. 1897. 8⁰.

K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:

Jahrbuch. Band 47, Heft 3. 4. Band 48, Heft 1. 1898. 4⁰.
Verhandlungen. No. 9—13. 1898. 4⁰.

K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:

Jahrbücher. Bd. 39, No. 42. 1898. 4⁰.

K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:

Wiener klinische Wochenschrift. 1898, No. 27—50. 4⁰.

Anthropologische Gesellschaft in Wien:

Mittheilungen. Band XXVIII, Heft 4. 1898. 4⁰.

Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:

Verhandlungen. Band 48, Heft 6—9. 1898. 8⁰.

K. K. militär-geographisches Institut in Wien:

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Band XII. 1898. 4⁰.

K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:

Annalen. Band XIII, No 1. 1898. 4⁰.

K. K. Universität in Wien:

Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge im Jahre 1897/98. 1898. 8⁰.
Oeffentliche Vorlesungen im Sommer-Semester 1898 und im Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1898/99. 1898. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors am 24. Oktober 1898. 1898. 8⁰.

Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:

Schriften. 38. Bd. 1897/98. 1898. 8⁰.

Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:

Annalen. 29. Band, Heft 2. 1898. 4⁰.
Mittheilungen. No. 1—3. 1898/99. 4⁰.
I. Jahresbericht der historischen Kommission für Nassau. 1898. 8⁰.

Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:

Jahrbücher. Jahrg. 51. 1898. 8⁰.

Oriental Nobility Institute in Woking:

Vidyodaya. Vol. 27, No. 7—10. 1898. 8⁰.

Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:

Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Bd. VI. 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:

Verhandlungen. N. F. Bd. XXXI, No. 9—11; Bd. XXXII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Sitzungsberichte. Jahrg. 1898, No. 1—3. 8⁰.

Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:

Das Schweizerische Dreiecknetz. Bd. VIII. 1898. 4⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Zürich:

Vierteljahrsschrift. 43. Jahrg. 1898, Heft 2. 3. 1898. 8⁰.

Universität in Zürich:

Schriften a. d. J. 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

Von folgenden Privatpersonen:

Prinz Albert I. von Monaco:

Resultats des campagnes scientifiques. fasc. XII. 1898. 4⁰.

F. Bashforth in Minting Vicarage, Horncastle:

Replica di Krupp alla protesta de Signor Basforth. Cambridge 1898. 8⁰.

Verlagsbuchhandlung Hermann Böhlau's Nachfolger in Weimar:

Zeitschrift der Savigny-Stiftung. Bd. XIX germanische und romanische Abtheilung. Weimar 1898. 8⁰.

H. P. Cushing in Cleveland, Ohio:

Report ou the Geology of Clienton Courty. Washington 1895. 4⁰.

Martin Ficker in Leipzig:

Ueber Lebensdauer und Absterben von pathogenen Keimen. Leipzig 1898. 8⁰.

Johann Friedrich in München:

Ignaz von Döllinger. Sein Leben. Bd. I. München 1899. 8⁰.

Albert Gaudry in Paris:

Notize sur les Travaux scientifiques de Victor Lemoine. Paris 1898. 8⁰.

Karl Gegenbaur in Heidelberg:

Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere. Bd. I. Leipzig 1898. 8⁰.

D. Grecescu in Bucarest:

Conspectul florei Romaniei. Bucarest 1898. 8⁰.

Albert von Kölliker in Würzburg:

Ueber die Entwicklung der Graaf'schen Follikal. Würzburg 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Karl Krumbacher in München:

Byzantinische Zeitschrift. Bd. VII, 3. 4. Leipzig 1898. 8⁰.
Byzantinisches Archiv. Heft 1. Leipzig 1898. 8⁰.

J. Marquart in Tübingen:

Die Chronologie der alttürkischen Inschriften. Leipzig 1898. 8⁰.

B. A. Mystakides in Constantinopel:

Notes sur Martin Crusius. Paris 1898. 8⁰.

Gabriel Monod in Versailles:

Revue historique. Tom. 68, No. I, Sept., Okt.; No. II, Nov., Dez., 1898. Paris 1898. 8⁰.

Alois Panzer in München:

Zur electrischen Trambahnfrage. München 1898. 4⁰.

Oswald J. Reichel in Lympstone, Exeter:

The „Domesday" Hundreds of Devon. No. II—VIII. 1896—98. 8⁰.

Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. IV, Heft 1 und 2. Berlin 1898. 4⁰.

Joseph Sandalgian in Rom:

L'idiome des inscriptions cunéiforma urartiques Rome. 1898. 8⁰.

Seitz und Schauer in München:

Deutsche Praxis. Bd. I, No. 1—8, 13—17. München 1898. 8⁰.
Medizinische Neuigkeiten. No. 41—43, 45—50. München 1898. 4⁰.

Gustav Schmoller in Berlin:

Umrisse und Untersuchungen zur Verfassungs-, Verwaltungs- und Wirthschaftsgeschichte. Leipzig 1898. 8⁰.

S. Schwendener in Berlin:

Gesammelte botanische Mittheilungen. Bd. 1. 2. Berlin 1898. 8⁰.

B. G. Teubner'sche Verlagsbuchhandlung in Leipzig:

Mathematische Annalen, Generalregister zu Bd. 1—50. Leipzig 1898. 8⁰.
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, Heft 1. Leipzig 1898. 8⁰.

Giacomo Tropea in Messina:

Giasone, il Tago della Tessalia. Messina 1898. 8⁰.

Heinrich Ulmann in Greifswald:

Ueber die Memoiren des Fürsten Adam Czartoryski. Greifswald 1898. 8⁰.
Kaiser Wilhelm der Alte. Festrede. Greifswald 1898. 8⁰.

M. Vaucher in Grand Lancy, Genève.

Aux amis de Pierre Vaucher † 9. Juin 1898. Genève 1898. 8⁰.

Albrecht Weber in Berlin:

Vedische Beiträge. No. 7. Berlin 1898. 4⁰.

N. Wecklein in München:

Euripidis fabulae. Vol. I, part 5—7; Vol. II, part. 1—3. Lips 1898. 8⁰.

Max Wellner in Neugedein:

25 Karten von Palästina. Prag 1898. fol.

Eduard v. Wölfflin in München:

Archiv für lateinische Lexikographie. X. Jahrgang. Ergänzungsheft. Register zu Bd. 1—10. Leipzig 1898. 8⁰.

Digitized by Google

Namen-Register.

Barrois (Wahl) 537.
Bergeat Alfred 495.
Brioschi Francesco (Nekrolog) 449.
Buchner Ludwig Andreas (Nekrolog) 431.

Cope Edward Drinker (Nekrolog) 487.

Des Cloizeaux Alfred Louis Ollivier (Nekrolog) 492.
Doflein 539.
Dyck Walter 203. 538.

Ebert Hermann 497.

v. Fedorow Eugraph 55.
Finsterwalder Sebastian 395.
Fomm Ludwig 365.
Franke J. Hermann 19.
Fresenius Karl Remigius (Nekrolog) 452.
Fuchs Lazarus (Wahl) 537.

Glan Paul 117.
v. Gümbel Wilhelm 3.

Hartig Robert 1. (Wahl) 536.
Heidenhain Rudolf (Nekrolog) 460.
Hertwig Richard 127.

Königs Wilhelm 538.
Korn Arthur 129. 135.
v. Kupffer Karl 225.

Leuckart Rudolf (Nekrolog) 471.
Lie Sophus (Wahl) 537.
Lindemann Ferdinand 37. 181.
v. Lommel Eugen 111.

v. Merz Sigmund 75.
Meyer Victor (Nekrolog) 445.

v. Pettenkofer Max 423. 531.
Pringsheim Alfred 59. 325. (Wahl) 536.

Ranke Johannes 227.

Sachs Julius (Nekrolog) 478.
Schwarzschild K. 271.
Seeliger Hugo 147. 226. 363.
v. Seidel Ludwig 395.
Selenka Emil 111. 226.
Sohnke Leonhard (Nekrolog) 440.
Solereder Hans 495.
Stark J. 91.
Steenstrup Johann Japetus Smith (Nekrolog) 476.

v. Voit Karl 430.

v. Weber Eduard 369.

Digitized by Google

Sach-Register.

Actinosphärium Eichhorni, Befruchtung und Kerntheilung 127.
Anatomie, systematische der Dikotyledonen 495.
Ansprachen des Präsidenten 423. 531.
Ausbreitung der Flüssigkeiten 91.

Beugungsfigur im Fernrohr ausserhalb des Focus 271.
Bilinearformen 369.

Dielektrischer Zustand einer incompresiblen Flüssigkeit 135.
Dioptrischer Apparat, präcise Abbildung eines Objects 395.
Doppel-Integral, Theorie desselben 59.
Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt 181.
Druckschriften, eingelaufene 339. 575.

Elastische Körper, theoretische Untersuchungen 117.
Embryonalanlage, erste bei den Menschenaffen 226.
Entladungen elektrische, in verdünnten Gasen 365.
Erdbeben in Bayern, in den letzten Jahren 3.
Erdmagnetismus, Entstehung der hydrodynamischen Theorie 129.

Feldspathstudien 55.
Fixsterne, räumliche Vertheilung derselben 226. 363.

Gasentladungen, elektrische 497.
Geologie der äolischen Inseln 495.

Holzzuwachs der Bäume durch Ausästung und Wurzelverminderung 1.

Irrationalität von e und π 325.

Kettenbrüche unendliche, Convergenz derselben 295.
Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen 19.

Digitized by Google

Leber, Sternzellen derselben 225.

Nekrologe 431. 440. 449. 452. 455. 460. 471. 476. 478. 487. 492.
Nicol'sche Prismen aus Kalkspath und Glas 111.

Objectiv von Fraunhofer 75.
Orangutan-Schädel 111.

Potentialtheorie 203.

Reise nach Westindien und Nordamerika 539.

Sterne telescopische, der Bonner Durchmusterungen 147.
Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten 227.

Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale 37.

Wahlen 536.

Digitized by Google

Digitized by Google

THE UNIVERSITY LIBRARY
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, SANTA CRUZ
SCIENCE LIBRARY

This periodical is due on the **DATE** stamped below.
To renew by phone, call **459-2050**

SCI. LIB.

Series 1665

STORED AT NRLF

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google